

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. SORANI

## **Sulla coomologia del $C^n$ privato dell'origine**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 37 (1967), p. 234-245

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_37\\_\\_234\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__234_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLA COOMOLOGIA DEL $C^n$ PRIVATO DELL'ORIGINE

di G. SORANI (a Roma) \*)

## Introduzione.

In [4] abbiamo calcolato la coomologia del  $C^n$  privato dell'origine utilizzando il fascio dei germi delle distribuzioni su  $C^n$ . In questo lavoro mostriamo che tale calcolo può anche esser fatto usando le distribuzioni di ordine finito. Ciò comporta la risoluzione di un problema al contorno.

## 1. Forme differenziali e distribuzioni.

Sia  $C^n$  lo spazio complesso di dimensione complessa  $n$ , descritto dal punto  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ; una forma differenziale di classe  $C^\infty$  è una combinazione lineare a coefficienti funzioni  $C^\infty$  dei prodotti esterni dei differenziali delle coordinate complesse  $z_i$  e delle loro immaginarie coniugate  $\bar{z}_i$ . Una tale forma si dice di tipo  $(r, s)$  se essa è omogenea di grado  $r$  nei differenziali  $dz_i$  e di grado  $s$  nei differenziali  $d\bar{z}_i$ ; si ha allora:

$$\varphi = \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_r \\ \beta_1 < \dots < \beta_s}} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s} dz_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_{\alpha_r} \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\beta_s}.$$

Si chiama supporto di una forma differenziale il complementare del massimo aperto sul quale essa è nulla.

Per ogni aperto,  $U \subset C^n$  indichiamo con  $\mathcal{D}^{r,s}(U)$  lo spazio  $C$ -vettoriale

---

\*) Indirizzo dell'A.: Via A. Vivaldi, 15, Roma.

delle forme differenziali  $C^\infty$ , di tipo  $(r, s)$ , a supporto compatto contenuto in  $U$ . Se  $U = C^n$  scriveremo  $\mathcal{D}^{r,s}$  in luogo di  $\mathcal{D}^{r,s}(C^n)$ .

In modo analogo si definiscono gli spazi  $C$ -vettoriali,  $C^{r,s}(U)$ ,  $C^{r,s}$ , delle forme differenziali  $C^\infty$ , di tipo  $(r, s)$ , a supporto qualsiasi.

Con  $\bar{\partial} : C^{r,s} \rightarrow C^{r,s+1}$  indichiamo l'operatore di differenziazione rispetto alle variabili  $\bar{z}_i$ .

Se  $f$  è una funzione porremo:

$$D^{\alpha\bar{\beta}}f = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n+\bar{\beta}_1+\dots+\bar{\beta}_n}f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n} \partial \bar{z}_1^{\bar{\beta}_1} \dots \partial \bar{z}_n^{\bar{\beta}_n}},$$

con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n) \in \mathbb{N}^n$ . Porremo anche:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad |\bar{\beta}| = \bar{\beta}_1 + \dots + \bar{\beta}_n.$$

Se  $\varphi$  è una forma differenziale con  $D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi$  indicheremo la forma che ha come coefficienti le indicate derivate parziali dei coefficienti della forma  $\varphi$ .

Diremo distribuzione  $T$  su  $C^n$  un funzionale lineare su  $\mathcal{D}^{r,s}$ :

$$T : \mathcal{D}^{r,s} \rightarrow C,$$

soddisfacente alla seguente condizione di continuità: se  $\{\varphi_\nu\}$  è una successione di forme  $C^\infty$ , di tipo  $(r, s)$ , a supporto contenuto in un compatto fisso  $K \subset C^n$ , tali che  $\varphi_\nu \rightarrow 0$  uniformemente insieme con tutte le derivate parziali dei coefficienti allora  $T[\varphi_\nu] \rightarrow 0$ .

