

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

S. GUAZZONE

## **Su alcune classi di anelli noetheriani normali**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 37 (1967), p. 258-266

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_37\\_\\_258\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__258_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SU ALCUNE CLASSI DI ANELLI NOETHERIANI NORMALI

di S. GUAZZONE (a Roma) \*)

È ben noto che gli anelli di frazioni degli anelli integrali normali sono ancora anelli normali. Esistono però anelli normali non integrali che ammettono anelli di frazioni non normali. In questo lavoro, sulla base di un'analisi di anelli siffatti, ottenuti approfondendo un esempio di M. Nagata <sup>1)</sup>, si stabilisce (cfr. § 4) che le tre condizioni:

a)  $A$  è un anello integralmente chiuso nel suo anello totale di quozienti (brevemente:  $A$  è normale);

b)  $A_m$  è normale per ogni massimale  $m$  di  $A$ ;

c) ogni anello di frazioni di  $A$  è normale;

sono a due a due non equivalenti (più precisamente ciascuna è più restrittiva della precedente).

Il § 1 è introduttivo e contiene gli enunciati di teoremi noti che si utilizzano nel lavoro. Nel § 2 si danno delle condizioni sufficienti affinché un anello normale soddisfi alla condizione b) o c). Nel successivo § 3 si deducono dei teoremi di struttura, tra cui una caratterizzazione degli anelli noetheriani normali in cui lo  $0$  è privo di componenti immerse come somme dirette di domini normali e di anelli primari (teor. 7). Indi si espongono gli esempi già menzionati, infine (§ 5) si caratterizzano gli anelli normali a estensioni polinomiali normali.

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del CNR.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico G. Castelnuovo, Università, Roma.

<sup>1)</sup> L'esempio di M. Nagata mi è stato comunicato da P. Salmon. Esso rientra nella classe di esempi descritti nel § 4 di questo lavoro, ponendo ivi  $f = X^2 - Y^3$  e localizzando nel massimale  $(X, Y, Z)$ .

## § 1. — Richiami di nozioni e risultati noti.

Gli anelli che qui si considerano sono tutti commutativi con unità. Gli anelli « locali » sono noetheriani per definizione. Fissiamo la terminologia relativa alle diverse condizioni di chiusura integrale di cui dovremo occuparci, uniformandoci per il resto a quella adottata in [8] <sup>2)</sup>.

Un anello  $A$  (non necessariamente intero) si dirà *normale* se è integralmente chiuso nel proprio anello totale di quozienti. In particolare si dirà *totale* se coincide col proprio anello totale di quozienti, cioè se ogni non 0-divisore è invertibile.

$A$  si dirà anello  $LMN$  se l'anello di frazioni  $A_m$  è normale per ogni ideale massimale  $m$  di  $A$ .

$A$  si dirà anello  $LN$  se ogni anello di frazioni di  $A$  è normale.

Gli anelli  $LN$  sono ovviamente  $LMN$  e normali. Gli anelli quasilocali normali sono ovviamente  $LMN$ , ma non sempre  $LN$  (§ 4). Ci sono algebre di tipo finito normali ma non  $LMN$  (§ 4). Ci serviremo nei paragrafi successivi delle seguenti note proposizioni:

**TEOREMA 1:** *Ogni anello  $LMN$  è normale.*

Una dimostrazione di questo fatto trovasi ad esempio in [5], p. 160.

**TEOREMA 2:** *Ogni anello normale noetheriano ridotto è somma diretta di anelli integri (e quindi è  $LN$ ).*

(Cfr. [4], Chap. 5, p. 16).

**TEOREMA 3:** *Ogni anello locale normale o è intero oppure è totale. ([1], p. 162).*

**TEOREMA 4:** *Un anello noetheriano  $A$  è normale se e solo se si verificano le seguenti due condizioni:*

I) *gli ideali principali generati da non 0-divisori sono puri;*

II) *i localizzati  $A_p$  di  $A$  nei primi di altezza 1 non degeneri sono normali.*

(Cfr. [9], p. 73, teor. 7 e [8], p. 41, cor. 12.7).

