RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

Sulla rappresentazione parametrica della soluzione generale di un sistema di equazioni lineari in un modulo sopra un anello principale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__307_0>

SULLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLA SOLUZIONE GENERALE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI IN UN MODULO SOPRA UN ANELLO PRINCIPALE

di Gabriele Darbo (*a Genova*) *)

In alcune ricerche sulla teoria dei dispositivi elettrici lineari mi sono servito di un risultato riguardante i sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, con un numero di equazioni anche diverso dal numero delle funzioni incognite, risultato che ho potuto ottenere con mezzi elementari di algebra omologica. Poichè tale risultato è formulabile in ambito puramente algebrico ho ritenuto opportuno farne oggetto della presente nota.

1. – Sia Λ un anello principale, X un Λ-modulo. Consideriamo il sistema di equazioni

$$\begin{array}{l} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p = 0 \\ \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{q1}x_1 + \lambda_{q2}x_2 + \ldots + \lambda_{qp}x_p = 0 \end{array} \tag{1}$$

i coefficienti λ_{ij} essendo in Λ e le x_j in X.

La matrice dei coefficienti $L = \{\lambda_{ij}\}$ può essere interpretata come omomorfismo tra Λ-moduli liberi di rango p e q

$$L : \Lambda^p \to \Lambda^q$$

e il sistema di equazioni (1) si può scrivere

$$\Phi x = 0$$

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico Università, Via L. B. Alberti, Genova.

dove $\Phi : X^p \rightarrow X^q$ è un omomorfismo di Λ-moduli, e $x \in X^r$. Si può, mediante gli isomorfismi canonici $\Lambda^p \otimes_\Lambda X = X^p$, $\Lambda^q \otimes_\Lambda X = X^q$, identificare Φ con l'omomorfismo

$$L \otimes_\Lambda X : \Lambda^p \otimes_\Lambda X \rightarrow \Lambda^q \otimes_\Lambda X$$

L'insieme delle soluzioni di (1) sarà dato pertanto dal nucleo dell'omomorfismo $L \otimes_\Lambda X$.

Consideriamo la sequenza esatta

$$0 \rightarrow \operatorname{Ker} L \rightarrow \Lambda^p \rightarrow \Lambda^q \rightarrow \operatorname{Coker} L \rightarrow 0 \tag{2}$$

Ker L essendo libero in quanto sottomodulo di un modulo libero (Λ è principale!), avremo che la (2) è una risoluzione libera di Coker L.

Tensorializzando la (2) con X otterremo il complesso

$$0 \rightarrow (\operatorname{Ker} L) \otimes X \rightarrow X^p \xrightarrow{\Phi} X^q \rightarrow \operatorname{Coker} L \otimes X \rightarrow 0 \tag{3}$$

In genere l'esattezza della (3) può venir meno in X^p.

Calcolando il quoziente d'omologia si ha come è noto la sequenza esatta [1]):

$$0 \rightarrow (\operatorname{Ker} L) \otimes X \rightarrow \operatorname{Ker} \Phi \rightarrow \operatorname{Tor}^\Lambda (\operatorname{Coker} L, X) \rightarrow 0 \,. \tag{4}$$

Se $\operatorname{Tor}^\Lambda (\operatorname{Coker} L, X) = 0$ si ottiene:

$$(\operatorname{Ker} L) \otimes X = \operatorname{Ker} \Phi$$

Poichè Ker $L \subset \Lambda_p$, risulta essere Ker L isomorfo a Λ^k dove $k = p - \operatorname{rang} L$ (rang L è la caratteristica della matrice L). Esiste dunque un morfismo iniettivo

$$\theta : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^p$$

tale che il morfismo, pure iniettivo [2])

$$\theta \otimes X : \Lambda^k \otimes X \rightarrow \Lambda^p \otimes X$$

---

[1]) Questa sequenza è spezzante se X è divisibile come Λ-modulo, tale essendo allora $(\operatorname{Ker} L) \otimes X$.