Sia  $T$  una distribuzione su  $C^n$ . Sia  $A$  l'insieme dei punti  $z \in C^n$  che godono della seguente proprietà: ogni  $z \in A$  possiede un intorno aperto  $U$  tale che per ogni forma  $\varphi$ ,  $C^\infty$ , a supporto compatto contenuto in  $U$ , si ha  $T[\varphi] = 0$ . Il complementare di  $A$  è chiuso in  $C^n$  e si chiama supporto della distribuzione  $T$ .

## 2. Distribuzioni di ordine finito.

Sia  $U$  un aperto relativamente compatto in  $C^n$ . Sia  $\mathcal{D}_m^{r,s}(\bar{U})$  lo spazio delle forme differenziali di tipo  $(r, s)$ , a supporto compatto, di classe  $C^m$  su  $U$ , nulle fuori di  $U$ .

Lo spazio  $\mathcal{D}_m^{r,s}(\bar{U})$ , con la norma:

$$\|\varphi\|_m = \sup_U \sum_{|\alpha|+|\bar{\beta}| \leq m} |D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi|,$$

ove  $|D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi|$  indica il modulo dei coefficienti della forma  $D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi$ , è uno spazio di Banach.

Sia  $S_m^{n-r, n-s}(\bar{U})$  lo spazio duale di  $\mathcal{D}_m^{r, s}(\bar{U})$ ;  $S_m^{n-r, n-s}(\bar{U})$  è anch'esso uno spazio di Banach. Un elemento  $T \in S_m^{n-r, n-s}(\bar{U})$  è un'applicazione lineare continua  $T: \mathcal{D}_m^{r, s} \rightarrow \mathbb{C}$ . Allora esiste una costante  $c_T = \|T\|$  tale che per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}_m^{r, s}(\bar{U})$  risulta:

$$|T[\varphi]| \leq c_T \|\varphi\|_m.$$

Si ha  $\mathcal{D}_{m+1}^{r, s}(\bar{U}) \subset \mathcal{D}_m^{r, s}(\bar{U})$ ; inoltre l'immagine della applicazione di inclusione è densa in  $\mathcal{D}_m^{r, s}(\bar{U})$ . Ne segue, per trasposizione, un'applicazione iniettiva  $S_m^{n-r, n-s}(\bar{U}) \rightarrow S_{m+1}^{n-r, n-s}(\bar{U})$ .

Lo spazio  $\lim_{\rightarrow} S_m^{n-r, n-s}(\bar{U}) = \bigcup_m S_m^{n-r, n-s}(\bar{U})$  è lo spazio delle distribuzioni, di tipo  $(n-r, n-s)$ , di ordine finito su  $U$  e lo indicheremo con  $S^{n-r, n-s}(\bar{U})$ .

LEMMA 1: Sia  $U$  un aperto relativamente compatto in  $\mathbb{C}^n$ ; ogni distribuzione  $T \in S^{n-r, n-s}(\bar{U})$  è la restrizione ad  $U$  di una distribuzione  $\widehat{T}$  su  $\mathbb{C}^n$ .

DIMOSTRAZIONE: Sia  $T \in S^{n-r, n-s}(\bar{U})$ . Poiché  $\mathcal{D}_m^{r, s}(\bar{U})$  è un sottospazio chiuso di  $\mathcal{D}_m^{r, s}(\mathbb{C}^n)$ , per il teorema di Han-Banach si può estendere  $T$  ad un funzionale lineare continuo  $\widetilde{T}: \mathcal{D}_m^{r, s}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ . Poiché  $\mathcal{D}^{r, s} \subset \mathcal{D}_m^{r, s}(\mathbb{C}^n)$  e l'applicazione di inclusione  $i$  è continua ne segue che il funzionale  $\widehat{T} = \widetilde{T} \cdot i$  estende  $T$  a  $\mathbb{C}^n$ .

