RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

Su alcuni problemi di ordinamento

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 146-213

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__146_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SU ALCUNI PROBLEMI DI ORDINAMENTO

di EDMONDO MORGANTINI (*a Padova*) *)

Premessa.

Nelle pagine seguenti si discutono gli aspetti matematici di alcune questioni di ordinamento inerenti alla ricerca operativa.

Si immagini un gruppo di n « utenti » a^j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ che attendano di essere « serviti » da un insieme finito ed ordinato di m « sportelli » a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ di un certo « ufficio ». Supponiamo che ogni utente si debba presentare successivamente al 1°, 2°, ..., m° sportello. Inoltre siano noti i tempi parziali a_{ij} di servizio, ossia l'intervallo di tempo a_{ij} occorrente allo sportello a_i per servire l'utente a^j. In a_{ij} si può pensare conglobato anche l'intervallo di tempo occorrente ad a^j per trasferirsi dallo sportello a_{i-1} a quello a_i ed allo sportello a_i per passare dalla « pratica » dell'utente a^{j-1} a quella di a^j. È lo stesso supporre che tali intervalli di tempo siano trascurabili, o costanti. Si supponga inoltre che gli n utenti si debbano presentare nello stesso ordine di fronte a ciascuno degli m sportelli. Non siano cioè ammessi « scavalcamenti ».

Si presenta allora il *problema di determinare quest'ordine*, ossia di disporre il gruppo degli n utenti in una fila ordinata $a^1, a^2, \ldots, a^n$, e ciò *allo scopo di rendere minimo il tempo totale di servizio*, ossia l'intervallo di tempo v intercorrente tra l'istante in cui il 1° utente a^1 si presenta di fronte al 1° sportello e l'istante in cui l'ultimo utente a^n abbandona, essendone stato servito, l'ultimo sportello a_m.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico dell'Università, Padova.

* * *

La parte III (nn. 12-20) del presente lavoro è dedicata a questo problema di ordinamento ottimale. La sua risoluzione presuppone che si sappia calcolare speditamente il tempo totale di servizio v, fissati che siano l'ordine degli utenti, quello degli sportelli e la matrice $A = (a_{ij})$ dei tempi parziali di servizio.

A tale problema preliminare e ad altri equivalenti è dedicata la parte I (nn. 1-7) della Memoria, che ne fornisce una impostazione ed una risoluzione matematica originali, vagamente ispirate al P.E.R.T. [1]).

Nel n. 8 della parte II (dedicata alla interpretazione operativa della parte I) si dimostra infatti che v coincide col « valore » massimo delle « traiettorie » da (1,1) ad (m, n) nella « grafo-matrice » $A = (a_{ij})$. Queste nozioni vengono poste nei nn. 1,2 della parte I. Sempre nella parte I si descrivono più procedimenti (uno « in avanti », l'altro « all'indietro », altri « misti ») adatti alla determinazione delle traiettorie di valore massimo della A ed al calcolo del loro valore (nn. 3, 4, 5).

Il problema analogo per le traiettorie di valore minimo è equivalente a quello relativo alle traiettorie di valore massimo (nn. 2, 7). Per entrambi questi problemi è indifferente scambiare le righe con le colonne (ossia l'ufficio degli utenti con quello degli sportelli), oppure invertire contemporaneamente il loro ordinamento (nn. 2, 8). Solo se la A è « pseudocircolante », tutte le sue traiettorie hanno lo stesso valore (n. 6).

* * *

Nella ricerca operativa hanno interesse anche i tempi parziali o totali di « riposo » degli sportelli e quelli di « attesa » degli utenti. Infatti può accadere che lo sportello a_i abbia già servito l'utente a^{k-1} e debba « riposare » per un intervallo di tempo d_{ik}, in attesa che l'utente a^k sia stato servito da a_{i-1}. Oppure che l'utente a^k, già servito dallo sportello a_{i-1}, debba « attendere » per un intervallo di tempo e_{ik} prima che lo sportello a_i termini il servizio di a^{k-1}.

Nella parte II si fa anche vedere come le matrici B, C dei procedimenti in avanti e rispettivamente all'indietro sopra ricordati consentano facilmente (nn. 9, 10) la costruzione delle matrici D, E; D', E' dei tempi parziali di « pre-riposo » e « pre-attesa », « post-riposo » e « post-attesa »

---

[1]) Cfr. ad es. i lavori citati ai nn. [7], [8], [9], [10], [12] della Bibliografia posta alla fine della Memoria.

ed il calcolo dei tempi totali i riposo (per alcuni o per tutti gli sportelli) o di attesa (per alcuni o per tutti gli utenti). Solo se la A è pseudo-circolante, sono nulli tutti i tempi di pre-riposo e di pre-attesa successivi al primo. I valori di questi intervalli di tempo dipendono essenzialmente dall'ordine crescente o decrescente dei valori degli elementi sulle diagonali secondarie della B, e quindi della A.

La parte II della Memoria termina con la formulazione di alcuni problemi di ordinamento ottimale delle colonne della g-matrice A, derivanti dalla sua interpretazione operativa (n. 11).

* * *

La considerazione delle traiettorie della g-matrice A e la interpretazione operativa del loro valor massimo v consentono di determinare delle limitazioni inferiori per i diversi valori di v corrispondenti ai diversi possibili ordinamenti (degli utenti, cioè) delle colonne della A. Ne consegue (n. 12) un criterio sufficiente per riconoscere se un dato ordinamento sia « ottimale », cioè di minimo valor massimo.

Per $m = 2$, ossia quando vi sono due soli sportelli, Johnson [1] e Bellman [2] [2]) hanno fornito e giustificato una comoda regola per l'ordinamento ottimale (degli n utenti, cioè) delle n colonne della A (n. 13). La considerazione geometrica delle traiettorie fornisce già una giustificazione intuitiva della regola di Johnson. Non si conosce una regola generale analoga per $m > 2$ (ed $n > 2$). Comunque, se si considerano « adiacenti » (in senso « stretto » o « lato ») due permutazioni differenti per un solo scambio (tra colonne adiacenti o rispettivamente anche non adiacenti), nell'insieme I_1 delle $n!$ permutazioni delle colonne ed in relazione alla struttura derivante da tale nozione di adiacenza, si possono considerare (n. 14) i punti di minimo « relativo » per v (in senso stretto o lato).

Si verifica facilmente che l'ordinamento di Johnson è di minimo relativo in senso lato (nn. 15, 16). La considerazione (n. 17) della eventuale ottimalità degli ordinamenti delle colonne delle sub-matrici di una g-matrice ottimale, rende ragione della eccezionalità del caso $m = 2$ (due soli sportelli) e della minimalità assoluta dell'ordinamento di Johnson. La regola di Johnson si può infatti pensare ottenuta (per $m = 2$) da un criterio ottimale di ordinamento per g-matrici con due sole colonne (n. 18), tenuto

---

[2]) I numeri tra parentesi quadra rinviano alla bibliografia posta alla fine del lavoro.

conto della transitività di questo criterio per $m = 2$ e della circostanza che in generale solo per $m = 2$ l'ottimalità dell'ordinamento delle colonne della A si può ricondurre all'ottimalità dell'ordinamento delle colonne delle sue sub-matrici.

La stessa considerazione geometrica delle traiettorie di valore massimo della A fa vedere (n. 19) come alcuni scambi fra colonne non possano diminuire v. Sicchè, per $m > 2$ ed assunto ad esempio come ordinamento iniziale delle colonne quello A derivante dal criterio (del n. 18) di ordinamento ottimale delle submatrici con due sole colonne, si può istituire (n. 20) un procedimento atto a riconoscere abbastanza speditamente se A è di minimo relativo per v. Se non lo è, lo stesso procedimento diviene ricorrente e conduce facilmente ad un ordinamento di minimo relativo in senso stretto.

* * *

Nell'Appendice (nn. 21-28) si fa vedere come le questioni di ordinamento non siano più essenziali nel caso in cui la g-matrice A si identifichi con la tabella dei tempi parziali di « lavorazione » di un ciclo di n « articoli » da parte di una catena di m « macchine », in un processo produttivo *continuo*.

Si dimostra infatti come, data la A, indipendentemente dall'ordinamento delle sue colonne, si possa sempre regolare l'andamento della produzione di un siffatto, impianto industriale in modo da render massima la « velocità di produzione » e minimi i tempi di « inattività » delle macchine. Ciò ad esempio si ottiene col metodo dell' « articolo fittizio » (n. 24), oppure ripartendo i tempi totali minimi di inattività delle macchine e di attesa degli articoli (nn. 27, 28).

Dell'ordinamento degli articoli (e della ripartizione dei tempi suddetti) si può profittare solo per diminuire i tempi di attesa degli articoli stessi (n. 26).

Come velocità di produzione o di lavorazione si interpretano i reciproci dei massimi t o rispettivamente u delle somme v_i degli elementi delle righe o rispettivamente di quelle u_j delle colonne della A. L'invarianza di queste somme per una permutazione delle (righe o) colonne della A consente di definire i tempi totali minimi $d_i = t - v_i$ di inattività delle macchine ed i tempi totali minimi $e_j = u - u_j$ di attesa degli articoli. La catena di produzione si dice poi « equilibrata », se $\Sigma_i d_i = \Sigma_j e_j$, ossia se coincidono le velocità « totali » di produzione e di lavorazione (n. 28).

* * *

I titoli dei vari paragrafi, riportati nel seguente sommario, possono chiarire ulteriormente al Lettore l'ordine in cui i diversi argomenti vengono trattati.

SOMMARIO

Parte I

Sulle traiettorie di valor massimo o minimo di una grafo-matrice reale

1. Traiettorie di una grafo-matrice reale.
2. Traiettorie di valore massimo o minimo. Operazioni che non le alterano, oppure le scambiano. Trasposizione.
3. Procedimento in avanti, per la costruzione delle traiettorie di valore massimo.
4. Procedimento all'indietro. Esempî.
6. G-matrici pseudo-circolanti.
7. Traiettorie di valore minimo e loro costruzione.

Parte II

Interpretazione operativa e problemi di ordinamento ottimale

8. Interpretazione delle questioni precedenti nella ricerca operativa.
9. Il procedimento in avanti e le matrici dei tempi parziali di pre-riposo degli sportelli e di pre-attesa degli utenti.
10. Il procedimento all'indietro e le matrici dei tempi di post-attesa e di post-riposo.
11. Problemi di ordinamento ottimale, in relazione al valore delle traiettorie. Esempî e controesempî.

Parte III

Sugli ordinamenti delle colonne corrispondenti ad un minimo del valore massimo delle traiettorie

12. Limitazioni per i valori ottimali e conseguenti criterî di ottimalità per l'ordinamento delle colonne. Esempî.
13. Regola di Bellman-Johnson, per $m = 2$.
14. Scambi tra due colonne; g-matrici adiacenti; minimi relativi del valor massimo delle traiettorie. Esempî.
15. Scambi tra colonne, diminuenti il valor massimo delle traiettorie, per $m = 2$.
16. Minimalità relativa, in senso lato, dell'ordinamento di Johnson-Bellman.
17. Sub-g-matrici ottimali di una g-matrice ottimale.
18. Un criterio di ordinamento ottimale per matrici di due colonne.

19. Scambî tra colonne che certamente non diminuiscono il valor massimo delle traiettorie, per $m > 2$.
20. Procedimento per ottenere un ordinamento relativamente minimale delle colonne.

