RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE BENTSIK

Sulla dinamica di un corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla nel caso piano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 267-272

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__267_0>

SULLA DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A FORZE DI POTENZA NULLA NEL CASO PIANO

di ETTORE BENTSIK (*a Padova*) *)

È noto che nello studio del moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla, viene a mancare, in generale, la possibilità di ridurre il problema alle quadrature.

In questo lavoro si considera un sistema piano a struttura non giroscopica e si mostra, nell'ipotesi che esso sia soggetto a forze del tipo suddetto, come esista, oltre ai due ben noti, un terzo integrale primo. Si stabilisce quindi un metodo che permette di determinare, per quadrature, una classe di ∞^5 movimenti. Si osserva infine l'impossibilità dell'esistenza, in tale classe, di precessioni anche non regolari e che, in generale, i moti per cui la velocità angolare è costante in modulo non possono che essere delle rotazioni uniformi.

1. Equazioni generali

Sia $\mathscr{C}$ un corpo rigido e $T(0;\, x,\, y,\, z)$ una terna trirettangola levogira solidale con $\mathscr{C}$; detti A, B, C, i momenti d'inerzia di $\mathscr{C}$ rispetto agli assi solidali, sia $C = A + B$ (caso piano). È sempre possibile, con una opportuna rotazione degli assi, attorno a z, ottenere che i momenti di deviazione siano tutti nulli.

Ne segue che l'omografia d'inerzia σ, con tale riferimento, è rappresentata dalla matrice:

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{vmatrix} . \tag{1}$$

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Padova.

Sia λ l'omotetia

$$\lambda \equiv \left| \begin{array}{ccc} 2(A+B) & 0 & 0 \\ 0 & 2(A+B) & 0 \\ 0 & 0 & 2(A+B) \end{array} \right| , \tag{2}$$

e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del sistema.

Su $\mathscr{C}$ agisca un sistema di forze (di potenza nulla) del tipo di quelle di Coriolis o di quelle di Lorentz; in tal caso se 0 è un punto fisso il momento di tali forze rispetto ad 0 si può scrivere nella forma [1])

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} , \tag{3}$$

con $\boldsymbol{H}$ vettore invariabile.

Ne segue che, in assenza di attrito, il teorema del momento della quantità di moto, nell'ipotesi di 0 fisso o nello studio del moto relativo al baricentro, si esprime nella forma

$$\sigma\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} . \tag{4}$$

ove il punto sta ad indicare la derivazione rispetto al tempo con riferimento agli assi solidali.

È noto [2]) che oltre l'integrale dell'energia, che assume la forma:

$$\sigma\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 2E_0 , \tag{5}$$

sussiste il seguente integrale primo:

$$(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{H}) \times \sigma\boldsymbol{H} = h , \tag{6}$$

con h costante.

Per lo studio del moto, alle (4) si deve aggiungere la condizione di invariabilità di $\boldsymbol{H}$ e cioè la:

$$\dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H} = 0 . \tag{7}$$

---

[1]) G. Grioli, « Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla ». Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. XXVII, 1957.

[2]) Vedi nota (1).

2. Esistenza di un terzo integrale primo

Introducendo il vettore $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{H}$ e proiettando le (4), (7) sugli assi si ha:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{p}_1 = -\, s_2 p_3 \\ \dot{p}_2 = s_1 p_3 \\ (A + B)\dot{p}_3 = A s_2 p_1 - B s_1 p_2 \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \dot{s}_1 = -\, p_2 s_3 \\ \dot{s}_2 = p_1 s_3 \\ (A + B)\dot{s}_3 = A p_2 s_1 - B p_1 s_2 \, , \end{cases}$$

ove con p_i e s_i si sono indicate le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{S}$.

Moltiplicando le (8, 1) (8, 2) (9, 1) (9, 2) rispettivamente per s_1, s_2, p_1 e p_2 e sommando si ottiene

$$(10)\qquad \dot{p}_1 s_1 + p_1 \dot{s}_1 + \dot{p}_2 s_2 + p_2 \dot{s}_2 = 0 \, ,$$

da cui si trae

$$(11)\qquad p_1 s_1 + p_2 s_2 = \alpha \, ,$$

con α costante. L'integrale dell'energia e l'integrale primo (6), con le notazioni assunte, assumono rispettivamente la forma

$$(12)\qquad A p_1^2 + B p_2^2 + (A + B) p_3^2 = 2E_0$$

$$(13)\qquad A s_1^2 + B s_2^2 + (A + B) s_3^2 = 2E_0 + 4h \, .$$

3. Determinazione per quadrature di una classe di ∞^5 movimenti

L'esistenza dell'integrale primo (11), in aggiunta agli integrali (12), (13), permette di stabilire un procedimento di riducibilità alle quadrature dei problema dinamico almeno nel caso in cui si prefissi una delle sei costanti di integrazione, imponendo che sia $\alpha = 0$.

In tal caso infatti [escludendo casi eccezionali di immediata trattazione] dalle (8, 1), (8, 2), tenuto conto di (11), si ha

$$(14)\qquad \frac{\dot{p}_1}{p_1} = \frac{\dot{p}_2}{p_2} \, ,$$

da cui si trae

$$(15)\qquad p_1 = K p_2 \, ,$$

ove K è una costante.

Analogamente da (9, 1), (9, 2), tenuto conto di (11), si ha

$$s_2 = -Ks_1 . \tag{16}$$

Le (8, 3), (9, 3) assumono quindi la forma

$$\dot{p}_3 = -\frac{AK^2 + B}{A + B} s_1 p_2 \tag{17}$$

$$\dot{s}_3 = \frac{A + BK^2}{A + B} s_1 p_2 , \tag{18}$$

e da queste risulta immediatamente

$$\dot{p}_3 = -\frac{AK^2 + B}{A + BK^2} \dot{s}_3 ; \qquad p_3 = -\frac{AK^2 + B}{A + BK^2} s_3 + \gamma , \tag{19}$$

con γ costante.