Inoltre ([3] pag. 82) esistono delle forme differenziali  $\psi_{\alpha\bar{\beta}}^{n-r, n-s}$  di tipo  $(n-r, n-s)$ , a coefficienti continui su  $\mathbb{C}^n$ , e degli indici di derivazione  $\alpha, \bar{\beta} \in \mathbb{N}^n$ , tali che per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}^{r, s}(\bar{U})$  si ha:

$$T[\varphi] = \sum_{|\alpha|+|\bar{\beta}| \leq m} \int_{\bar{U}} \psi_{\alpha\bar{\beta}}^{n-r, n-s} \wedge D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi^{r, s}.$$

OSSERVAZIONE: La formula precedente permette, per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}^{r, s}$ , di definire  $\widehat{T}$  ponendo:

$$\widehat{T} = \begin{cases} T & \text{su } U \\ 0 & \text{su } \mathbb{C}^n - U. \end{cases}$$

Sia  $S^{n-r, n-s}$  il prefascio che associa ad ogni aperto relativamente compatto  $U$  di  $\mathbb{C}^n$  lo spazio  $S^{n-r, n-s}(\bar{U})$  con le applicazioni naturali di restrizione. Indicheremo con  $T^{n-r, n-s}$  un elemento di  $S^{n-r, n-s}$ .

L'operatore  $\bar{\delta}$  di differenziazione esterna delle forme differenziali rispetto alle variabili complesse coniugate si estende alle distribuzioni mediante la formula:

$$T^{h,k}[\varphi] = (-1)^{h+k+1} T^{h,k}[\bar{\delta}\varphi].$$

Posto  $t = n - r$ , sia  $\Sigma^{t,0}(\bar{U}) = \{T^{t,0} \in S^{t,0}(\bar{U}) \mid \bar{\delta}T^{t,0}[\varphi] = 0\}$  lo spazio delle forme differenziali di tipo  $(t, 0)$  olomorfe appartenenti a  $S^{t,0}(\bar{U})$ . Gli elementi di  $\Sigma^{t,0}(\bar{U})$  sono cioè quelle forme differenziali  $\psi_{\alpha\bar{\beta}}^{t,0} \in \Gamma(U, \Omega^t, {}^1)$  tali che per ogni forma  $\varphi^{r,n} \in \mathcal{D}^{r,n}(\bar{U})$  esistono  $\alpha, \bar{\beta} \in N^n$  per cui l'integrale:

$$\sum_{|\alpha|+|\bar{\beta}| \leq m} \int_{\bar{U}} \psi_{\alpha\bar{\beta}}^{t,0} \wedge D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi^{r,n},$$

risulta convergente.

Dimostreremo il seguente:

**TEOREMA:** Sia  $U = \{z \in C^n \mid \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i \leq 1\}$ . La successione:

$$0 \rightarrow \Sigma^{t,0}(\bar{U}) \rightarrow S^{t,0}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\delta}} S^{t,1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\delta}} \dots \xrightarrow{\bar{\delta}} S^{t,n-1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\delta}} S^{t,n}(\bar{U}) \rightarrow 0,$$

è esatta.

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo alcune considerazioni.

### 3. Forme differenziali a supporto compatto.

$\alpha)$  Sia  $ds^2 = \sum_{i=1}^n dz_i d\bar{z}_i$ , la metrica su  $C^n$  e sia:

$$* : C^{r,s} \rightarrow C^{n-s,n-r},$$

l'operatore di aggiunzione rispetto a tale metrica.

<sup>1)</sup>  $\Gamma$  indica, come d'uso, il funtore "sezioni";  $\Omega^t$  il fascio dei germi delle forme differenziali di grado  $t$ , olomorfe su  $C^n$ .

Sia poi:

$$\partial : \mathbb{C}^{r,s} \rightarrow \mathbb{C}^{r,s-1},$$

l'operatore definito da:

$$\partial\varphi = - * \partial * \varphi,$$

ove  $\partial$  è l'operatore di differenziazione esterna rispetto alle coordinate complesse.

Consideriamo anche l'operatore:

$$\square : \mathbb{C}^{r,s} \rightarrow \mathbb{C}^{r,s},$$

espresso dalla formula:

$$\square\varphi = \bar{\partial}\partial\varphi + \partial\bar{\partial}\varphi.$$

Rispetto alla struttura reale del  $\mathbb{C}^n$  si ha:

$$\square\varphi = \frac{1}{2} \Delta\varphi,$$

$\Delta$  essendo l'operatore di Laplace.