Poichè la normalità si conserva per somma diretta (e, viceversa, si mantiene passando da un anello ad un suo addendo diretto) una prima vasta classe di anelli normali è costituita dalle somme dirette di anelli integri normali e anelli totali. Un'altra classe di anelli normali è costituita

---

<sup>2)</sup> I numeri fra [ ] rinviano alla Bibliografia in fondo alla Nota.

dagli anelli « pseudofattoriali »<sup>3)</sup>, che sono stati studiati in [6], fra i quali sono compresi degli anelli normali non interi, non totali e a spettro connesso. Ad esempio anelli del tipo  $A = k[X, Y]/(X^2, XY)$  ove  $k$  è un campo arbitrario e  $X, Y$  due indeterminate. Dette  $x, y$  le classi di  $X, Y$  mod  $(X^2, XY)$ , l'ideale  $(0)$  in  $A$  ha la decomposizione primaria  $(0) = (x) \cap (x^2, y)$ , pertanto l'insieme degli 0-divisori di  $A$  coincide con il massimale  $(x, y)$ . Dunque  $A$  non è intero ma ha spettro connesso (cfr. [10], p. 205, Vol. I).  $A$  è normale perchè è pseudofattoriale. Si può anche dedurre la normalità di  $A$  direttamente dal teorema 4, oppure mediante una immersione « sottodiretta » associata alla decomposizione primaria dell'ideale  $(0)$  come negli esempi descritti in [6].

## § 2. — Criteri sufficienti affinché un anello normale sia $LMN$ .

**TEOREMA 5:** *Ogni anello noetheriano normale di dimensione 1 è  $LMN$ .*

*Prova:* Se  $\mathfrak{m}$  è un massimale di  $A$ , anello noetheriano normale di dimensione 1, ed  $\mathfrak{m}$  è associato allo  $(0)$  in  $A$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  è totale.

Se  $\mathfrak{m}$  non è associato allo  $(0)$ ,  $\mathfrak{m}$  è non degenere di altezza 1. In base al teorema 4 del § 1,  $A_{\mathfrak{m}}$  è allora intero normale. Si osservi inoltre che le componenti primarie di  $(0)$  non immerse sono ideali primi, a due a due non contenuti nello stesso massimale non degenere.

**TEOREMA 6:** *Ogni anello noetheriano normale  $A$  in cui  $(0)$  non ha componenti immerse è  $LN$ .*

La dimostrazione di questo teorema si può conseguire con adattamenti abbastanza ovvii delle argomentazioni indicate da S. Abhyankar (in [2], p. 505).

Tuttavia la esponiamo per completezza di discorso.

*Prova:* Sia  $S$  un sistema moltiplicativo arbitrario di  $A$ ,  $B = A_s$ , e siano  $K, L$  gli anelli totali di frazioni di  $A, B$  rispettivamente. Sia  $\varphi: A \rightarrow B$  l'omomorfismo canonico e  $\psi: K \rightarrow L$  il suo prolungamento. Proviamo che  $\psi$  è un epimorfismo. Per ottenere ciò è sufficiente mostrare che per ogni  $y$  non 0-divisore in  $B_1 = \varphi(A)$  esiste un  $v \in A$  non 0-divisore tale che  $\varphi(v) = y$ . Sia  $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_c$  la decomposizione primaria ridotta dello  $(0)$  in  $A$ ,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_c$  i primi associati, fra i quali per ipotesi non ci sono

---

<sup>3)</sup> In [6] abbiamo designato con questo termine gli anelli i cui elementi non 0-divisori siano prodotti di elementi primi. Tali anelli posseggono parecchie delle proprietà degli anelli interi fattoriali, tra cui la normalità.