Tenuto conto di (15), (16), (19), gli integrali primi (12), (13) si possono scrivere

$$(AK^2 + B)p_2^2 = 2E_0 - (A + B)\left[\gamma + \frac{AK^2 + B}{A + BK^2} s_3\right]^2 \tag{20}$$

$$(A + BK^2)s_1^2 = 2E_0 + 4h - (A + B)s_3^2 , \tag{21}$$

da cui si trae

$$p_2 s_1 = f(s_3) , \tag{22}$$

con $f(s_3)$ espressa da

$$f(s_3) = \pm \frac{1}{A + BK^2} \cdot \tag{23}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{\{2E_0(A+BK^2)^2-(A+B)[\gamma(A+K^2B)-(AK^2+B)s_3]^2\}[2E_0+4h-(A+B)s_3^2]}{(AK^2 + B)(A + BK^2)}} .$$

La (18) allora diventa

$$\dot{s}_3 = \frac{A + BK^2}{A + B} f(s_3) , \tag{24}$$

che permette di ottenere per quadrature s_3. Nota la s_3, le (19), (20), (21), (15), (16) danno le

$$p_3 , \quad p_2 , \quad s_1 , \quad p_1 , \quad s_2 .$$

Qualche osservazione. È noto che in presenza di forze del tipo considerato non possono aversi delle precessioni regolari [3]). I risultati precedenti permettono anche di concludere che nel caso piano e nell'ipotesi $\alpha = 0$ non possono aversi moti di precessione neppure non regolari. Infatti, condizione necessaria e sufficiente perchè un moto rigido sia un moto di precessione è che la velocità angolare verifichi la condizione [4])

$$\frac{p_1\dot{p}_2 - p_2\dot{p}_1 + p_3(p_1^2 + p_2^2)}{(p_1^2 + p_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \nu \,, \tag{25}$$

con ν costante. Tale relazione per la (15) diventa

$$p_3 = \nu\sqrt{1 + K^2}p_2 \,. \tag{26}$$

La (12), tenuto conto di (15) e di (26), porta a concludere che dovrebbe essere $p_i =$ cost. ($i = 1, 2, 3$) e quindi che il moto si riduce ad una rotazione uniforme.

* * *

Dalle (8) si deduce, con semplici passaggi, che

$$(A + B)(p_1\dot{p}_1 + p_2\dot{p}_2 + p_3\dot{p}_3) = (As_1p_2 - Bs_2p_1)p_3 \,, \tag{27}$$

e quindi, per la (9, 3), si ha

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2\dot{s}_3p_3 \,. \tag{28}$$

La (28) permette di affermare che si avranno moti con $\boldsymbol{\omega}$ costante in modulo se e solo se risulta $s_3 =$ cost. oppure $p_3 = 0$.

Qualora sia $p_3 = 0$ dalle (8) si deduce che anche p_1 e p_2 devono risultare costanti e che quindi il moto è rotatorio uniforme e rientra nei casi previsti in [5]).

Qualora sia $s_3 =$ cost. da (8, 3), tenuto conto di (8, 1), (8, 2) si ha

$$Bp_1\dot{p}_1 + Ap_2\dot{p}_2 = 0 \,, \tag{29}$$

---

[3]) Vedi nota (1).

[4]) G. Grioli, « Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi ». Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6, giugno 1963.

[5]) Vedi nota (1).

mentre da (12) e da (28) si ha

$$\left\{\begin{array}{l} Ap_1\dot{p}_1 + Bp_2\dot{p}_2 + (A + B)p_3\dot{p}_3 = 0 \;, \\ p_1\dot{p}_1 + p_2\dot{p}_2 + p_3\dot{p}_3 = 0 \;. \end{array}\right. \tag{30}$$

Le (29), (30) si possono pensare un sistema di equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti nelle incognite $p_1\dot{p}_1$, $p_2\dot{p}_2$, $p_3\dot{p}_3$.

Essendo uguale a zero il determinante dei coefficienti, sarà:

$$p_1\dot{p}_1 = \varrho(t)A \;; \quad p_2\dot{p}_2 = -\varrho(t)B \;; \quad p_3\dot{p}_3 = \varrho(t)(B - A) \;, \tag{31}$$

con $\varrho(t)$ funzione arbitraria del tempo.

D'altra parte da (9, 3), derivando e tenendo conto di (9, 1), (9, 2), si ha

$$As_1\dot{p}_2 - Bs_2\dot{p}_1 - s_3(Ap_2^2 + Bp_1^2) = 0 \;. \tag{32}$$

Da (32), per la (29), dovrà essere

$$As_1\dot{p}_2 - Bs_2\dot{p}_1 = \text{cost.} \;, \tag{33}$$

e quindi risulta

$$(As_1^2 + Bs_2^2)p_3 = \text{cost.} \;. \tag{34}$$

Da (34), essendo $As_1^2 + Bs_2^2 = \text{cost.}$ si ha

$$p_3 = \text{cost.} \tag{35}$$

e quindi

$$\varrho(t) = 0 \;, \quad p_1 = \text{cost.} \;, \quad p_2 = \text{cost.} \;.$$

Si ricade quindi nel caso di moti rotatori uniformi.

Si conclude che per un corpo rigido piano con un punto fisso, qualora la velocità sia costante in modulo, il moto non può che essere una rotazione uniforme.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 maggio 1966.