$\beta$ ) Sia  $\varphi^{r,s} \in \mathcal{D}'_m(\bar{U})$ ; in  $\mathbb{C}^n$  è possibile determinare una forma  $\varphi$  tale che  $\square\varphi = \varphi$ .

Siano  $z$  e  $\zeta$  un punto fissato ed una variabile in  $\mathbb{C}^n$ ; posto  $d(z, \zeta) = \left( \sum_{i=1}^n (z_i - \zeta_i)(\bar{z}_i - \bar{\zeta}_i) \right)^{1/2}$  e indicata con  $\varphi_{\alpha\bar{\beta}}$  una delle funzioni  $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_s}$ , sia:

$$V_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\varphi_{\alpha\bar{\beta}}(\zeta)}{(d(z, \zeta))^{2n-2}} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_n.$$

Risulta:

$$\Delta V_{\alpha\bar{\beta}}(z) = c\varphi_{\alpha\bar{\beta}},$$

con  $c$  costante positiva. Si ha quindi:

$$\varphi_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{c} \Delta V_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{2}{c} \square V_{\alpha\bar{\beta}}.$$

Posto allora:

$$\psi = \sum_{\alpha\beta} \frac{2}{c} V_{\alpha\beta} dz_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_{\alpha_r} \wedge \bar{d}\bar{z}_{\beta_1} \wedge \dots \wedge \bar{d}\bar{z}_{\beta_n},$$

ne segue  $\varphi = \square\psi$ .

$\gamma$ ) Mostriamo ora che  $V_{\alpha\beta} \in L^2(C^n)$ , spazio delle funzioni di quadrato integrabile su  $C^n$ . Per semplicità di notazioni scriviamo  $V(z)$ ,  $\varphi(z)$  anziché  $V_{\alpha\beta}(z)$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}(z)$  e poniamo  $d\omega = d\zeta_1 \wedge \bar{d}\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge \bar{d}\bar{\zeta}_n$ .

Si ha:

$$|V(z)| \leq \int_{C^n} \frac{|\varphi(\zeta)|}{(d(z, \zeta))^{2n-2}} d\omega = \int_{\text{Supp } \varphi} \frac{|\varphi(\zeta)|}{(d(z, \zeta))^{2n-2}} d\omega.$$

Poichè  $d(z, \zeta) \geq d(z, \text{Supp } \varphi)$  si ha:

$$\int_{\text{Supp } \varphi} \frac{|\varphi(\zeta)|}{(d(z, \zeta))^{2n-2}} d\omega \leq \frac{1}{(d(z, \text{Supp } \varphi))^{2n-2}} \int_{\text{Supp } \varphi} |\varphi(\zeta)| d\omega.$$

Quindi:

$$|V(z)|^2 \leq c_\varphi \frac{1}{(d(z, \text{Supp } \varphi))^{4n-4}},$$

con  $c_\varphi$  costante.

Ora:

$$\int_{C^n} |V(z)|^2 d\omega = \int_{|z|<1} |V(z)|^2 d\omega + \int_{C^n - \{|z|<1\}} |V(z)|^2 d\omega;$$

trascurando l'integrale su  $|z| < 1$  che è limitato, è sufficiente considerare il secondo integrale quando  $z$  è fuori del  $\text{Supp } \varphi$ . In tal caso

$$\frac{1}{(d(z, \text{Supp } \varphi))^{4n-4}},$$

si comporta come  $\frac{1}{|z|^{4n-4}}$  e non c'è che da calcolare:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{|z|^{4n-4}} d|z| = \frac{1}{4n-5},$$

e ciò mostra che  $\int_{C^n} |V(z)|^2 d\omega < +\infty$ .