relazioni d'inclusione. Sia  $\text{Ker } \varphi = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_a$ ,  $a \leq c$ , ma possiamo supporre  $a < c$  altrimenti  $\text{Ker } \varphi = 0$  e non c'è niente da dimostrare. Perciò, se esiste  $t \in A$ , 0-divisore in  $A$ , e tale che  $y = \varphi(t)$  è non 0-divisore in  $B$ , allora esiste un intero  $b$  tale che  $a \leq b < c$  e tale che  $t \in \mathfrak{p}_{b+1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_c$  ma  $t \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_b$ , previo eventuale riordinamento di  $\mathfrak{p}_{a+1}, \dots, \mathfrak{p}_c$  spostando agli ultimi posti tutti e soli i primi che contengono  $t$ . Poniamo

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_b \neq 0 \quad \text{e} \quad \mathfrak{a}' = \mathfrak{p}_{b+2} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_c .$$

Allora  $\mathfrak{a}$  non è contenuto in  $\mathfrak{a}'$ , perchè

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}' \Rightarrow \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_b \subset \mathfrak{a}' \Rightarrow \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{a}'$$

per qualche  $i$  tale che  $1 \leq i \leq b \Rightarrow$  un'inclusione tra primi associati distinti. Pertanto esiste  $u \in \mathfrak{a}$ ,  $u \notin \mathfrak{a}'$ . Poniamo  $v = t + u$ . Se fosse  $v \in \mathfrak{p}_i$  con  $1 \leq i \leq b$  sarebbe  $t = v - u \in \mathfrak{p}_i$  contro la scelta di  $t$ , e se fosse  $v \in \mathfrak{p}_i$  con  $b + 1 \leq i \leq c$  sarebbe  $u = v - t \in \mathfrak{p}_i$  contro la scelta di  $u$ . Pertanto  $v$  è non 0-divisore in  $A$ , e poichè  $\varphi(\mathfrak{a}) = 0$  perchè  $\mathfrak{a} \subset \text{Ker } \varphi$ , è  $\varphi(v) = \varphi(t)$  cioè  $y = \varphi(v)$ . Ciò prova che  $\varphi$  è surgettivo.

Sia ora  $\eta \in L$  intero algebrico su  $B$ :

$$\eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \dots + b_n = 0 .$$

Esiste  $\xi \in K$  tale che  $\eta = \psi(\xi)$  e possiamo anche scrivere

$$b_i = \psi(a_i) / \psi(s) \quad \text{con} \quad a_i \in A \quad s \in S .$$

Moltiplicando l'equazione di dipendenza integrale per  $\psi(s^n)$  otteniamo

$$\psi[(s\xi)^n + a_1(s\xi)^{n-1} + a_2 s(s\xi)^{n-2} + \dots + a_n s^{n-1}] = 0 ,$$

perciò esiste  $s' \in S$  che annulla l'espressione tra parentesi quadra. Allora posto  $x = \xi s s'$  abbiamo

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

con  $c_i = a_i s^{i-1} (s')^i$ , onde  $x \in A$ ,  $\psi(x) = \psi(\xi) \psi(s s')$  onde  $\eta = \psi(\xi) = \psi(x) / \psi(s s') \in B$ , e la dimostrazione è conclusa.

### § 3. — Caratterizzazioni di classi speciali di anelli normali.

**TEOREMA 7:** *Un anello noetheriano è normale ed ha lo (0) privo di componenti immerse se e solo se è somma diretta di anelli integri normali e anelli primari.*

*Prova:* Sia  $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_c$ , e sia  $\mathfrak{m}$  un massimale che contenga, se è possibile, due componenti primarie distinte di  $(0)$ . Sia ad esempio, con opportuno riordinamento,  $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q}_1 \cup \mathfrak{q}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{q}_h$ , con  $h \geq 1$ ,  $\mathfrak{m} \not\supset \mathfrak{q}_i$  per  $i > h$ .