Appendice

Sui problemi di ordinamento nell'organizzazione di un impianto industriale

21. La g-matrice A dei tempi parziali di lavorazione.
22. Problemi di ordinamento ottimale nell'organizzazione dell'impianto, per la produzione di un solo ciclo di articoli.
23. Il tempo di uscita di un ciclo, nel caso di un numero illimitato di cicli successivi ed uguali.
24. Analogia idraulica e minimizzazione del tempo di uscita, regolando l'andamento della produzione con l'artificio dell'articolo fittizio. Esempio.
25. Alcuni accorgimenti adatti e problemi da risolvere per migliorare il rendimento dell'impianto.
26. L'ordinamento degli articoli può diminuire solo i loro tempi di attesa.
27. Regolazione della produzione, con ripartizione dei tempi totali minimi di inattività delle macchine e di attesa degli articoli.
28. Condizioni di equilibrio occorrenti per la ripartizione suddetta. Esempio.

Bibliografia.

PARTE I

SULLE TRAIETTORIE DI VALOR MASSIMO O MINIMO DI UNA GRAFO-MATRICE REALE

1. Traiettorie di una grafo-matrice reale.

È data una matrice del tipo $m \times n$, ad elementi reali non negativi:

$$A = (a_{ik}), \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Le sue righe e le sue colonne possono pensarsi orientate, assumendo come positivo il verso in cui ci si muove (da sinistra a destra) lungo una riga al crescere del secondo indice, o rispettivamente lungo una colonna (dall'alto al basso) al crescere del primo indice. La matrice (1.1) assume così l'aspetto di un « grafo », che diremo *grafo-matrice* (brevemente *g-matrice*), nei cui $m \cdot n$ *vertici* (i, k) sono depositati i *valori* a_{ik} degli elementi della matrice data.

Lati del grafo sono gli $(m - 1) \cdot (n - 1)$ segmenti *orientati* di riga o di colonna che congiungono ogni vertice (i, k) col *successivo* $(i, k + 1)$ o rispettivamente $(i + 1, k)$.

Partendo dal *vertice iniziale* (1,1) e muovendosi lungo i lati, ossia lungo le righe da sinistra a destra e lungo le colonne dall'alto al basso, si può pervenire al *vertice finale* (m, n) percorrendo

$$I_{m,n} = \binom{m + n - 2}{n - 1} = \binom{n + m - 2}{m - 1} = I_{n,m}, \tag{1.2}$$

diverse *traiettorie*, ciascuna di esse contenendo lo stesso numero $m + n - 1$ di vertici, e (quindi anche) lo stesso numero $m + n - 2$ di lati.

La simmetria della (1.2) rispetto ai due indici m, n traduce la circostanza che: *uno scambio delle righe con le colonne induce una corrispondenza biunivoca fra le traiettorie della g-matrice data e quelle della sua trasposta.*

Che tutte le traiettorie posseggano lo stesso numero di vertici è evidente, giacchè ognuna di esse si può ad esempio pensare dedotta dalla traiettoria τ che segue la prima riga e l'ultima colonna (e possiede perciò

$n + m - 1$ vertici) con una successione finita di trasformazioni elementari (*ripiegamenti*) analoghe a quella che sostituisce alla τ la traiettoria τ' contenente, invece del vertice $(1, n)$, quello $(2, n-1)$, (vedi fig. 1.1).

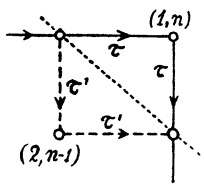


Fig. 1.1

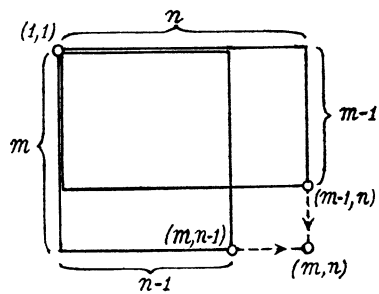


Fig. 1.2

Per dimostrare la (1.2) si può procedere per induzione. Intanto è facile verificare direttamente che per qualsiasi valore del numero naturale p si ha:

$$I_{p,1} = I_{1,p} = 1, \qquad I_{p,2} = I_{2,p} = p, \tag{1.3}$$

come appunto vuole la (1.2). Inoltre si verifica immediatamente sullo schema della fig. 1.2, che si ha:

$$I_{m,n} = I_{m-1,n} + I_{m,n-1}. \tag{1.4}$$

Sicchè, avendo constatato che la (1.2) sussiste per i valori 1,2 di uno dei due indici, ed ammesso che la stessa (1.2) sussista per valori del primo indice inferiori ad m o per valori del secondo indice inferiori ad n, si ha, c. v. d.:

$$I_{m,n} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2} =$$

$$= \frac{(n+m-3)!}{(n-2)!\,(m-2)!}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right) = \frac{(m+n-2)!}{(n-1)!\,(m-1)!} =$$

$$= \binom{m+n-2}{n-1}.$$

2. Traiettorie di valore massimo o minimo. Operazioni che non le alterano, oppure le scambiano. Trasposizione.

Chiameremo *valore di una traiettoria* $(a_{11}, \ldots, a_{mn})$ la somma $a_{11} + \ldots + a_{mn}$ dei valori depositati nei suoi $m + n - 1$ vertici.

Vogliamo ora occuparci del seguente

PROBLEMA I: *Tra tutte le $I_{m,n}$ traiettorie possibili, determinare quella* (o quelle) *di valore massimo.*

Conviene premettere le seguenti osservazioni:

OSSERVAZIONE I: È evidente che l'*addizione algebrica di una costante reale k* a tutti i valori dei vertici di una g-matrice A non altera le sue traiettorie di valore massimo. Invece viene aumentato di $(n + m - 1)k$ il loro valore.

Ciò permette di supporre (come abbiamo già fatto) che tutti i vertici della g-matrice A abbiano valore a_{ik} non negativo, oppure, se si vuole, di estendere le nozioni precedenti alle g-matrici i cui vertici abbiano anche valori negativi.

OSSERVAZIONE II: *Sommando due g-matrici simili* con le stesse traiettorie di valore massimo si ottiene una g-matrice con le stesse traiettorie di valore massimo, ed il loro valore è la somma dei valori massimi delle traiettorie precedenti.

OSSERVAZIONE III: La *moltiplicazione* (nel senso matriciale) di una g-matrice A *per una costante* POSITIVA k non ne altera le traiettorie di valore massimo. Ciò permette ad esempio di supporre, se i valori dei vertici di A sono razionali, che essi siano addirittura interi non negativi; oppure che il valore massimo delle traiettorie di A sia uguale ad una quantità fissata, ad esempio uguale ad 1.

OSSERVAZIONE IV: Abbiamo già osservato che uno *scambio delle righe con le colonne* induce una corrispondenza biunivoca fra le traiettorie della g-matrice data e della sua trasposta, le traiettorie corrispondenti avendo ovviamente lo stesso valore. Perciò, agli effetti del Problema I, tale scambio è inessenziale e permette ad esempio di supporre che il numero m delle righe di A sia sempre non maggiore del numero n delle sue colonne.

OSSERVAZIONE V: Un'analoga corrispondenza biunivoca fra le traiettorie, che ne conserva il valore, si ha cambiando contemporaneamente l'orientazione delle righe e delle colonne e scambiando in ogni traiettoria l'origine con l'estremo. In altre parole:

È inessenziale, agli effetti del Problema I, considerare al posto della g-matrice data quella che se ne ottiene *invertendo contemporaneamente l'ordine delle righe e quello delle colonne.*

OSSERVAZIONE VI: Invece di quelle di valore massimo, ci si può porre il seguente

PROBLEMA II: *Determinare le traiettorie di valore* MINIMO *di una data g-matrice A, ed il loro valore $\bar{v}$.*

A proposito di questo problema si possono fare le seguenti considerazioni:

OSSERVAZIONE VII: Sia A' la g-matrice che si ottiene moltiplicando tutti gli elementi della g-matrice data A per un numero reale $h < 0$ ed aggiungendo poi ad ognuno di essi una costante $k > 0$ abbastanza grande perchè nessuno degli elementi di A' risulti negativo. Allora:

La A' ha come traiettorie di valore MINIMO

$$\bar{v}' = hv + k(m + n - 1)$$

quelle stesse che erano di valore MASSIMO *v per la A, e come traiettorie di valore* MASSIMO

$$v' = h\bar{v} + k(m + n - 1)$$

quelle stesse che erano di valore MINIMO *$\bar{v}$ per la A.*

In base a questa osservazione:

Ogni problema relativo alle traiettorie di valore massimo della A (e delle g-matrici che si possono ottenere dalla A permutandone le righe e le colonne) *si traduce in (è « equivalente » ad) un problema analogo per le traiettorie di valore minimo della A'* (e delle g-matrici che si possono ottenere dalla A' con le stesse permutazioni delle righe o colonne operate sulla A); *e viceversa.*

3. Procedimento in avanti, per la costruzione delle traiettorie di valore massimo.

Vi sono due procedimenti analoghi, uno *in avanti*, l'altro *all'indietro*, sostanzialmente equivalenti in base all'Osservazione V, che permettono di risolvere rapidamente il Problema I (e quindi, in base all'Osservazione VII, anche il Problema II) costruendo una g-matrice B (o rispettivamente C) simile alla data A.

Nel *procedimento in avanti* gli elementi b_{ik} della nuova matrice B sono i *valori massimi* delle traiettorie possibili che, partendo dal vertice iniziale (1,1), terminano col vertice (i, k).

Sicchè intanto, per la prima riga e la prima colonna:

$$\begin{aligned} &b_{11} = a_{11}, \quad b_{12} = b_{11} + a_{12}, \quad b_{13} = b_{12} + a_{13}, \ldots \\ &b_{21} = b_{11} + a_{21} \\ &b_{31} = b_{21} + a_{31} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Infatti le traiettorie parziali di origine (1,1) ed estremo sulla 1ª riga o sulla 1ª colonna sono uniche, e quindi anche di valore massimo. Le frecce, nello schema della fig. 3.1, indicano i loro lati (segmenti orientati).

$$\begin{tikzcd} b_{11} \arrow[r] \arrow[d] & b_{12} \arrow[r] & b_{13} \arrow[r] & {} \\ b_{21} \arrow[d] & & & \\ b_{31} \arrow[d] & & & \\ {} & & & \end{tikzcd}$$

Fig. 3.1

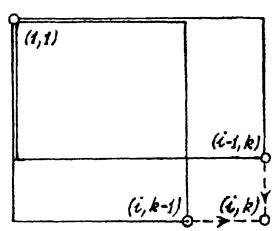


Fig. 3.2

Invece per raggiungere il vertice (i, k) $(i, k > 1)$ si possono seguire più traiettorie (almeno due) e queste possono dividersi in due tipi (v. fig. 3.2), secondo che il vertice precedente (i, k) sia $(i - 1, k)$ oppure $(i, k - 1)$. Il valore massimo di quelle del 1º tipo è $b_{i-1,k} + a_{ik}$, mentre il valore massimo di quelle del 2º tipo è $b_{i,k-1} + a_{ik}$. Dunque, fra tutte le traiettorie terminanti in (i, k), quelle di valor massimo hanno come vertice precedente (i, k) quello dei due $(i - 1, k)$, $(i, k - 1)$ avente in B il valore maggiore ($b_{i-1,k}$ o rispettivamente $b_{i,k-1}$). Sullo schema della B sarà da segnare con una freccia solo l'ultimo lato di queste traiettorie di valore massimo (entrambi, se $b_{i-1,k} = b_{i,k-1}$).