δ) Sia  $\varphi^{r,s} \in \mathcal{D}_m^{r,s}(\bar{U})$ ,  $\bar{\partial}\varphi^{r,s} = 0$ ,  $\varphi^{r,s} = \bar{\partial}\vartheta\psi + \vartheta\bar{\partial}\psi$ . Poichè la metrica  $ds^2 = \sum_{i=1}^n dz_i d\bar{z}_i$  è completa, in virtù di un lemma di Stampacchia si ha intanto  $\vartheta\bar{\partial}\psi = 0$ ; ne segue che:

$$\varphi = \bar{\partial}\vartheta\psi.$$

Posto  $\vartheta\psi = \eta$  si ha  $\varphi = \bar{\partial}\eta$  su  $\mathbf{C}^n$  e  $\bar{\partial}\eta = 0$  su  $\mathbf{C}^n - U$ .

LEMMA 2: Sia  $\varphi_m^{r,s} \in \mathcal{D}_m^{r,s}(\bar{U})$ ,  $\bar{\partial}\varphi_m^{r,s} = 0$ . Per  $1 \leq s \leq n-1$  esiste una forma  $\sigma^{r,s-1} \in \mathcal{D}_m^{r,s-1}(\bar{U})$  tale che  $\bar{\partial}\sigma^{r,s-1} = \varphi_m^{r,s}$ .

DIMOSTRAZIONE: Indicato con  $A^{r,s}$  il fascio dei germi delle forme differenziali di tipo  $(r, s)$ ,  $C^\infty$  su  $\mathbf{C}^n$ , si ha la successione esatta:

$$(1) \quad 0 \rightarrow \Omega^r \rightarrow A^{r,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n} \rightarrow 0.$$

Posto  $\Omega_s^{r,s-1} = \{\varphi \in A^{r,s-1} \mid \bar{\partial}\varphi = 0\}$  si ha ancora una successione esatta:

$$(2) \quad 0 \rightarrow \Omega_s^{r,s-1} \rightarrow A^{r,s-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,s} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n} \rightarrow 0.$$

Dalle (1), (2) passando alla coomologia a supporti compatti si ha:

$$(1') \quad 0 \rightarrow \Gamma_k(U, \Omega^r) \rightarrow \Gamma_k(U, A^{r,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n-1}) \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n}) \rightarrow 0;$$

$$(2') \quad 0 \rightarrow \Gamma_k(U, \Omega_s^{r,s-1}) \rightarrow \Gamma_k(U, A^{r,s-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,s}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n}) \rightarrow 0.$$

Ne segue:

$$H_k^s(U, \Omega^r) = H_k^s(U, \Omega_s^{r,s-1}) = \text{Ker} (\Gamma_k(U, A^{r,s}) \rightarrow \Gamma_k(U, A^{r,s+1})) \mid \bar{\partial} \Gamma_k(U, A^{r,s-1}).$$

Dalla inclusione  $U \subset \mathbf{C}^n$  si ottiene poi la successione esatta:

$$0 \rightarrow H_k^s(U, \Omega_s^{r,s-1}) \rightarrow H^0(\mathbf{C}^n, \Omega_s^{r,s-1}) \xrightarrow{j} H^0(\mathbf{C}^n - U, \Omega_s^{r,s-1}) \rightarrow$$



$$H_k^1(U, \Omega_r^{s, s-1}) \rightarrow \dots^2).$$

Poichè  $U$  è convesso, per  $s \leq n - 1$ , risulta  $H_k^s(U, \Omega^r) = 0$  e ciò prova che l'applicazione  $j$  è surgettiva. Per  $s \leq n - 1$  esiste allora una forma  $\widehat{\eta}$  su  $C^n$  tale che  $\widehat{\eta}|_{C^n - U} = \eta$ ,  $\bar{\partial}\eta = 0$  su  $C^n$ . Posto allora  $\sigma = \eta - \widehat{\eta}$  si ha:

$$\bar{\partial}\sigma = \bar{\partial}\eta = \varphi,$$

e

$$\text{Supp } \sigma \subset U.$$

Mostriamo ora che la forma  $\sigma \in \mathcal{D}_m^{s, s-1}(\bar{U})$ . Con le notazioni di  $\beta$ ), posto  $K(z - \zeta) = 1 / (d(z, \zeta))^{2n-2}$  si ha:

$$V(z) = \int_{C^n} K(z - \zeta) \varphi(\zeta) d\omega.$$

Posto  $z - \zeta = u$  si ha:

$$V(z) = \int_{C^n} K(u) \varphi(z - u) du,$$

avendo posto  $du = du_1 \wedge d\bar{u}_1 \wedge \dots \wedge du_n \wedge d\bar{u}_n$ .