È allora

$$A_{\mathfrak{m}} = (A/N)_{\mathfrak{m}/N} \quad \text{con} \quad N = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_h.$$

Allora (teoremi 3 e 6)  $A_{\mathfrak{m}}$  è totale oppure integro. Nel primo caso  $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$  con opportuno  $i$  tale che  $1 \leq i \leq h$ , allora  $h = 1$ , altrimenti si avrebbe una componente immersa. Nel secondo caso  $A/N$  risulta integro, allora  $N$  è primo, ancora  $h = 1$ . Pertanto gli ideali  $\mathfrak{q}_i$  per  $i = 1, \dots, c$  sono a due a due comassimali, e ciascuno  $\mathfrak{q}_i$  è 0-dimensionale oppure è primo. Sia  $\mathfrak{p}_1$  ad esempio una delle componenti che è un primo.

I massimali di  $A/\mathfrak{p}_1$ , rimontando l'epimorfismo canonico  $A \rightarrow A/\mathfrak{p}_1$  danno luogo a massimali di  $A$  che contengono solamente  $\mathfrak{p}_1$  fra le componenti di  $(0)$  in  $A$ . Allora per ogni localizzazione  $(A/\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{m}_1}$  c'è un massimale  $\mathfrak{m} \subset A$  tale che  $A_{\mathfrak{m}} = (A/\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{m}_1}$  e pertanto  $A/\mathfrak{p}_1$  è anello di tipo *LMN*. Il teorema 1 conclude la prova in un senso. Il viceversa è ovvio.

**OSSERVAZIONE:** Il teorema 7 comprende come casi particolari il teorema 2 e la nota caratterizzazione degli anelli a ideali ciclici (*PIR*) come somme dirette di anelli principali (*PID*) e anelli primari a ideali ciclici (cfr. [10] Vol. I, p. 245).

La condizione *LMN* diventa significativa solo se negli anelli a cui viene imposta ci sono « parecchi » ideali massimali.

Da questo punto di vista si presenta spontanea la considerazione degli anelli di Jacobson, in cui ogni primo è intersezione di massimali. Si ha infatti la nota:

**PROPOSIZIONE:** Se  $A$  è un anello di Jacobson e  $\mathfrak{p}$  è un primo non massimale, allora  $\mathfrak{p}$  è contenuto in infiniti massimali.

*Prova:* Se  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_h$  fossero tutti i massimali che contengono  $\mathfrak{p}$ , dovrebbe essere  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_h \supset \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_h$  e pertanto almeno uno dei massimali sarebbe contenuto in  $\mathfrak{p}$ . Contraddizione.

TEOREMA 8: Per un anello  $A$  noetheriano di Jacobson e a spettro connesso le seguenti condizioni sono equivalenti:

a)  $A$  è di tipo  $LMN$ ;

b) l'ideale  $(0)$  ha la seguente struttura: (escludendo il caso banale in cui  $(0)$  sia primario associato ad un massimale) le componenti primarie isolate sono ideali primi non massimali; le componenti primarie immerse sono tutte di dimensione 0; se  $\mathfrak{p}_i$  e  $\mathfrak{p}_j$  sono due componenti isolate distinte e non comassimali l'ideale  $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j$  è 0-dimensionale e  $\sqrt{\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j}$  è intersezione di massimali associati a 0. Infine il luogo non normale di  $A/\mathfrak{p}_i$  ha uno spettro finito costituito da massimali di  $A/\mathfrak{p}_i$  le cui controimmagini in  $A$  sono associate a  $(0)$ , per ogni componente isolata  $\mathfrak{p}_i$ .

Prova: a)  $\Rightarrow$  b). Scriviamo in modo generico una decomposizione primaria:

$$(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r \quad r \geq 2.$$

Proviamo che le componenti isolate sono tutte di dimensione positiva. Se  $\mathfrak{q}_1$  fosse 0-dimensionale e isolata, allora sarebbe  $\sqrt{\mathfrak{q}_1} = \mathfrak{q}_1$ , onde  $\mathfrak{q}_1 + \dots + \mathfrak{q}_r = A$ , per tutti gli  $i = 2, \dots, r$ , onde  $\mathfrak{q}_1 + \bigcap_{i=2}^r \mathfrak{q}_i = A$  e quindi  $A \cong \bigoplus_{i=2}^r A/\mathfrak{q}_i$  contro la ipotesi. Ciascuna componente isolata è di fatto un primo. Infatti sia ancora  $\mathfrak{q}_1$  una di esse. Poichè  $\mathfrak{q}_1$  ha dimensione positiva ci sono infiniti massimali non associati a 0 e contenenti  $\mathfrak{q}_1$ . Se  $\mathfrak{m}$  è uno qualsiasi di essi  $A_{\mathfrak{m}} = (A/N)_{\mathfrak{m}/N}$  è integro, quindi  $N = \mathfrak{q}_1 \cap \dots$  è primo, quindi  $N = \mathfrak{q}_1$  e  $\mathfrak{q}_1$  è primo.