Così procedendo si vengono a costruire successivamente la 2ª, 3ª... riga (o colonna) della matrice B e contemporaneamente sullo schema della g-matrice B restano indicati da frecce anche i lati delle traiettorie di valore massimo che dal vertice iniziale (1,1) conducono ai diversi vertici (i, k) della g-matrice data A.

Alla fine $b_{m,n}$ fornisce il valore massimo delle traiettorie possibili da (1,1) ad (m, n), e queste traiettorie di valore massimo restano disegnate sulla B. Per ottenerne una basta partire dall'ultima posizione (m, n) e procedere a ritroso (dal basso in alto o da destra a sinistra) lungo i lati segnati con frecce.

4. Procedimento all'indietro. Esempî.

Nel *procedimento all'indietro* si parte dall'ultimo vertice (m, n). L'elemento c_{ik} della matrice C è il massimo aumento di valore possibile per una traiettoria che, attraverso il vertice (i, k) conduca al vertice finale (m, n).

Sicchè intanto restano determinati gli elementi dell'ultima riga e dell'ultima colonna della matrice C e si potranno segnare sul suo schema i lati delle traiettorie parziali di valore massimo della g-matrice A uscenti da quegli elementi e terminanti in (m, n).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & c_{m-2,n}=a_{m-2,n}+c_{m-1,n} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & c_{m-1,n}=a_{m-1,n}+c_{m,n} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
\rightarrow c_{m,n-2}=a_{m,n-2}+c_{m,n-1} & \rightarrow & c_{m,n-1}=a_{m,n-1}+c_{m,n} & \rightarrow & c_{m,n}=a_{m,n} & &
\end{array}$$

Infatti tali traiettorie, per questi elementi dell'ultima riga e dell'ultima colonna, sono uniche, e quindi anche di valore massimo.

Lo stesso ragionamento seguito nel procedimento in avanti (mutatis mutandis, secondo l'Osservazione V) prova che, determinati che siano $c_{i,k+1}$ e $c_{i+1,k}$ $(i < m, k < n)$, sarà da porre:

$$c_{i,k} = a_{i,k} + \max\,(c_{i,k+1}, c_{i+1,k}),$$

e sarà da segnare con una freccia solo il lato congiungente il vertice (i, k) con quello dei due consecutivi cui compete il massimo dei due valori $c_{1,k+1}$, $c_{i+1,k}$ (od entrambi, se questi due valori sono uguali).

Così procedendo si vengono a costruire successivamente (a partire dalle ultime) le varie righe (o colonne) della matrice C e contemporaneamente restano indicati da frecce, sulla g-matrice C, i lati delle traiettorie di valore massimo che dai diversi vertici della A conducono al vertice finale (m, n).

Alla fine c_{11} fornisce il valore massimo delle traiettorie possibili da (1,1) ad (m, n) e contemporaneamente queste traiettorie restano indicate sulla C dalle frecce, che basta seguire partendo dal vertice (1,1).

ESEMPIO:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & 10 & \rightarrow & 12 \\ \Downarrow & & & & \downarrow & & & & \\ \mathbf{5} & \Rightarrow & \mathbf{7} & & 11 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 18 \\ \downarrow & & \Downarrow & & & & & & \\ 6 & & \mathbf{12} & \Rightarrow & \mathbf{17} & \Rightarrow & \mathbf{22} & \Rightarrow & \mathbf{25} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{25} & & 23 & \rightarrow & 20 & & 14 & & 8 \\ \Downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{24} & \Rightarrow & \mathbf{20} & & 16 & & 12 & & 6 \\ & & \Downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 19 & \rightarrow & \mathbf{18} & \Rightarrow & \mathbf{13} & \Rightarrow & \mathbf{8} & \Rightarrow & \mathbf{3} \end{bmatrix}.$$

5. Metodi misti. Esempî.

Per determinare le traiettorie di valore massimo si può anche seguire un *metodo misto*, sfruttando in parte il procedimento in avanti ed in parte quello all'indietro.

Si può ad esempio dividere la g-matrice A in due parti A', A'', con un *taglio verticale* che separi la j-esima dalla $(j+1)$-esima colonna. Per la parte sinistra A' si costruisca la g-matrice B' del procedimento in avanti e per la parte destra A'' si costruisca la g-matrice C'' del procedimento all'indietro. Gli elementi b_{ij} della j-esima colonna della B' (che coincidono con quelli di ugual posto della B) forniscono i valori (massimi) delle traiettorie partenti dal vertice (1,1) e terminanti al vertice (i, j) della g-matrice A. Gli elementi $c_{i,j+1}$ della C'' (che coincidono con gli elementi di ugual posto della C) forniscono i valori (massimi) delle traiettorie che, partendo dal vertice $(i, j+1)$, terminano al vertice (m, n) della g-matrice A.

Sul taglio, in corrispondenza della i-esima riga, si ponga la somma $s_i = b_{i,j} + c_{i,j+1}$. Questo numero fornisce il massimo valore delle traiettorie della A partenti da (1,1), terminanti in (m, n) e contenenti il lato orizzontale di origine (i, j) e termine $(i, j+1)$.

Poichè ogni traiettoria deve attraversare il taglio e contenere un (solo) lato siffatto, il massimo di questi numeri s_i fornisce il valore massimo delle traiettorie della A (partenti da (1,1) e terminanti in (m, n)) e queste traiettorie di valore massimo restano disegnate durante il procedimento, la loro prima parte sulla g-matrice B' e la loro seconda parte sulla g-matrice C''.

ESEMPIO:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{A'} \qquad \underbrace{}_{A''}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \mathbf{2} & \Rightarrow \mathbf{5} & \Rightarrow \mathbf{10} & 23 & & 13 & 7 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{6} & \Rightarrow \mathbf{10} & \Rightarrow \mathbf{16} & = \boxed{\mathbf{24}} & = & \Rightarrow \mathbf{8} & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \Downarrow & \downarrow \\ 7 & 16 & \rightarrow 17 & 20 & & \mathbf{3} & \Rightarrow \mathbf{1} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{B'} \qquad s \qquad \underbrace{}_{C''}$$

OSSERVAZIONE I: Quanto già detto sullo scambio delle righe con le colonne, applicato al capoverso precedente, fornisce la descrizione di un analogo metodo misto per la determinazione delle traiettorie di valore massimo della A (e del loro valore), ottenibile dividendo in due parti (superiore A_1 ed inferiore A_2) la matrice data A, con un *taglio orizzontale.*

ESEMPIO:

$$A = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} = A_1 \\ \\ = A_2 \end{array}$$

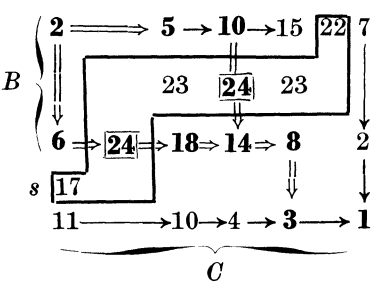
$$\begin{array}{ccccccccccc} [\,\mathbf{2} & \Rightarrow & \mathbf{5} & \Rightarrow & \mathbf{10} & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 20\,] & = B_1 \\ \| & & & & \| & & & & & \\ \hline \| & & & & \| & & & & & \\ \boxed{\mathbf{24}} & & 23 & & \boxed{\mathbf{24}} & & 23 & & 22 & s \\ \| & & & & \| & & & & & \\ \hline \Downarrow & & & & \Downarrow & & & & & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{22} & \Rightarrow & \mathbf{18} & \Rightarrow & \mathbf{14} & \Rightarrow & \mathbf{8} & & 2 \\ & & & & & & \Downarrow & & \downarrow \\ 11 & \rightarrow & 10 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & \mathbf{3} & \Rightarrow & \mathbf{1} \end{array}\right] = C_2$$

OSSERVAZIONE II: Più in generale, si può dividere la g-matrice A in due parti connesse, la prima A' contenente (1,1) situata sopra ed a sinistra della seconda A'' contenente (m, n), tagliandola lungo una spezzata che ne separi successivamente due righe o due colonne adiacenti (e tagli una sola volta ognuna delle possibili traiettorie da (1,1) ad (m, n)). Per la parte A' si seguirà il procedimento in avanti e per la parte A'' quello all'indietro, segnando sul taglio s le somme dei valori dei vertici adiacenti della B e della C.

ESEMPIO:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} A' \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ A'' \end{array}$$



6. G-matrici pseudo-circolanti.

Ci si può chiedere se e come può accadere che *tutte le traiettorie abbiano lo stesso valore.* Tanto il procedimento in avanti che quello all'indietro fanno vedere che condizione necessaria e sufficiente perchè ciò accada è che si abbia:

$$a_{i+1,k} = a_{i,k+1}. \tag{6.1}$$

Infatti si riconosce (induttivamente) che solo allora:

$$b_{i+1,k} = b_{i,k+1}, \qquad c_{i-1,k} = c_{i,k-1}, \tag{6.2}$$

$$\begin{tikzcd} (i, k) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & (i, k+1) \arrow[d] \\ (i+1, k) \arrow[r] & (i+1, k+1) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(i-1, k-1) \arrow[r] \arrow[d] & (i-1, k) \arrow[d, dotted] \\
(i, k-1) \arrow[r, dotted] & (i, k)
\end{tikzcd}$$

cosicchè sono da segnare sulla g-matrice B tanto la freccia $(i+1, k) \longrightarrow (i+1, k+1)$, quanto quella $(i, k+1) \longrightarrow (i+1, k+1)$, e sulla g-matrice C tanto la freccia $(i-1, k-1) \longrightarrow (i-1, k)$, quanto quella $(i-1, k-1) \longrightarrow (i, k-1)$.

Le (6.1), (6.2) stanno ad indicare che la matrice A e (quindi anche) le matrici B e C, sono *pseudo-circolanti*, ossia hanno uguali gli elementi appartenenti alle diagonali secondarie dei loro minori.

ESEMPIO:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 15 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & 21 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 6 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & 21 & \longrightarrow & \mathbf{28} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{28} & \longrightarrow & 27 & \longrightarrow & 25 & \longrightarrow & 22 & \longrightarrow & 18 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 27 & \longrightarrow & 25 & \longrightarrow & 22 & \longrightarrow & 18 & \longrightarrow & 13 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 25 & \longrightarrow & 22 & \longrightarrow & 18 & \longrightarrow & 13 & \longrightarrow & 7 \end{bmatrix}.$$

OSSERVAZIONE I: Supposto che la matrice A sia pseudo-circolante, ossia che

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \downarrow & & & & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \downarrow & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \downarrow & & & & \\ a_m \rightarrow & a_{m+1} \leftarrow & \dots \rightarrow & a_{m+n-2} \rightarrow & a_{m+n-1} \end{bmatrix},$$

è chiaro che il valore comune v di tutte le traiettorie è dato da:

$$v = a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots + a_{m+n-1}.$$

Osservazione II: È evidente che *l'addizione algebrica* (nel senso della teoria delle matrici) *di una g-matrice simile e pseudocircolante A' alla g-matrice data A, non ne altera le traiettorie di valore massimo*, nel senso che la matrice $A + A'$ ha le stesse traiettorie di valore massimo della data A. Il valore di queste traiettorie è uguale a quello delle stesse traiettorie della A, aumentato del valore comune a tutte le traiettorie della A'.