[2]) La sequenza $0 \rightarrow \Lambda^k \xrightarrow{\theta} \Lambda^p \xrightarrow{L} \Lambda^q$ è esatta e $\theta(\Lambda^k)$ è componente diretta in Λ^p.

porge una rappresentazione parametrica delle soluzioni di (1) che, scritta per disteso, sarà del tipo

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_{11}u_1 + \theta_{12}u_2 + \dots + \theta_{1k}u_k \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_p &= \theta_{p1}u_1 + \theta_{p2}u_2 + \dots + \theta_{pk}u_k \end{aligned}$$

con u_i elementi arbitrari di X $(i = 1, \dots, k)$ e $\theta = \{\theta_{ji}\}$.

2. – Supponiamo ora che l'anello A oltre ad essere principale sia una K-algebra essendo K un corpo commutativo. Poichè Tor^A (Coker L, X) è in questo caso anche uno spazio vettoriale su K, la sua dimensione su K chiameremo *ordine* (globale) del sistema (1).

Indichiamo con tX il sottomodulo di torsione di X. Tensorializzando la sequenza (2) con tX e mappandola nella (3) mediante la inclusione $tX \subset X$ si perviene al diagramma commutativo (a meno di tacite identificazioni canoniche):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\mathrm{Ker}\, L) \otimes X \arrow[r] & X^p \arrow[r, "\Phi"] & X^q \arrow[r] & (\mathrm{Coker}\, L) \otimes X \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (\mathrm{Ker}\, L) \otimes tX \arrow[r] \arrow[u] & tX_p \arrow[r, "t\Phi"] \arrow[u] & tX^q \arrow[r] \arrow[u] & (\mathrm{Coker}\, L) \otimes tX \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

Da questo se ne deduce (passando ai quozienti d'omologia dei complessi rappresentati dalle righe e alle mappe tra questi indotte dalle frecce verticali) il diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\mathrm{Ker}\, L) \otimes X \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, \Phi \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Tor}^A (\mathrm{Coker}\, L, X) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (\mathrm{Ker}\, L) \otimes tX \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ker}\, t\Phi \arrow[r, "\tau_1"'] \arrow[u, "\varepsilon_1"'] & \mathrm{Tor}^A (\mathrm{Coker}\, L, tX) \arrow[r] \arrow[u, "\wr\, \varepsilon"'] & 0 \end{tikzcd} \tag{5}$$

Fin qui tutto è canonico ed ε è isomorfismo. Interpretiamo ora il diagramma (5) come diagramma di spazi vettoriali su K; in tale categoria le righe sono sequenze esatte «spezzanti».

Potremmo dunque trovare un morfismo (di spazio vettoriale!) non canonico μ che è *inverso a destra* dell'epimorfismo $\varepsilon\tau_1$: Ker $t\Phi \to \mathrm{Tor}^A$ (Coker L, X) per cui si avrà (in virtù della commutatività di (5)):

$$\text{identità} = \varepsilon\tau_1\mu = \tau\varepsilon_1\mu$$

ne segue che $\varepsilon_1\mu$ è un inverso a destra di τ ed è pertanto un *monomorfismo* (di spazio vettoriale)

$$\varepsilon_1\mu : \mathrm{Tor}^{\Lambda}(\mathrm{Coker}\, L, X) \to \mathrm{Ker}\, \Phi$$

il quale si fattorizza attraverso l'oggetto Ker $t\Phi$ che, in quanto Λ-modulo è di *torsione*. Ne risulta che l'immagine di $\varepsilon_1\mu$ è un sottospazio vettoriale di *Ker* Φ contenuto in t Ker Φ e costituito quindi da soli elementi di torsione (rispetto a Λ).

Supponiamo che il sistema (1) sia di ordine (globale) finito, diciamo h. Allora da quanto stabilito si deduce che alla soluzione generale si può dare una rappresentazione parametrica in cui compaiono come parametri oltre ai k elementi $u_1, \ldots, u_k \in X$ anche gli h elementi $c_1, \ldots, c_h \in K$.