Sia  $\mathfrak{q}$  una componente immersa, esiste un'altra componente  $\mathfrak{q}'$  tale che  $\sqrt{\mathfrak{q}} \supset \sqrt{\mathfrak{q}'}$ . Per ogni  $\mathfrak{m} \supset \sqrt{\mathfrak{q}}$  è  $A_{\mathfrak{m}} = (A/N)_{\mathfrak{m}/N}$  ove  $N = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}' \cap \dots$ ; dunque  $N$  non è primo e  $A_{\mathfrak{m}}$  è totale, quindi  $\mathfrak{m}$  è associato a  $(0)$  di  $A$ . Allora c'è solo un numero finito di massimali contenenti  $\sqrt{\mathfrak{q}}$ , onde  $\sqrt{\mathfrak{q}}$  è massimale. Siano  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$  componenti isolate tali che  $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 \neq A$  e sia  $\mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_h = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_h$  una decomposizione primaria. Se  $\mathfrak{m}$  è un massimale tale che  $\mathfrak{m} \supset \sqrt{\mathfrak{q}_i} \supset \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  non è integro ed  $\mathfrak{m}$  è associato a 0; ciò può avvenire solo per un numero finito di massimali, onde  $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$  e quindi  $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$  è 0-dimensionale e  $\sqrt{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}$  è intersezione di massimali associati a 0.

Se  $\mathfrak{p}$  è una componente isolata ed  $\bar{\mathfrak{m}}$  un massimale di  $A/\mathfrak{p}$ , allora  $(A/\mathfrak{p})_{\bar{\mathfrak{m}}}$  è normale eccetto al più nei casi (numero finito) in cui la controimmagine di  $\bar{\mathfrak{m}}$  in  $A$  è un massimale associato a 0. Altrimenti  $\mathfrak{p}$  è l'unica componente primaria di 0 contenuta nella controimmagine  $\mathfrak{m}$  di  $\bar{\mathfrak{m}}$  e quindi in tal caso  $(A/\mathfrak{p})_{\bar{\mathfrak{m}}} = A_{\mathfrak{m}}$  che è normale per ipotesi.

b)  $\Rightarrow$  a). Se  $\mathfrak{m}$  è un massimale associato a 0, cioè del tipo  $\sqrt{q_i}$ , anche  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  è associato a 0 in  $A_{\mathfrak{m}}$ , onde  $A_{\mathfrak{m}}$  è totale e quindi normale. Se  $\mathfrak{m}$  non è associato a 0 in  $A$ , allora  $\mathfrak{m}$  contiene una sola componente « irriducibile »  $\mathfrak{p}$  di (0) in  $A$ , onde  $A_{\mathfrak{m}} = (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}$  ed  $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$  appartiene al luogo normale di  $A/\mathfrak{p}$ . Pertanto  $A$  è di tipo  $LMN$  e abbiamo concluso.