In particolare, se A' ha uguali a k i valori di tutti i suoi vertici, si ricade nel caso già contemplato al n° 2, Osservazione I.

Per quanto riguarda i Problemi I, II, la presente osservazione permette di supporre uguale a zero il più piccolo dei valori dei vertici della A situati su una stessa diagonale secondaria.

Osservazione III: L'operazione di passaggio dalla g-matrice A a quella B (alla C) non conserva tutte le traiettorie di valore massimo, come risulta dal seguente esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 2 & 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow & \\ 0 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 1 \longrightarrow 1 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow & \\ 1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 0 & \end{bmatrix},$$

$$A' = B - P = \begin{bmatrix} 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 & 0 \\ \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow & \\ 0 \qquad 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 & \\ \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow & \\ 0 \qquad 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 & \end{bmatrix},$$

$$A'' = B' - P' = \begin{bmatrix} 0 \longrightarrow 1 & 1 & 0 & 0 \\ \qquad\quad \downarrow & & & \\ 0 \qquad 2 & 0 & 1 & 0 \\ \qquad\quad \downarrow & & & \\ 0 \qquad 1 \longrightarrow 2 & \longrightarrow 0 & \longrightarrow 0 & \end{bmatrix},$$

dove le matrici P e P' sono pseudo-circolanti opportune e le traiettorie di valore massimo massimo sono indicate dalle frecce.

7. Traiettorie di valore minimo e loro costruzione.

A proposito del *Problema II*: *determinare le traiettorie di valore* MINIMO *di una data g-matrice A, ed il loro valore $\bar{v}$*, che sappiamo essere equivalente al Problema I (n. 2, Oss. VI), considerazioni analoghe alle precedenti (nn. 3-6) si possono fare per la sua *risoluzione diretta.*

Anche ora tale risoluzione si potrà conseguire con un *procedimento in avanti*, costruendo una g-matrice $\bar{B}$, simile alla data, ed i cui elementi b_{ij} siano i valori *minimi* delle traiettorie di origine (1, 1) e terminanti in (i, j).

Oppure col *procedimento all'indietro*, costruendo la matrice $\bar{C}$ i cui elementi $\bar{c}_{ij}$ sono i valori *minimi* delle traiettorie uscenti da (i, j) e terminanti in (m, n).

Oppure con un *procedimento misto*, parte in avanti e parte all'indietro, avendo dapprima diviso la A in due parti A' ed A'' con un *taglio* lungo una spezzata a lati paralleli alle colonne od alle righe, la quale incontri in un sol punto ognuna delle traiettorie possibili da (1,1) ad (m, n).

È chiaro che anche per il Problema II le matrici pseudo-circolanti giuocano lo stesso ruolo già visto per il Problema I e che le operazioni non alteranti il valore delle traiettorie non alterano nè le soluzioni del Problema I, nè quelle del Problema II.

A titolo d'esempio determiniamo sulle matrici $\bar{B}$ e $\bar{C}$ le traiettorie di valore minimo ed il loro valore $\bar{v}$, per la stessa matrice A del n. 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 12 \\ | & & | & & & & & & \downarrow \\ 5 & & 6 & \text{——} & 9 & \text{——} & 13 & & 15 \\ | & & | & & | & & | & & \downarrow \\ 6 & \text{——} & 11 & & 14 & & 18 & & \mathbf{18} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{18} & \longrightarrow & 17 & \longrightarrow & 14 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 8 \\ & & & & & & & & \downarrow \\ 19 & \text{——} & 15 & \text{——} & 13 & \text{——} & 10 & \text{——} & 6 \\ & & & & & & & & \downarrow \\ 19 & \text{——} & 18 & \text{——} & 13 & \text{——} & 8 & \text{——} & 3 \end{bmatrix}.$$

OSSERVAZIONE: Può essere $\bar{v}=v$ solo se tutte le traiettorie della g-matrice data A hanno lo stesso valore, ossia se A è pseudo-circolante (n. 6).

PARTE II

INTERPRETAZIONE OPERATIVA E PROBLEMI DI ORDINAMENTO OTTIMALE

8. Interpretazione delle questioni precedenti nella ricerca operativa.

Nella *ricerca operativa* si incontra la seguente interpretazione delle precedenti considerazioni. È data una *coda* di n *utenti* a^j ($j = 1, 2, \ldots, n$) che attendono di essere *serviti* successivamente da m *sportelli* a_i. I numeri a_{ij} sono i *tempi* (parziali) *di servizio*, ossia a_{ij} è il tempo occorrente allo sportello a_i per servire l'utente a^j. Si trascura il tempo occorrente a ciascun utente per trasferirsi da uno sportello al successivo e si suppone che gli n utenti debbano presentarsi a ciascun sportello nello stesso ordine in cui si sono presentati al primo. Inoltre è fissato ed uguale per tutti gli n utenti l'ordine di presentazione agli m sportelli.

Fissati questi due ordinamenti, ossia l'ordinamento degli $m \cdot n$ numeri a_{ij} in m righe ed n colonne (ciascuna riga a_i essendo associata ad uno sportello e ciascuna colonna a^j ad un utente), sorge il problema di *determinare il tempo occorrente perchè tutti gli n utenti della coda siano serviti da tutti gli m sportelli della successione*, ossia l'intervallo di tempo intercorrente dall'istante in cui il 1° utente si presenta al 1° sportello all'istante in cui l'n-esimo utente abbandona, essendone stato servito, l'm-esimo sportello.

Questo intervallo di tempo, che diremo « *tempo totale di servizio* », *è appunto dato dal valore* (*massimo*) *delle traiettorie* (da (1,1) ad (m, n)) *della g-matrice* $A = (a_{ij})$ *dei tempi* (parziali) *di servizio.*

Ciò si può dimostrare per induzione, tanto sul numero m degli sportelli che su quello n degli utenti. Essendo la tesi evidente se $m = 1$ oppure se $n = 1$, basterà dimostrarla per m utenti ed n sportelli ($m, n > 1$), avendo ammesso che sia vera per $m - 1$ sportelli ed n utenti, oppure per m sportelli ed $n - 1$ utenti.

Consideriamo perciò la g-matrice B del procedimento in avanti:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline b_{11} = a_{11} & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\ b_{m,n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} b_{m-1,n} \\ b_{m,n} = a_{m,n} + \max\,(b_{m-1,n}, b_{m,n-1}) \end{array}$$

e ricordiamo che, per le ipotesi induttive fatte:

$b_{m-1,n}$ = tempo totale di servizio per $m - 1$ sportelli ed m utenti; ossia intervallo di tempo intercorrente tra l'istante in cui il 1° utente si presenta al 1° sportello e l'istante in cui l'n-esimo utente abbandona, essendone stato servito, l'$(m - 1)$-esimo sportello;

$b_{m,n-1}$ = tempo totale di servizio per m sportelli ed $n - 1$ utenti; ossia intervallo di tempo intercorrente tra l'istante in cui il 1° utente si presenta al 1° sportello e l'istante in cui l'$(n - 1)$-esimo utente abbandona, essendone stato servito, l'm-esimo sportello.

Sicchè l'n-esimo utente si potrà presentare all'm-esimo sportello solo dopo che sia trascorso il più grande dei due intervalli di tempo $b_{m-1,n}$ e $b_{m,n-1}$ ed il tempo totale di servizio sarà:

$$\max (b_{m-1,n}, b_{m,n-1}) + a_{m,n} = b_{m,n}, \qquad \text{c.d.d.}$$

Osservazione I: Quanto s'è detto sullo scambio delle righe con le colonne e sulla contemporanea inversione del loro ordinamento (n. 2 Oss. IV, V), si traduce nelle seguenti proposizioni:

I) *Il tempo totale di servizio non cambia se si scambia l'ufficio degli utenti con quello degli sportelli*, ossia se si considera una coda di m utenti davanti ad n sportelli, con una g-matrice dei tempi parziali di servizio trasposta di quella data A. Si può quindi sempre supporre (nella ricerca del tempo totale di servizio) che il numero m degli sportelli non superi quello n degli utenti.

II) *Il tempo totale di servizio non cambia se si invertono contemporaneamente l'ordine degli utenti e quello degli sportelli.*

Osservazione II: Quanto precede ha fornito un'interpretazione operativa del *valore massimo* delle traiettorie di una grafomatrice A. Ci si può chiedere se sia possibile, sullo stesso modello operativo, una interpretazione delle *traiettorie* di valore massimo. Essa può essere fornita dal seguente criterio; di evidente verità:

Per diminuire il tempo totale di servizio, basta diminuire, SU CIASCUNA DELLE TRAIETTORIE DI VALORE MASSIMO, *qualcuno dei tempi parziali di servizio.*

9. Il procedimento in avanti e le matrici dei tempi parziali di pre-riposo degli sportelli e di pre-attesa degli utenti.

In quanto precede si son fatte, implicitamente, le ipotesi:

I) Ogni utente a^k, che sia stato servito da un dato sportello a_{i-1}, si presenti al più presto allo sportello successivo a_i, e cioè subito se esso è libero, oppure appena a_i abbia finito di servire l'utente precedente a^{k-1}.

II) Ogni sportello a_i, che abbia servito un dato utente a^{k-1}, inizi al più presto il servizio dell'utente successivo a^k, e cioè subito se esso è libero, oppure appena a^k sia stato servito dallo sportello precedente a_{i-1}.

Ha luogo allora la considerazione dei seguenti intervalli non negativi di tempo:

d_{ik} = *tempo* (parziale) *di riposo* (*pre-riposo*) dello sportello a_i, in attesa dell'utente a^k, dopo di aver servito a^{k-1};

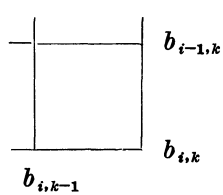
e_{ik} = *tempo* (parziale) *di attesa* (*pre-attesa*) dell'utente a^k di fronte allo sportello a_i, dopo di essere stato servito da a_{i-1}.

Dalle ipotesi I, II consegue intanto che:

$$(9.1)\qquad \begin{cases} d_{1k} = e_{i1} = 0 & (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n), \\ d_{i1} = a_{11} + \dots + a_{i-1,1} = b_{1-1,1} & (i = 2, 3, \dots, m), \\ e_{1k} = a_{11} + \dots + a_{1,k-1} = b_{1,k-1} & (k = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

Assunto come origine dei tempi l'istante in cui il primo utente a^1 si presenta al primo sportello a_1, dal ragionamento fatto al n. 8 risulta inoltre che:

$b_{i-1,k}$ = intervallo di tempo occorrente affinchè gli utenti $a^1, a^2, \dots, a^k$ siano serviti dagli sportelli $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ = istante in cui lo sportello a_{i-1} termina il servizio dell'utente a^k;



$b_{i,k-1}$ = intervallo di tempo occorrente affinchè gli utenti $a^1, a^2, \dots, a^{k-1}$ siano serviti dagli sportelli $a_1, a_2, \dots, a_i$ = istante in cui lo sportello a_i termina il servizio dell'utente a^{k-1}.