Poichè  $\varphi \in \mathcal{D}_m^{0,0}(C^n)$  ne segue che  $V \in \mathcal{D}_m^{0,0}(C^n)$ . Si ha quindi:

$$D^m V(z) = \int_{C^n} K(u) D^m \varphi(z - u) du = \int_{C^n} K(z - \zeta) D^m \varphi(\zeta) d\omega.$$

---

<sup>2)</sup> Sia  $\mathcal{F}$  un fascio su  $C^n$ ;  $U$  un aperto relativamente compatto in  $C^n$ . Posto  $\mathcal{F}_U = \mathcal{F}|_U \cup \{0\}$  si ha la successione esatta di fasci su  $C^n$ :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_U \rightarrow 0,$$

da cui segue:

$$\dots \rightarrow H^i(C^n, \mathcal{F}_U) \rightarrow H^i(C^n, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(C^n, \mathcal{F}/\mathcal{F}_U) \rightarrow H^{i+1}(C^n, \mathcal{F}_U) \rightarrow \dots$$

e poichè:

$$\begin{aligned} H^i(C^n, \mathcal{F}_U) &\simeq H_k^i(U, \mathcal{F}), \\ H^i(C^n, \mathcal{F}/\mathcal{F}_U) &\simeq H^i(C^n - U, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

si ha:

$$\dots \rightarrow H_k^i(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(C^n, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(C^n - U, \mathcal{F}) \rightarrow H_k^{i+1}(U, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Considerando ora la derivata:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} D^m V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} \frac{\partial K(z - \zeta)}{\partial z_i} D^m \varphi(\zeta) d\omega,$$

appare che  $V(z) \in \mathcal{C}_{m+1}^{0,0}(\mathbf{C}^n)$ . Ne segue che la forma  $\varphi^{r,s} \in \mathcal{C}_{m+1}^{r,s}(\mathbf{C}^n)$  e quindi la forma  $\eta = \vartheta\psi \in \mathcal{D}_m^{r,s-1}(\bar{U})$ . Ciò completa la prova del lemma.

#### 4.

Osservato che  $\mathcal{D}^{r,s}(\bar{U}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{D}_m^{r,s}(\bar{U})$  si consideri la successione:

$$\dots \rightarrow \mathcal{D}^{r,s-1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{s-1}} \mathcal{D}^{r,s}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}_s} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-2}} \mathcal{D}^{r,n-1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} \mathcal{D}^{r,n}(\bar{U}) \rightarrow 0.$$

In virtù del lemma 2 questa successione è esatta ovunque fuorchè in  $\mathcal{D}^{r,n}(\bar{U})$ . Mostriamo però che  $\bar{\partial}_{n-1}$  è un omomorfismo topologico. Ciò risulta dal seguente:

LEMMA 3: *Sia  $\varphi^{r,n} \in \mathcal{D}^{r,n}(\bar{U})$ . Condizione necessaria e sufficiente perchè risulti  $\varphi^{r,n} = \bar{\partial}\sigma^{r,n-1}$  con  $\sigma^{r,n-1} \in \mathcal{D}^{r,n-1}(\bar{U})$ , è che per ogni forma  $u^{n-r,0}$  tale che  $\bar{\partial}u^{n-r,0} = 0$ , si abbia:*

$$\int_{\mathbf{C}^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: La condizione è necessaria. Sia infatti  $\varphi^{r,n} = \bar{\partial}\sigma^{r,n-1}$  con  $\sigma^{r,n-1} \in \mathcal{D}^{r,n-1}(\bar{U})$ . Per ogni forma  $u^{n-r,0}$  a supporto qualsiasi, tale che  $\bar{\partial}u^{n-r,0} = 0$ , si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} &= \int_{\mathbf{C}^n} u^{n-r,0} \wedge \bar{\partial}\sigma^{r,n-1} = \int_{\mathbf{C}^n} \bar{\partial}(u^{n-r,0} \wedge \sigma^{r,n-1}) = \\ &= \int_{\mathbf{C}^n} d(u^{n-r,0} \wedge \sigma^{r,n-1}) = \int_{\partial U} u^{n-r,0} \wedge \sigma^{r,n-1} = 0, \end{aligned}$$

poichè  $\sigma|_{\partial U} = 0$ .