**§ 4. — Una classe di anelli noetheriani di dimensione 2, normali ma che ammettono anelli di frazioni non normali.**

Sia  $k$  un campo qualunque e sia  $R = k[X, Y, Z]$  l'anello dei polinomi nelle tre indeterminate  $X, Y, Z$ . Sia  $f \in k[X, Y]$  un polinomio del tipo  $f = p_1 \cdot p_2 \dots \cdot p_h$  con  $p_i \in (X, Y)$  e  $p_i$  primo per ogni  $i = 1, \dots, h$ ; supponiamo inoltre che  $f = 0$  sia una curva priva di punti multipli fuori dell'origine<sup>1)</sup>, ma tale che l'origine non sia semplice. Consideriamo in  $R$  l'ideale  $\mathfrak{a} = (X, Y, Z) \cdot (f)$ , e sia  $A = R/\mathfrak{a}$ . Proviamo che  $A$  è normale e non di tipo  $LMN$ . In base al teorema 4 è si può intanto provare che ogni ideale principale non degenerare di  $A$  è puro, e che per ogni primo  $\bar{\mathfrak{p}} \supset A$  di altezza 1 e non degenerare, l'anello locale  $A_{\bar{\mathfrak{p}}}$  è regolare. Ora ogni elemento  $\bar{b} \in A$  è non 0-divisore se e solo se è immagine di un polinomio  $b = b_0 + b_1X + b_2Y + b_3Z \in R$  con  $0 \neq b_0 \in k$ ,  $b_i$  polinomi opportuni. Ora  $(\bar{b})$  è puro in  $A$  se e solo se  $(b, \mathfrak{a})$  è puro in  $R$ . Ma  $(b, \mathfrak{a}) = (b, f)$  perchè  $f = (1/b_0)(bf - b_1Xf - b_2Yf - b_3Zf)$  e  $(b, f)$  è puro in  $R$  perchè  $f, b$  è una  $R$ -successione.

Sia ora  $\bar{\mathfrak{p}} \subset A$  un primo non degenerare di altezza 1. Proviamo che un punto generale  $(\xi, \eta, \zeta)$  di  $\bar{\mathfrak{p}}$  è semplice sulla varietà  $V$  associata ad  $\mathfrak{a}$ . È lecito sostituire al campo base  $k$  un appropriato dominio universale  $\Omega$ , ove si possono prendere il punto  $(\xi, \eta, \zeta)$  e le sue specializzazioni (cfr. [7], p. 198).

Dunque  $(\xi, \eta, \zeta) \neq (0, 0, \zeta)$ , altrimenti quest'ultimo punto avrebbe dimensione 1 ed ammetterebbe quindi la specializzazione  $(0, 0, 0)$ , contro l'ipotesi che  $\bar{\mathfrak{p}}$  sia non degenerare.

Allora  $(\zeta, \eta, \zeta)$  ammette su  $\Omega$  una specializzazione  $(\alpha, \beta, \gamma)$  con  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . L'ideale di  $V$  è l'ideale principale  $(f)$  in  $R$ . Per ipotesi è

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(\alpha, \beta)} \neq (0, 0)$$

<sup>1)</sup> In particolare i fattori  $p_i$  sono a due a due non associati.



ma la matrice Jacobiana

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(\alpha, \beta, \gamma)}$$

ha allora  $\text{car} = 1$  e poichè tale caratteristica non può crescere per specializzazione, abbiamo che

$$\text{car} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(\xi, \eta, \zeta)} = 1 \text{ c.b.d. .}$$

Pertanto  $A$  è normale. Nel caso in cui  $f$  ha una forma semplice come ad esempio  $XY$  oppure  $X^2 - Y^3$  si può ottenere senza molta fatica un'altra dimostrazione della normalità di  $A$ , mediante calcoli diretti a partire dalla immersione sottodiretta di  $A$  associata ad una decomposizione primaria di  $(0)$ .

È facile infine constatare che localizzando  $A$  ad esempio in  $(X, Y, Z - 1)/\alpha$  si ottiene un anello  $A_{(x, y, z-1)} \cong (R/(f))_{(x, y, z-1)}$  che non è normale. Se infatti fosse  $(R/(f))_{(x, y, z-1)}$  normale con  $f$  riducibile, si avrebbe un anello locale normale non integro e non totale, perchè  $z - 1$  è un non 0-divisore non invertibile. Ciò è assurdo per il teorema 3. Se  $(f)$  è irriducibile allora  $(R/(f))_{(x, y, z-1)} \subset (R/(f))_{(x, y)} \subset L$  ove  $L$  sia il corpo quoziente di  $R/(f)$ . Ma il localizzato di un anello integro in un primo di altezza 1, se è normale è regolare (cfr. ad es. [1], p. 180). Ciò è assurdo perchè  $(0, 0, Z)$  è un punto generale di  $(x, y)$ , razionale su  $k$  e non semplice (cfr. [7], p. 204).