Pertanto, dalle I), II) consegue anche, per i, $k \geq 2$:

$$(9.2) \qquad (b_{i-1,k} \geq b_{i,k-1}) \Rightarrow \begin{cases} d_{ik} = b_{i-1,k} - b_{i,k-1} \geq 0, \\ e_{ik} = 0; \end{cases}$$

$$(9.3) \qquad (b_{i-1,k} \leq b_{i,k-1}) \Rightarrow \begin{cases} d_{ik} = 0, \\ e_{ik} = b_{i,k-1} - b_{i-1,k} \geq 0. \end{cases}$$

Le (9.1), (9.2), (9.3) consentono, a partire dalla B, la costruzione delle due g-matrici, simili alla A:

$D = (d_{ik})$ = *g-matrice dei tempi* (parziali) *di pre-riposo degli sportelli*;

$E = (e_{ik})$ = *g-matrice dei tempi* (parziali) *di pre-attesa degli utenti.*

Inoltre, poichè (v. n. 6) solo se la g-matrice A è pseudocircolante si ha:

$$b_{i-1,k} = b_{i,k-1} \qquad (i, k \geq 2),$$

dalle (9.1), (9.2), (9.3) consegue il seguente:

TEOREMA: *Solo se la g-matrice A dei tempi parziali di servizio è pseudocircolante, sono nulli tutti i tempi parziali di pre-riposo degli sportelli* (in attesa degli utenti successivi al primo) *e tutti i tempi parziali di pre-attesa degli utenti* (di fronte agli sportelli successivi al primo).

Dalle (9.2), (9.3) consegue infine che:

Condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE *affinchè siano nulli tutti i tempi parziali* (successivi al primo):

di pre-riposo degli sportelli	*di pre-attesa degli utenti*
$d_{ik} = 0 \qquad (k \geq 2)$	$e_{ik} = 0 \qquad (i \geq 2)$

è che sia, per i, k ≥ 2

(9.4) $\quad b_{i-1,k} \leq b_{i,k-1}$	$b_{i-1,k} \geq b_{i,k-1} \quad$ (9.5)

ossia che *nelle diagonali secondarie della g-matrice B gli elementi risultino ordinati, dall'alto al basso, per valori rispettivamente.*

non decrescenti oppure *non crescenti*.

Ricordando come si costruiscono gli elementi della B a partire da quelli della A, si ha che condizione *sufficiente* (ma non necessaria) affinchè sussistano le (9.4), (9.5) è che sia, per i, $k \geqq 2$, rispettivamente:

$$a_{i-1,k} \leqq a_{i,k-1} \quad \text{oppure} \quad a_{i-1,k} \geqq a_{i,k-1},$$

ossia che *nelle diagonali secondarie della g-matrice A gli elementi risultino ordinati, dall'alto verso il basso, per valori*

non decrescenti o rispettivamente *non crescenti*.

Esempio: Per la g-matrice A già considerata ai nn. 4, 7:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 10 & 12 \\ 5 & 7 & 11 & 15 & 18 \\ 6 & 12 & 17 & 22 & 25 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sicchè, interpretando la A come la matrice dei tempi parziali di servizio per la terna ordinata di sportelli a_1, a_2, a_3 e la quintupla ordinata di utenti $a^1, \ldots, a^5$, si ha non solo che il tempo totale di servizio è 25, ma anche, sommando i valori degli elementi delle righe della D, che i *tempi totali di preriposo* degli sportelli a_1, a_2, a_3 sono rispettivamente 0, 2, 6. Inoltre, sommando i valori degli elementi delle colonne della E, si ha che i *tempi totali di preattesa* degli utenti $a^1, \ldots, a^5$, sono rispettivamente 0, 2, 5, 11, 17.

10. Il procedimento all'indietro e le matrici dei tempi di post-attesa e di post-riposo.

Le I), II) e le loro conseguenze (9.1), (9.2), (9.3) forniscono una *interpretazione operativa del procedimento in avanti e della g-matrice B*. È chiaro (n. 2, Oss. V) che un'analoga interpretazione operativa possa ottenersi per il procedimento all'indietro e per la g-matrice C, scambiando contemporaneamente l'ordine degli utenti e quello degli sportelli.

Lasciando tale ordine inalterato, le regole I), II) andranno sostituite con le seguenti:

I') Ogni utente a^k, prima di essere servito da un dato sportello a_{i+1}, debba abbandonare più tardi possibile lo sportello precedente a_i, e cioè subito prima, oppure appena a_i debba iniziare il servizio dell'utente successivo a^{k+1}.

II') Ogni sportello a_i, prima di iniziare il servizio di un dato utente a^{k+1}, debba terminare più tardi possibile il servizio dell'utente precedente a^k, e cioè subito prima, oppure appena a^k debba cominciare ad essere servito dallo sportello successivo a_{i+1}.

Avrà quindi luogo la considerazione dei seguenti intervalli non negativi di tempo:

d'_{ik} = *tempo* (parziale) di riposo (*post-riposo*) dello sportello a_i, dopo di aver servito l'utente a^k;

e'_{ik} = *tempo* (parziale) di attesa (*post-attesa*) dell'utente a^k, dopo di essere stato servito dallo sportello a_1.

In particolare, dalla I'), II') consegue che debbono essere nulli tutti i tempi di post-attesa dell'utente a^n e tutti i tempi di post-riposo dello sportello a_m, essendo:

$$(10.1)\qquad \begin{cases} d'_{mk} = e'_{in} = 0 & (k = 1, 2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, m), \\ d'_{in} = c_{i+1,n} & (i = 1, 2, \dots, m-1), \\ e'_{mk} = c_{m,k+1} & (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

Converrà fissare poi l'attenzione sulla *fine dei tempi*, ossia sull'istante T in cui l'ultimo utente a^n abbandona, essendone stato servito, l'ultimo sportello a_m. Allora:

$t_{i+1,k} = T - c_{i+1,k}$ = istante in cui lo sportello a_{i+1} inizia il servizio dell'utente a^k;

$t_{i,k+1} = T - c_{i,k+1}$ = istante in cui lo sportello a_i inizia il servizio dell'utente a^{k+1}.

Potranno presentarsi due casi:

1) $t_{i+1,k} \leqq t_{i,k+1}$: allora l'istante in cui a^k abbandona a_i coincide con $t_{i+1,k}$, cosicchè è nulla la post-attesa e_{ik} di a^k dopo a_i, mentre $d_{ik} = t_{i,k+1} - t_{i+1,k} \geqq 0$.

2) $t_{i+1,k} \geqq t_{i,k+1}$: allora l'istante in cui a^k abbandona a_i coincide con $t_{i,k+1}$, cosicchè la post-attesa di a^k dopo a_i è $e_{ik} = t_{i+1,k} - t_{1,k+1} \geqq 0$, mentre è nullo il post-riposo d_{ik} di a_i dopo aver servito a^k.

Tenendo presenti le espressioni di $t_{i+1,k}$, $t_{i,k+1}$ e riassumendo, si ha, per $i < m$, $k < n$:

$$(10.2) \qquad (c_{i+1,k} \geqq c_{i,k+1}) \Rightarrow \begin{cases} d'_{ik} = c_{i+1,k} - c_{i,k+1} \geqq 0\,, \\ e'_{ik} = 0\,; \end{cases}$$

$$(10.3) \qquad (c_{i+1,k} \leqq c_{i,k+1}) \Rightarrow \begin{cases} d'_{ik} = 0\,, \\ e'_{ik} = c_{i,k+1} - c_{i+1,k} \geqq 0\,. \end{cases}$$

Le (10.1), (10.2), (10.3) consentono, a partire dalla C, la costruzione delle matrici, simili alla A, $D' = (d'_{ik})$ ed $E' = (e'_{ik})$ dei tempi parziali di post-riposo degli sportelli e di post-attesa degli utenti. Come al n. 9 si prova che *la condizione che A sia semicircolante è necessaria e sufficiente affinchè siano nulli tutti i tempi parziali di post-riposo degli sportelli d'_{ik}, con $k < n$, e di post-attesa degli utenti e'_{ik}, con $i < m$.*

Inoltre *la condizione che nelle diagonali secondarie di A gli elementi risultino ordinati, dall'alto verso il basso, per valori rispettivamente*

non crescenti oppure *non decrescenti*

è anche SUFFICIENTE *perchè siano nulli tutti i tempi parziali di post-riposo d'_{ik}* o, rispettivamente *post-attesa e'_{ik} con $i < m$, $k < n$.*

Esempio: Riferiamoci sempre alla matrice A già considerata ai nn. 4, 7, 9, per la quale:

$$C = \begin{bmatrix} 25 & 23 & 20 & 14 & 8 \\ | & & & & \\ 24 & -\ 20 & 16 & 12 & 6 \\ & | & & & \\ 19 & 18 & -\ 13 & -\ 8 & -\ 3 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 13 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sommando gli elementi di una stessa riga della D' o di una stessa colonna della E' si ha che i tempi totale di post-riposo degli sportelli a_1, a_2, a_3 sono rispettivamente 13, 8, 0 e quelli totali di post-attesa degli utenti $a^1, \ldots, a^5$ sono rispettivamente 19, 13, 8, 3, 0.

OSSERVAZIONE: Sull'esempio precedente si può verificare che: *il tempo totale di servizio* (25) *si può ottenere indifferentemente sommando*:

1) il tempo totale di pre-riposo (6) ed il tempo totale di servizio (19) dell'ultimo sportello (a_3); oppure

2) il tempo totale di post-riposo (13) ed il tempo totale di servizio (12) del primo sportello (a_1); oppure

(3) il tempo totale di pre-attesa (17) ed il tempo totale di servizio (8) dell'ultimo utente (a^3); oppure

4) il tempo totale di post-attesa (19) ed il tempo totale di servizio (6) del primo utente (a^1).

N.B.: È ovvio che per *tempo totale di servizio* di uno sportello a_i o di un utente a^k si intende la somma dei suoi tempi parziali di servizio, ossia la somma v_i degli elementi della riga i-esima o rispettivamente quella v^k degli elementi della colonna k-esima della matrice A.

11. Problemi di ordinamento ottimale, in relazione al valore delle traiettorie. Esempî e controesempî.

Dalla interpretazione operativa (nn. 7-10) della g-matrice A e delle sue associate B, D, E nascono alcuni *problemi di ordinamento ottimale* [3]) delle sue colonne (utenti), o delle sue righe (sportelli), o di entrambe (utenti e sportelli), aventi per obiettivo la *minimizzazione*:

1) del *tempo totale di servizio*, ossia del valor massimo v delle traiettorie da (1,1) ad (m, n);

2) del *tempo totale d di pre-riposo degli sportelli*, in attesa di tutti o solo degli ultimi $n - 1$ clienti, ossia della somma di tutti gli elementi d_{ik} della matrice D, oppure solo di quelli con $k > 1$;

3) del *tempo totale e di preattesa degli utenti* di fronte a tutti gli sportelli oppure solo di fronte agli ultimi $m - 1$, ossia della somma di tutti gli elementi e_{ik} della matrice E, oppure solo di quelli con $i > 1$.

I teoremi del n. 9 forniscono già utili indicazioni per quanto riguarda i problemi di minimo 2) e 3), tanto che siano considerati isolatamente, quanto insieme. In questo caso, se si tratta di ordinare le colonne, risolvere

---

[3]) *scheduling* o *sequencing problems*, nella letteratura di lingua inglese; *problémes d'ordennancement*, in quella francese (confronta ad es. [11], [3]).

il problema significa disporle in modo che la struttura della A si avvicini quanto più possibile alla struttura pseudo-circolante, una misura della vicinanza essendo data ad esempio dalla somma $d + e$.