Si avrà dunque per la soluzione generale di (1) una rappresentazione del tipo:

$$\begin{array}{ll} & x_1 = \theta_{11}u_1 + \theta_{12}u_2 + \ldots + \theta_{1k}u_k + c_1V_{11} + \ldots + c_hV_{1h} \\ (6) & x_2 = \theta_{21}u_1 + \theta_{22}u_2 + \ldots + \theta_{2k}u_k + c_1V_{21} + \ldots + c_hV_{2h} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x_p = \theta_{p1}u_1 + \theta_{p2}u_2 + \ldots + \theta_{pk}u_k + c_1V_{p1} + \ldots + c_hV_{ph} \end{array}$$

essendo i θ_{ji} certi elementi dell'algebra Λ ed i V_{jr} certi elementi di *torsione* di X tali che ogni soluzione di (1) è rappresentata in modo *unico* cioè da un solo sistema di parametri $u_1, \ldots, u_k \in \Lambda$ e $c_1, \ldots, c_h \in K$.

3. – Diamo ora una condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni sistema del tipo (1) sia di ordine (globale) finito. La condizione riguarda naturalmente la K-algebra Λ e il Λ-modulo X.

La condizione è la seguente: « *ogni elemento* $\lambda \in \Lambda$ *diverso dallo zero operi su* X *come endomorfismo* $\lambda : X \to X$ *in modo che* $\dim_K \mathrm{Ker}\, \lambda$ *risulti finita* ».

DIMOSTRAZIONE: che la condizione sia necessaria è banale poichè basta prendere un sistema con una equazione ed una incognita. Ci basterà dunque far vedere che è finita la dimensione su K di $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(\mathrm{Coker}\, L, X)$. A tal fine si osservi che Coker L è un quoziente di Λ^q ed è quindi Λ-modulo finitamente generato. Essendo Λ anello principale, Coker L si spezza in somma diretta di un numero finito di moduli ciclici. Il funtore Tor^{Λ} è distributivo di fronte alla somma diretta e perciò basterà dimostrare che la dimensione sul corpo K di $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(M, X)$ è finita se M è ciclico. Se

M è libero la cosa è ovvia essendo $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(M, X) = 0$; altrimenti M ammette una risoluzione del tipo

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\sigma} \Lambda \to M \to 0$$

con $\sigma \in \Lambda$ e $\sigma \neq 0$. Tensorializzando con X si ricava la sequenza esatta (a meno di identificazioni canoniche)

$$0 \to \mathrm{Tor}^{\Lambda}(M, X) \to X \xrightarrow{\sigma} X \to M \otimes X \to 0$$

e quindi $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(M, X) = \mathrm{Ker}\, \sigma$ che ha dimensione finita per ipotesi.

4. – Con il criterio dato al n. 3 risulta immediata l'applicazione dei risultati ottenuti precedentemente al caso dei sistemi di equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti. Mettiamoci, tanto per fare un esempio, nel campo reale e consideriamo lo spazio X delle funzioni C^{∞} sulla retta: Questo spazio si consideri come Λ-modulo, Λ essendo l'anello degli operatori differenziali (lineari a coefficienti costanti); Λ in questo caso coincide con l'anello $R[D]$ dei polinomi nel simbolo di derivazione D ed è perciò principale. Esso è altresì una R-algebra ed ogni suo elemento non nullo opera come endomorfismo su X avente nucleo di dimensione finita, uguale al grado del polinomio in D (o, se si preferisce, all'*ordine* dell'operatore). Si può dunque esprimere la soluzione generale del sistema mediante la rappresentazione (6) in cui le θ_{ji} sono operatori differenziali e le V_r sono certe funzioni C^{∞} che appartengono al sottomodulo di torsione di X; cioè quelle funzioni che sono somme di prodotti di polinomiali, esponenziali, e sinusoidali, che soddisfano insomma a qualche equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti. La soluzione generale viene descritta dunque al variare di k funzioni arbitrarie $u_1, \ldots, u_k$ e di h costanti arbitrarie $c_1, \ldots, c_h$, Notiamo ancora che in questo caso X è un Λ-modulo divisibile e perciò le righe di (5) sono « spezzanti » anche nella categoria dei Λ-moduli. Si può assumere, quindi, che il morfismo μ considerato al n. 2 sia Λ-compatibile e da ciò seguono facilmente ulteriori informazioni sulla rappresentazione (6).

Manoscritto prevenuto in redazione il 10 giugno 1966.