Da quanto detto risulta anche che l'anello  $B = A_{(x, y, z)}$ , che è l'anello totale di  $A$ , e quindi normale, anzi di tipo  $LMN$  perchè locale, non ha tutti i localizzati normali. Di fatti  $B_{(x, y)} \cong (R/(f))_{(\overline{x, y})}$ .

Possiamo riassumere brevemente i fatti osservati:

I) esistono algebre finitamente generate sopra un campo, di dimensione 2, che sono normali ma non  $LMN$  (cfr. teor. 5, § 2);

II) esistono anelli locali di dimensione 2 che sono  $LMN$  ma non  $LN$ .

### § 5. - Sulla permanenza della normalità nelle estensioni polinomiali

È nota la permanenza della normalità nelle estensioni polinomiali degli anelli interi normali ([4], Cap. 7). Orbene, gli anelli considerati nel teorema 8 ovviamente non ammettono estensioni polinomiali di tipo

*LMN.* Si può allora chiedere per quali anelli normali  $A$  è  $A[X]$  ancora normale? Una prima condizione necessaria è fornita dal seguente:

**LEMMA:** *Se  $A$  è tale che  $A[X]$  è normale, allora in  $A$  non ci sono elementi nilpotenti.*

*Prova:* Sia  $\xi \neq 0$  tale che  $\xi^p = 0$ ,  $p > 1$ . Allora  $\xi/X$  è intero sopra  $A[X]$  e non può appartenergli.

**TEOREMA 9:** *Sia  $A$  un anello noetheriano,  $X$  una indeterminata. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $A[X]$  sia normale è che  $A$  sia somma diretta di anelli integri normali.*

*Prova:* Sia  $A[X]$  normale. Allora  $A$  è senza nilpotenti. Quindi  $A[X]$  è senza nilpotenti ([3], Cap. 8, p. 73). Per il teorema 2,  $A[X]$  è somma diretta di anelli integri normali. Siano  $e_1, \dots, e_n$  gli idempotenti ortogonali associati a tale decomposizione diretta. Gli  $e_i$  sono elementi di  $A$  perchè posto ad esempio  $e_1 = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  con  $n \geq 1$ , da  $e_1^2 = e_1$  segue  $a_n^2 = 0$  quindi  $a_n = 0$ . Allora è  $A = e_1A \oplus \dots \oplus e_nA$  ove  $A_i = e_iA$  è intero e normale perchè  $A_i[X] = e_i(A[X])$  è intero e normale.

Il viceversa è ovvio.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ABHYANKAR S.: *Local Analytic Geometry*, Academic Press, 1964.
- [2] ABHYANKAR S.: *A remark on the non normal locus of an analytic space*. Proceedings of the Amer. Math. Soc., 1964, 15, 505.
- [3] BOURBAKI N.: *Algèbre*, Chapitre 8, Hermann, 1958.
- [4] BOURBAKI N.: *Algèbre Commutative*, Chap. 2, 4, 5, 7, Hermann, 1961-1965.
- [5] ENDO S.: *On regular rings*, Journal of the Math. Society of Japan, 1959, 11, 159
- [6] GUAZZONO S.: *Sulla fattorizzazione unica negli anelli commutativi*, in corso di pubblicazione, 1966.
- [7] LANG S.: *Introduction to algebraic geometry*, Interscience, 1958.
- [8] NAGATA M.: *Local Rings*, Interscience, 1962.
- [9] NORTHCOTT D. G.: *Ideal Theory*, Cambridge Tracts, C.U.P., 1960.
- [10] ZARISKI O. et SAMUEL P.: *Commutative Algebra*, Voll. I, II, Van Nostrand, 1958-1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 maggio 1966.