Vogliamo però qui occuparci solo del problema 1) e del suo equivalente (v. Osserv. VII del n. 2), riguardante la *massimizzazione* del valor minimo delle traiettorie, e precisamente dei *Problemi*:

I) *Ricerca del minimo del valor massimo* v;

II) *Ricerca del massimo del valor minimo* $\overline{v}$;

delle traiettorie da (1,1) *ad* (m, n) *in uno degli insiemi* I_1, I_2, I_3 *delle g-matrici che si deducono dalla* A *data con una permutazione qualsiasi, rispettivamente: delle colonne* (I_1), oppure *delle righe* (I_2), oppure *delle righe o delle colonne* (I_3).

Si noti che l'*esistenza* del minimo o del massimo suddetti è assicurata dalla circostanza che gli ordinamenti possibili sono in numero finito.

Inoltre interessa non solo determinare (o almeno circoscrivere) il *valore estremo*, ma anche determinare un *ordinamento estremante*, indirizzando la ricerca verso un *algoritmo* praticamente realizzabile e capace di condurre nel più breve tempo possibile dall'ordinamento iniziale ad uno di quelli ottimali.

Esempi:

1) Fra le matrici deducibili dalla A (già usata nei nn. 4, 7, 9, 10), con una permutazione delle colonne, è di valore v minimale (come risulta dal n. 12) la

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

per la quale

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & - & 5 & & 6 & & 10 & & 12 \\ | & & | & & & & & & \\ 5 & - & 7 & - & 11 & - & 14 & & 18 \\ | & & & & & & | & & \\ 8 & - & 13 & - & 14 & - & 19 & - & 24 \end{bmatrix},$$

cosicchè $v = 24$. Invece è tale da annullare tutti i tempi di preriposo successivi al primo l'ordinamento delle colonne della

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

per la quale

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

in quanto nelle diagonali secondarie della A_2 gli elementi risultano ordinati dall'alto verso il basso per valori non decrescenti.

2) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = I_2 = I_3 = I,$$

$$\max_I \bar{v} = 2 > 1 = \min_I v .$$

3) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$I_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\};$$

tanto in I_1 che in I_2 ed in I_3 si ha:

$$\max \bar{v} = 2 = \min v .$$

4) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$I_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\};$$

tanto in I_1 che in I_2 ed in I_3 si ha:

$$\max \bar{v} = 3 < 4 = \min v .$$

OSSERVAZIONE I: Dagli esempi 2), 3), 4) risulta in particolare che (purtroppo!):

In uno qualsiasi I degli insiemi I_1, I_2, I_3 può presentarsi una qualunque delle tre alternative:

$$\max_I \bar{v} \gtreqless \min_I v .$$

In altre parole, *non vale un teorema di «minimax»*, analogo a quello celebre di VON NEUMANN.

OSSERVAZIONE II: Poichè $I_3 \supset I_1$, $I_3 \supset I_2$, si ha:

$$\max_{I_3} \overline{v} \geqq \max_{I_1} \overline{v}, \qquad \max_{I_3} \overline{v} \geqq \max_{I_2} v;$$
$$\min_{I_3} v \leqq \min_{I_1} v, \qquad \min_{I_3} v \leqq \min_{I_2} v.$$

OSSERVAZIONE III: Gli esempi seguenti:

$$5) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \min_{I_1} v = 5 < 6 = \min_{I_2} v;$$

$$6) \qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \max_{I_1} \overline{v} = 3 > 2 = \max_{I_2} \overline{v},$$

assieme a quelli che se ne possono dedurre scambiando le righe con le colonne, mostrano che: *può presentarsi una qualsiasi delle alternative*:

$$\min_{I_1} v \gtreqless \min_{I_2} v, \qquad \max_{I_1} \overline{v} \gtreqless \max_{I_2} \overline{v}.$$

OSSERVAZIONE IV: Conformemente a quanto già visto nella Oss. VII del n. 2, la matrice A' dei precedenti esempi 5), 6) si ottiene dalla A moltiplicandone gli elementi per $h = -1$ ed aggiungendo a ciascuno di essi $k = 2$.

PARTE III

SUGLI ORDINAMENTI DELLE COLONNE CORRISPONDENTI AD UN MINIMO DEL VALORE MASSIMO DELLE TRAIETTORIE

12. Limitazioni per i valori ottimali e conseguenti criteri di ottimalità per l'ordinamento delle colonne. Esempî.

Data una g-matrice A, chiamiamo *valore* della sua riga i-esima a_i, o rispettivamente della sua colonna j-esima a^j, la somma:

$$(12.1) \qquad v_i = \sum_1^n{}_r\, a_{ir} \quad \text{o rispettivamente} \quad v^j = \sum_1^m{}_s\, a_{sj},$$

dei valori degli elementi di quella riga o rispettivamente di quella colonna. Nella precedente interpretazione operativa (m sportelli ed n utenti) v_i e v^j sono i *tempi totali di servizio*, rispettivamente dello sportello a_i o dell'utente a^j (vedi l'osservazione finale del n. 10).

Poichè una permutazione delle righe o delle colonne conserva l'eventuale appartenenza di due vertici alla stessa riga o colonna, è chiaro che:

il massimo (il minimo) *dei valori delle righe o delle colonne è lo stesso per tutte le matrici di* I_1, I_2, I_3.

Inoltre, poichè fra le traiettorie ce n'è sempre una contenente una data riga (o colonna), è anche chiaro che in ogni matrice di I_3 (e quindi anche di I_1 e di I_2) il valore massimo delle traiettorie non può essere inferiore al massimo dei valori delle sue righe e delle sue colonne. Ossia:

$$\min_{I_3} v \geqq \max (\max_i v_i, \max_j v^j). \tag{12.2}$$

La (12.2) si può migliorare se ad esempio si pensa fissato l'ordine delle righe, ossia se ci si riferisce ad I_1 anzichè ad I_3. Infatti, in ogni g-matrice di I_1 la traiettoria contenente tutta la riga i-esima deve necessariamente contenere una porzione iniziale ed una finale appartenenti a quelle due colonne *distinte* che nella g-matrice considerata figurano al 1° ed all'n-esimo posto. Consideriamo quindi, per la j-esima colonna della g-matrice data A, la somma

$$v'_{ij} = \sum_{1}^{i-1}{}_r\, a_{rj} \qquad (v'_{1j} = 0), \tag{12.3}$$

degli elementi situati *sopra* la riga i-esima e, per la colonna k-esima, la somma

$$v''_{ik} = \sum_{i+1}^{m}{}_r\, a_{rk} \qquad (v''_{mk} = 0), \tag{12.4}$$

degli elementi situati *sotto* la riga i-esima.

In I_1 il valore minimo delle traiettorie contenenti la riga i-esima è ovviamente:

$$w_i = v_i + \min_{j \neq k} (v'_{ij} + v''_{ik}). \tag{12.5}$$

Poichè in ogni matrice di I_1 c'è una traiettoria contenente la riga i-esima, in ogni matrice di I_1 il valor massimo delle traiettorie non potrà essere inferiore al massimo degli m numeri w_i, cosicchè:

$$\min_{I_1} v \geqq \max_i w_i = \max_i (v_i + \min_{j \neq k} (v_{ij} + v_{ik})). \tag{12.6}$$

La (12.6) (come già la (12.2) in I_3) fornisce un *criterio sufficiente* per stabilire se un dato ordinamento delle colonne sia *ottimale* in relazione all'obbiettivo di rendere minimo (in I_1) il valore massimo delle traiettorie. È chiaro infatti che:

È ottimale (di minimo valor massimo) *un ordinamento delle colonne per cui sia*

$$v = \max w_i.$$

Analogamente si ha che:

È ottimale (di massimo valor minimo) *un ordinamento delle colonne per cui sia*

$$\overline{v} = \min_i \overline{w}_i,$$

essendo:

$$\overline{w}_i = v_i + \max_{j \neq k} (v'_{ij} + v''_{ik}).$$

Inutile aggiungere che analoghi criteri si ottengono scambiando l'ufficio delle righe con quello delle colonne ed I_1 con I_2.

Esempio I: Per $m = 2$, w_1 è uguale alla somma degli elementi della 1ª riga aumentata del minimo dei valori della 2ª riga, mentre w_2 è uguale alla somma degli elementi della 2ª riga aumentata del minimo dei valori della 1ª riga. L'ordinamento delle colonne sarà certamente ottimale se risulta v uguale al maggiore dei due numeri w_1, w_2. Così ad es., se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 5 & 7 & 7 \\ 10 & 0 & 8 & 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} w_1 = 37 + 0 = 37, \\ w_2 = 36 + 1 = 37, \end{cases}$$

ed un ordinamento di minimo valor massimo ($v = 37$) è:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \longrightarrow 5 & \longrightarrow 7 & \longrightarrow 7 & \longrightarrow 9 & \longrightarrow 8 \\ \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow \\ 10 & \longrightarrow 5 & \longrightarrow 9 & \longrightarrow 4 & \longrightarrow 8 & \longrightarrow 0 \end{bmatrix},$$

mentre un ordinamento di massimo valor minimo ($\bar{v} = 45$) è:

$$A'' = \begin{bmatrix} 9 & \longrightarrow & 8 & & 7 & & 7 & & 5 & & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\ 8 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 9 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 10 \end{bmatrix}.$$

Lo si può determinare cercando, a norma della Oss. VII del n. 2, un ordinamento di minimo valor massimo per la matrice opposta della A, cui si aumentino di $10 = \max a_{ij}$ tutti gli elementi, ossia della matrice A^* i cui elementi sono i complementi a 10 di quelli di ugual posto della A:

$$A^* = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio II: Per una g-matrice pseudo-circolante:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \downarrow & & & & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \downarrow & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \downarrow & & & & \\ a_r & \longrightarrow a_{r+1} & \longrightarrow \dots & \longrightarrow a_{r+n-2} & \longrightarrow a_{r+n-1} \\ & & & & \downarrow \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \downarrow \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+n-2} & a_{m+n-1} \end{bmatrix},$$

il valore comune di tutte le traiettorie è:

$$v = (a_1 + \dots + a_{r-1}) + (a_r + \dots + a_{r+n-1}) + (a_{r+n} + \dots + a_{m+n-1}).$$

D'altra parte in ogni g-matrice dell'insieme I_1 determinato dalla A c'è una traiettoria contenente nella r-esima riga ($1 \leqq r \leqq m$) gli stessi elementi della r-esima riga della A, e quindi perchè A sia minimale in I_1 è *sufficiente* che esista *un* indice r per cui:

$$(12.7) \qquad \begin{cases} (a_1 + \dots + a_{r-1}) + (a_{r+n} + \dots + a_{m+n-1}) = \\ \min\limits_{i \neq j = 1, 2, \dots, n} ((a_i + \dots + a_{i+r-2}) + (a_{j+r} + \dots + a_{j+m-1})), \end{cases}$$

intendendo che per $r = 1$ o rispettivamente per $r = m$ dai due membri della (12.7) scompaiano i primi o i secondi addendi.