La condizione è sufficiente. Supponiamo che per ogni forma  $u^{n-r,0}$  a supporto qualsiasi, tale che  $\bar{\partial}u^{n-r,0} = 0$ , risulti  $\int_{\mathbf{C}^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} = 0$ .

Consideriamo la successione esatta:

$$0 \rightarrow \Omega_*^{n-r,0} \xrightarrow{i} A^{n-r,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_0} A^{n-r,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_1} A^{n-r,2} \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \dots$$

dalla quale si ottiene la successione:

$$0 \rightarrow \Gamma(C^n, \Omega_*^{n-r,0}) \xrightarrow{i} \Gamma(C^n, A^{n-r,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}_0} \Gamma(C^n, A^{n-r,1}) \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \Gamma(C^n, A^{n-r,2}) \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \dots$$

Considerando  $\varphi^{r,n}$  come una distribuzione:

$$\varphi^{r,n}[u] = \int_{C^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n},$$

si ha, per ipotesi,  $\varphi^{r,n}[u] = 0$  su  $i\Gamma(C^n, \Omega_*^{n-r,0})$ . Cioè  $\varphi^{r,n}$  è un funzionale lineare continuo sullo spazio di Fréchet  $\Gamma(C^n, A^{n-r,0})|i\Gamma(C^n, \Omega_*^{n-r,0})$ .

Poichè  $H^1(C^n, \Omega_*^{n-r,0}) = 0$  si ha  $\text{Im } \bar{\partial}_0 = \text{Ker } \bar{\partial}_1$ . Allora per il teorema di Banach,  $\bar{\partial}_0$  è un omomorfismo; ne segue che:

$$\bar{\delta} : \Gamma(C^n, A^{n-r,0})|i\Gamma(C^n, \Omega_*^{n-r,0}) \rightarrow \bar{\delta}\Gamma(C^n, A^{n-r,0}),$$

è un isomorfismo topologico.

Quindi  $\varphi^{r,n}$  definisce un funzionale lineare continuo su  $\bar{\delta}\Gamma(C^n, A^{n-r,0})$ . Allora per il teorema di Han-Banach,  $\varphi^{r,n}$  si estende ad un funzionale lineare continuo:

$$\beta : \Gamma(C^n, A^{n-r,1}) \rightarrow C,$$

tale che:

$$\beta[\bar{\delta}u] = \varphi[u].$$

Si ha perciò per definizione,

$$\varphi = \bar{\delta}\beta,$$

$\beta$  essendo una distribuzione a supporto compatto; esiste perciò una forma  $\eta^{r,n-1} \in \mathcal{D}^{r,n-1}(C^n)$  tale che  $\varphi = \bar{\delta}\eta$ . Inoltre col ragionamento di  $\gamma$ ) si riconosce che dato comunque un intorno  $V$  di  $\bar{U}$  si può supporre che sia  $\text{Supp } \eta \subset V$ .

Per completare la dimostrazione del lemma resta da mostrare che esiste una forma  $\sigma^{r,n-1} \in \mathcal{D}^{r,n-1}(\bar{U})$ , tale che  $\bar{\delta}\sigma^{r,n-1} = \varphi^{r,n}$  e ciò segue da un risultato di J. J. Kohn e H. Rossi [1].