Così, *per* $m = 2$, condizione sufficiente affinchè la g-matrice pseudocircolante A sia minimale in I_1 è che sia:

$$\min (a_1, a_{n+1}) \leqq \min (a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Esempio III: È ottimale (di minimo valor massimo) l'ordinamento delle colonne della g-matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} w_1 &= 15 + 0 = 15 \\ w_2 &= 15 + 1 = 16 \\ w_3 &= 3 + 4 = 7 \end{aligned}$$

Infatti fra le traiettorie di valore massimo ($v = 16$) ce n'è una che contiene la 2ª riga ed i vertici di valor minimo della 1ª e della 3ª, cosicchè $v = w_2$.

Un ordinamento di massimo valor minimo ($\overline{v} = 12$) è invece:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \overline{w}_1 &= 15 + 5 = 20 \\ \overline{w}_2 &= 15 + 6 = 21 \\ \overline{w}_3 &= 3 + 9 = 12 \end{aligned}$$

Infatti la traiettoria di valor minimo contiene la 3ª riga ed è $\overline{v} = \overline{w}_3$.

Esempio IV: Nel caso di g-matrici ad elementi interi, come quelle considerate negli esempi precedenti, l'ottimalità dell'ordinamento delle colonne può dedursi anche *indirettamente* dai criteri precedenti, come nell'esempio seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} w_1 &= 21 \\ w_2 &= 17 \\ w_3 &= 16 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \longrightarrow & 3 \longrightarrow & 7 \longrightarrow & 12 \longrightarrow & 17 & 21 \\ 4 & 6 & 10 & 17 \longrightarrow & 20 & 21 \\ 5 & 10 & 14 & 18 & 22 \longrightarrow & 22 \end{bmatrix}, \quad \text{sicchè} \quad v = 22.$$

L'ottimalità di A (in I_1) risulta dalla circostanza che non esistono ordinamenti possibili delle colonne per cui una traiettoria di valore massimo segua la 1ª riga ed abbia come 6ª colonna la $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Per convincersene basta infatti tentare di costruirla col procedimento all'indietro, in modo che non si rompa il collegamento sulla 1ª riga. Risulta allora che come 5ª colonna occorre prendere la $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, ma dopo di ciò, qualunque colonna si ponga al 4º posto, si rompe il collegamento sulla 1ª riga di C, tra c_{14} e c_{15}.

Dunque $\min\limits_{I_1} v > 21 \leqq 22$, cosicchè l'ordinamento delle colonne di A è ottimale (di minimo valor massimo), c. v. d.

13. Regola di Bellman-Johnson, per $m = 2$.

Esaminiamo più in particolare il *caso* $m = 2$. Per una g-matrice siffatta:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \longrightarrow a_{12} \longrightarrow \dots \longrightarrow a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow & & \\ a_{21} \qquad a_{22} \qquad \dots \quad a_{2j} \longrightarrow \dots \longrightarrow & & a_{2n} \end{bmatrix},$$

ogni traiettoria, e dunque anche quella di valore massimo, contiene i primi j $(1 \leqq j \leqq n)$ vertici della 1ª riga e gli ultimi $n - j + 1$ vertici della 2ª riga, presentando un *gradino* in corrispondenza della j-esima colonna.

Volendo realizzare un ordinamento delle colonne corrispondente al minimo del valore massimo, converrà quindi disporle in modo da concentrare ai primi posti i vertici di valor minimo della 1ª riga ed agli ultimi posti i vertici di valore minimo della 2ª riga. Lo scopo si raggiunge procedendo come segue:

1) Si *normalizza* la A, supposta ad elementi positivi, sottraendo da essa una matrice simile, ad elementi positivi uguali al minimo dei valori dei vertici di A. Nella matrice normalizzata A' sarà dunque zero il minimo dei valori dei suoi vertici.

2) Se nella A' vi sono colonne nulle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si pongono indifferentemente ai primi od agli ultimi posti.

3) Si comincia poi la sistemazione delle colonne rimananti, scegliendo tra queste quelle (se ve ne sono) con un vertice di valore nullo. Le colonne così scelte si pongono ai primi od agli ultimi dei posti non ancora sistemati, secondo che il vertice di valore nullo appartiene alla 1ª od alla 2ª riga.

4) Si sostituiscono ai valori normalizzati quelli iniziali.

5) Si ripete il procedimento (fasi 1, 2, 3, 4) sulla matrice formata con le colonne della A ancora da sistemare nei posti intermedi. E così via, fino a che tutte le colonne della g-matrice data sono sistemate.

Così procedendo si ottiene una g-matrice A^* le cui colonne risultano ordinate in modo da aversi, come indicato nello schema seguente, una sua ripartizione in due blocchi, divisi da un taglio verticale t. A sinistra del taglio sono le colonne della A collocate in base alla minimalità del valore situato sulla 1ª riga; a destra quelle collocate in base alla minimalità

del valore situato sulla 2ª riga.

$$A^* = \left[\begin{array}{c|c} \rightarrow & \leftarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ & t \end{array} \right].$$

Nello schema le frecce orizzontali stanno ad indicare che i vertici della 1ª riga a sinistra del taglio sono disposti per valori non decrescenti da sinistra a destra; e che quelli della 2ª riga a destra del taglio sono invece disposti per valori non crescenti.

Le frecce ad asta verticale stanno ad indicare che sulle colonne a sinistra del taglio il valore del vertice appartenente alla 2ª riga è non minore di quello appartenente alla 1ª riga; viceversa per le colonne a destra del taglio.

Per quanto riguarda due colonne a^i ed a^k con $i < k$, si osservi che non può essere

$$a_{1i} > a_{1k}, \tag{13.1}$$

se a^k non è a destra di t, e non può essere

$$a_{2i} < a_{2k}, \tag{13.2}$$

se a^i non è a sinistra di t. Pertanto:

Le due disuguaglianze (13.1), (13.2) *non possono essere soddisfatte contemporaneamente.*

Infatti, dovendo essere a^i a sinistra ed a^k a destra di t, deve anche essere:

$$a_{2i} \geqq a_{1i}, \qquad a_{1k} \geqq a_{2k},$$

cosicchè:

$$a_{1i} - a_{1k} > 0 \Longrightarrow a_{2i} - a_{2k} \geqq a_{1i} - a_{1k} > 0,$$

$$a_{2i} - a_{2k} < 0 \Longrightarrow a_{1i} - a_{1k} \leqq a_{2i} - a_{2k} < 0.$$

Per quanto riguarda la posizione relativa del gradino e del taglio, gli esempi seguenti mostrano che il gradino può cadere tanto prima quanto

dopo il taglio t, e non essergli adiacente:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \longrightarrow 4 & \longrightarrow & 6 \longrightarrow & 3 \longrightarrow & 7 \\ \downarrow & & & & & \downarrow \\ 8 & \longrightarrow 5 & \longrightarrow & 5 \longrightarrow & 2 \longrightarrow & 0 \end{array}\right], \qquad v = 22 = w_1 = w_2;$$

$$\begin{array}{c} \\ t \end{array}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & & 1 \\ \downarrow & & & \\ 4 & \longrightarrow 4 & \longrightarrow & 0 \end{array}\right], \qquad v = 10;$$

$$\begin{array}{c} \\ t \end{array}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \longrightarrow 4 & \longrightarrow & 6 & 3 & 1 \\ & & & \downarrow & & \\ 3 & 5 & & 5 \longrightarrow & 2 \longrightarrow & 0 \end{array}\right], \qquad v = 19;$$

$$\begin{array}{c} \\ t \end{array}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \longrightarrow 4 & \longrightarrow & 6 \longrightarrow & 5 & 1 \\ & & & & \downarrow & \\ 3 & 5 & & 4 & 2 \longrightarrow & 0 \end{array}\right], \qquad v = 19.$$

$$\begin{array}{c} \\ t \end{array}$$

Infine avvertiamo che S. M. Johnson [1] ha dimostrato l'ottimalità dell'ordinamento delle colonne della A^* (nel senso che A^* è di minimo valor massimo in I_1).

14. Scambi tra due colonne; g-matrici adiacenti; minimi relativi del valor massimo delle traiettorie. Esempî.

La ricerca dell'ordinamento delle colonne $a^1, a^2, \ldots, a^n$ di una g-matrice $A = (a^1, \ldots, a^n)$ che renda minimo il valore massimo v delle sue traiettorie da (1,1) ad (m, n) equivale alla ricerca degli estremanti della funzione $v = v(p)$, a valori reali (positivi) e definita sull'insieme $I_1 = \{p\}$ delle $n!$ permutazioni p degli n oggetti $a^1, \ldots, a^n$.

A noi interessano i punti p di *minimo assoluto* ed un algoritmo che permetta di raggiungerne uno p^* a partire da un punto p qualsiasi.

D'altra parte nell'insieme I_1 si possono definire *adiacenti* due permutazioni p' e p'' che si deducano una dall'altra con lo *scambio* di due colonne distinte a^i, a^k $(i < k)$.

A sua volta questa nozione di *adiacenza* può essere intesa:

a) *in senso ristretto*, supponendo a^i ed a^k contigue ($k = i + 1$);

b) *in senso lato*, supponendo a^i ed a^k anche non contigue.

Diremo poi *di minimo relativo* un punto $\overline{p}$ in cui $v(\overline{p})$ non superi i valori assunti da v nei punti p adiacenti a $\overline{p}$.

È chiaro che, nel nostro caso, i punti p^* di minimo assoluto sono anche di minimo relativo. D'altra parte è anche chiaro che un punto $\overline{p}$ di minimo relativo può non essere di minimo assoluto.

Si consideri ad esempio l'insieme I_1 delle 6 permutazioni di 3 oggetti:

$$I_1 = \{(1, 2, 3),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 2, 1),\ (3, 1, 2),\ (1, 3, 2)\},$$

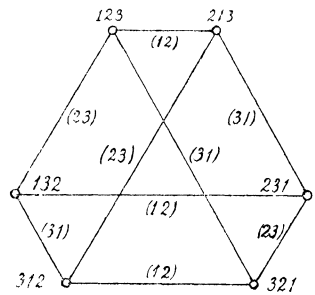


Fig. 14.1

e, su di esso, la nozione di adiacenza in senso lato. Lo schema della fig. 14.1 illustra la struttura che tale nozione induce in I_1, essendovi rappresentati con punti i suoi 6 elementi e con un segmento, avente due di quei punti come estremi, il legame tra due punti adiacenti (ogni punto ha tre adiacenti).

Sia inoltre (1, 2, 3) l'ordinamento delle colonne della g-matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Allora si ha:

$$\left\{ \begin{array}{lll} & v(123) = 14 & v(213) = 14 \\ v(132) = 10 & & v(231) = 16 \\ & v(312) = 12 & v(321) = 12 \end{array} \right.$$

cosicchè i due punti (1, 3, 2), (3, 2, 1) sono di minimo relativo e, tra questi due, solo (1, 3, 2) è di minimo assoluto.