**5. Dimostrazione del teorema.**

Poniamo  $D^{r,n}(\bar{U}) = \text{Im } \bar{\delta}_{n-1}$ , cioè:

$$D^{r,n}(\bar{U}) = \left\{ \varphi^{r,n} \in \mathfrak{D}^{r,n}(\bar{U}) \mid \forall u^{n-r,0}, \bar{\delta}u^{n-r,0} = 0, \int_{\mathbb{C}^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} = 0 \right\}.$$

$D^{r,n}(\bar{U})$  è uno spazio di Fréchet in quanto sottospazio chiuso dello spazio di Fréchet  $\mathfrak{D}^{r,n}(\bar{U})$ . Si ha quindi la successione esatta di spazi di Fréchet e omomorfismi:

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{D}^{r,0}(\bar{U}) \rightarrow \mathfrak{D}^{r,1}(\bar{U}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{D}^{r,n-1}(\bar{U}) \rightarrow D^{r,n}(\bar{U}) \rightarrow 0.$$

Sia  $G^{n-r,0}(\bar{U}) = (D^{r,n}(\bar{U}))'$  il duale di  $D^{r,n}(\bar{U})$ ; poichè  $D^{r,n}(\bar{U})$  è un sottospazio chiuso di  $\mathfrak{D}^{r,n}(\bar{U})$ , per il teorema di Han-Banach  $G^{n-r,0}(\bar{U})$  è un quoziente di  $S^{n-r,0}(\bar{U})$ .

Poichè il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}^{r,n-1}(\bar{U}) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & D^{r,n}(\bar{U}) \rightarrow 0 \\ & \searrow \bar{\delta} & \downarrow \iota \\ & & \mathfrak{D}^{r,n}(\bar{U}) \end{array}$$

è commutativo, ne segue che nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{cccc} S^{n-r,0}(\bar{U}) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & S^{n-r,1}(\bar{U}) & \rightarrow S^{n-r,2}(\bar{U}) \rightarrow \dots \\ \iota_i \downarrow & & \uparrow \iota_j & \\ G^{n-r,0}(\bar{U}) & & & \nearrow \end{array}$$

la successione orizzontale è esatta, poichè  $\iota_i$  è surgettiva.

Posto allora (come al n. 3)  $\Sigma^{n-r,0} = \{ \alpha \in S^{n-r,0} \mid \bar{\delta}\alpha = 0 \}$  si ha la successione esatta:

$$0 \rightarrow \Sigma^{t,0}(\bar{U}) \xrightarrow{\iota} S^{t,0}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\delta}} S^{t,1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\delta}} \dots \xrightarrow{\bar{\delta}} S^{t,n-1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\delta}} S^{t,n}(\bar{U}) \rightarrow 0,$$

duale della (3). Ciò prova il teorema.

## 6.

Posto  $S^{0,i} = S^{0,i}(\bar{U})$  definiamo:

$$h^i(U) = \text{Ker} (\Gamma(U, S^{0,i}) \rightarrow \Gamma(U, S^{0,i+1})) \big| \bar{\partial} \Gamma(U, S^{0,i-1}).$$

Utilizzando ora le notazioni e i risultati di [3] si può scrivere il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & h^i(U) & \rightarrow & h^i(U - \{0\}) & \rightarrow & h^{i+1}(U/U - \{0\}) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \dots & \rightarrow & H^i(U, \mathcal{O}) & \rightarrow & H^i(U - \{0\}, \mathcal{O}) & \rightarrow & H^{i+1}(U/U - \{0\}, \mathcal{O}) \rightarrow \dots \end{array}$$

dove  $H^i(-, \mathcal{O})$  è definito mediante una risoluzione del fascio  $\mathcal{O}$  in distribuzioni (non di ordine finito) e le applicazioni  $\alpha, \beta, \gamma$  sono indotte dalle rispettive applicazioni di complessi.

La nostra affermazione dell'introduzione segue ora immediatamente.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] KOHN J. J. e ROSSI H.: *On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold*. Annals of Mathematics, pag. 451-472 (1965).
- [2] MAGENES E. e STAMPACCHIA G.: *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*. Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa, 1958, 3, 12.
- [3] SCHWARTZ L.: *Théorie des distributions*. Vol. 1.
- [4] SORANI G.: *Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe*. Atti Acc. Naz. dei Lincei, 1965, XXXIX, 161-166.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 maggio 1966.