Comunque, poichè i punti p^* sono da ricercarsi tra quelli p, può essere interessante un *algoritmo che consenta, a partire da un punto p, di stabilire se esso è un punto $\overline{p}$ e, se non lo è, di passare* (mediante scambi che non aumentino v) *ad un punto $\overline{p}$ di minimo relativo.*

15. Scambi tra colonne, diminuenti il valor massimo delle traiettorie, per $m = 2$.

Consideriamo dapprima il *caso* $m = 2$, con la nozione di adiacenza in senso lato. Sia dunque:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \longrightarrow a_{12} \longrightarrow \dots \longrightarrow a_{1j} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow & & & \\ a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2j} \longrightarrow \dots \longrightarrow & & a_{2,n-1} \longrightarrow & a_{2n} \end{bmatrix},$$

e sia una sua traiettoria di valore massimo quella col gradino lungo la colonna j-esima. Sappiamo che per determinare le traiettorie di valore massimo v della A si può seguire un metodo *misto* (v. n. 5), costruendo la matrice:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2n} \end{bmatrix},$$

dove:

$$(15.1)\quad \left\{ \begin{array}{l} b_{11} = a_{11} \qquad\qquad\qquad\qquad a_{21}+a_{22}+\dots+\boxed{a_{2i}+}\dots+\boxed{a_{2k}+}\dots+a_{2n}=c_{21} \\ b_{12} = a_{11}+a_{12} \qquad\qquad\qquad a_{22}+\dots+\boxed{a_{2i}+}\dots+\boxed{a_{2k}+}\dots+a_{2n}=c_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{1i} = a_{11}+\dots+\boxed{a_{1i}} \qquad\qquad\qquad \boxed{a_{2i}+}\dots+\boxed{a_{2k}+}\dots+a_{2n}=c_{2i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{1k} = a_{11}+\dots+\boxed{a_{1i}+}\dots+\boxed{a_{1k}} \qquad\qquad\qquad \boxed{a_{2k}+}\dots+a_{2n}=c_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{1,n-1}=a_{11}+\dots+\boxed{a_{1i}+}\dots+\boxed{a_{1k}+}\dots+a_{1,n-1} \qquad a_{2,n-1}+a_{2n}=c_{2,n-1} \\ b_{1n} = a_{11}+\dots+\boxed{a_{1i}+}\dots+\boxed{a_{1k}+}\dots+a_{1,n-1}+a_{1n} \qquad a_{2n}=c_{2n} \end{array} \right\} (15.2)$$

Occorre allora determinare quello (o quelli) di valore massimo tra gli n numeri $s_1 = b_{11} + c_{21}, \dots, s_n = b_{1n} + c_{2n}$.

Nelle nostre ipotesi è tale $s_j = b_{1j} + c_{2j}$, cosicchè (v. n. 5) $v = s_j$ e la traiettoria di valore massimo corrispondente segue la 1ª riga della A da $(1, 1)$ ad $(1, j)$, scendendo poi (« gradino ») al vertice $(2, j)$ e seguendo infine la 2ª riga da $(2, j)$ a $(2, n)$.

Le (15.1), (15.2) consentono di vedere *cosa accade quando si scambiano fra loro la i-esima e la k-esima colonna* $(i < k)$.

Dal loro esame si trae che:

I) Lo scambio (i, k) altera soltanto i valori delle somme

$$s_i, \quad s_{i+1}, \quad \dots, \quad s_{k-1}, \quad s_k,$$

cosicchè, *agli effetti di diminuire il valore massimo delle traiettorie, lo scambio* (i, k) *può essere vantaggioso solo se tutte le colonne cui corrisponde il valore massimo* $s_j = v$ *hanno indice* j *tale che*:

$$i \leq j \leq k.$$

Inoltre, indicando con un apice i nuovi valori s', e posto:

$$a_{1k} - a_{1i} = d'_{ik}, \qquad a_{2i} - a_{2k} = d''_{ki}, \tag{15.3}$$

si ha:

$$\begin{cases} s'_i = s_i + a_{1k} - a_{1i} = s_i + d'_{ik}, \\ s'_{i+1} = s_{i+1} + a_{1k} - a_{1i} + a_{2i} - a_{2k} = s_{i+1} + d'_{ik} + d''_{ki}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s'_{k-1} = s_{k-1} + a_{1k} - a_{1i} + a_{2i} - a_{2k} = s_{k-1} + d_{ik} + d''_{ki}, \\ s'_k = s_k + a_{2i} - a_{2k} = s_k + d''_{ki}. \end{cases} \tag{15.4}$$

Dalle (15.4) risulta che:

Agli effetti di diminuire il valore massimo delle traiettorie, lo scambio (i, k), *con* $i < k$:

II) *è certamente non vantaggioso se* $d'_{ik} \geqslant 0$, $d''_{ki} \geqslant 0$, *ossia se*

$$a_{1i} \leq a_{1k}, \qquad a_{2i} \geq a_{2k}; \tag{15.5}$$

III) *è certamente vantaggioso se* $d'_{ik} < 0$, $d''_{ki} < 0$, *ossia se*

$$a_{1i} > a_{ik}, \qquad a_{2i} < a_{2k}; \tag{15.6}$$

IV) *è vantaggioso solo allorchè*:

$$\begin{cases} i \leq j \leq k, \quad d'_{ik} < s_j - s_i, \quad d''_{ki} < s_j - s_k \\ d'_{ik} + d''_{ki} < s_j - s_r \quad (r = i + 1, \dots, k - 1). \end{cases} \tag{15.7}$$

OSSERVAZIONE I: Le (15.5) mostrano che un eventuale ordinamento delle colonne, per cui, procedendo da sinistra a destra, gli elementi della 1ª riga siano disposti in ordine non decrescente e quelli della 2ª riga in ordine non crescente, è tale che un qualsiasi scambio fra le colonne non può diminuire il valor massimo v delle traiettorie.

OSSERVAZIONE II: Dal n. 13 risulta che *la situazione di vantaggio prospettata in* III) *dalle* (15.6) *non può mai presentarsi se le colonne della A sono già state ordinate con la regola di Johnson-Bellman.*

OSSERVAZIONE III: A proposito delle (15.7), si osservi che, essendo $i \leq j \leq k$, è nulla almeno una delle differenze $s_j - s_r$ $(r = i, i+1, \ldots, k-1, k)$, cosicchè *deve essere negativo almeno uno dei tre numeri*:

$$d'_{ik}, \quad d''_{ki}, \quad d'_{ik} + d''_{ki},$$

e precisamente, perchè lo scambio (i, k) sia vantaggioso:

a) se $j = i$, occorre e basta che sia:

$$d'_{ik} < 0, \quad d''_{ik} < \min_{i+1<r<k-1} \{(s_j - s_k), \quad (s_j - s_r - d'_{ik})\};$$

b) se $j = k$, occorre e basta che sia:

$$d''_{ki} < 0, \quad d'_{ik} < \min_{i+1<r<k-1} \{(s_j - s_i), \quad (s_j - s_r - d''_{ki})\};$$

c) se $i < j < k$, occorre e basta che sia:

$$d'_{ik} + d''_{ki} < 0, \quad d'_{ik} < s_j - s_i, \quad d''_{ki} < s_j - s_k,$$

e quindi, dovendo essere negativo almeno uno dei due numeri d'_{ik}, d''_{ki}, nel caso *c*) occorre e basta che sia:

$$d'_{ik} < 0, \quad d''_{ki} < \min(-d'_{ik}, s_j - s_k),$$

oppure

$$d''_{ki} < 0, \quad d'_{ik} < \min(-d''_{ki}, s_j - s_i).$$

Tornando a sostituire le loro espressioni (15.3) alle differenze d'_{ik}, d''_{ki}, si ha il seguente

TEOREMA 1: *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè lo scambio*

(i, k) $(i < k)$ *diminuisca il valor massimo* v *delle traiettorie, è che sia*:

$$i \leqq j \leqq k,$$

ed inoltre:

a) *se* $j = i$:

$$a_{1k} < a_{1i}, \quad a_{2i} < a_{2k} + \min_{i+1<r<k-1} \{(s_i - s_k), \ (s_i - s_r + a_{1i} - a_{1k})\}; \tag{15.8}$$

b) *se* $j = k$:

$$a_{2i} < a_{2k}, \quad a_{1k} < a_{1i} + \min_{i+1<r<k-1} \{(s_k - s_i), \ (s_k - s_r + a_{2k} - a_{2i})\}; \tag{15.9}$$

c) *se* $i < j < k$:

$$a_{1k} < a_{1i}, \quad a_{2i} < a_{2k} + \min \{(a_{1i} - a_{1k}), \ (s_j - s_k)\}, \tag{15.10}$$

oppure:

$$a_{2i} < a_{2k}, \quad a_{1k} < a_{1i} + \min \{(a_{2k} - a_{2i}), \ (s_j - s_i)\}. \tag{15.11}$$

OSSERVAZIONE IV: Da quanto precede risulta fra l'altro che *non vi possono essere scambi tra colonne consecutive che diminuiscano il valor massimo* v, *qualora in* A *vi siano due traiettorie di valor massimo con i rispettivi gradini non adiacenti.* In tal caso dunque l'ordinamento delle colonne di A è, *in senso stretto*, un minimo *relativo* in I_1. Tale è ad esempio il caso di una A pseudo-circolante, per $n > 2$.

16. Minimalità relativa, in senso lato, dell'ordinamento di Johnson-Bellman.

Supponiamo ora che *le colonne della* A *siano già state ordinate con la regola di Johnson-Bellman* (n. 13).

Allora, tanto dalla condizione $a_{1k} < a_{1i}$, quanto da quella $a_{2i} < a_{2k}$, che figurano nelle (15.8), (15.10) e rispettivamente nelle (15.9), (15.11), consegue che *il taglio* t *deve cadere fra le colonne di posti* i *e* k. Pertanto:

$$a_{2i} \geq a_{1i}, \quad a_{1k} \geq a_{2k},$$

e quindi sommando

$$a_{2i} + a_{1k} \geq a_{1i} + a_{2k},$$

ossia

$$a_{2i} - a_{2k} \geq a_{1i} - a_{1k}, \qquad a_{1k} - a_{1i} \geq a_{2k} - a_{2i}.$$

Dunque non possono essere soddisfatte nè le (15.10), nè le (15.11), ossia *non può verificarsi il caso c) del Teorema* 1, *del n.* 15.

D'altra parte, ad esempio tenendo presenti le (15.1), (15.2), si riconosce che:

$$s_r - s_{r+1} = a_{2,r} - a_{1,r+1}. \tag{16.1}$$

Ponendo nella (16.1) $r = i, i + 1, \ldots, k - 1$ e sommando le relazioni ottenute membro a membro, si ottiene:

$$s_i - s_k = a_{2i} - a_{1k} + (a_{2,i+1} - a_{1,i+1}) + \ldots + (a_{2,k-1} - a_{1,k-1}). \tag{16.2}$$

Vediamo ora se può verificarsi il caso *a*) del Teorema 1, ossia se possono essere verificate le (15.8). Fra l'altro dovrebbe essere:

$$a_{2i} - a_{2k} < s_i - s_{i+1} + a_{1i} - a_{1k},$$

ossia, per la (16.1), ove si ponga $r = i$,

$$a_{1,i+1} + a_{1k} < a_{1i} + a_{2k}.$$

D'altra parte, essendo per la prima delle (15.8) la colonna di posto k a destra del taglio t, si ha:

$$a_{2k} \leq a_{1k},$$

cosicchè, sommando le ultime due diseguaglianze membro a membro, risulta:

$$a_{1,i+1} < a_{1i}.$$

Dunque *il taglio t deve cadere fra le colonne di posti i*, $i + 1$, cosicchè:

$$a_{2,i+1} - a_{1,i+1} \leq 0, \qquad \ldots, \qquad a_{2,k-1} - a_{1,k-1} \leq 0,$$

e quindi, sommando queste diseguaglianze membro a membro con la (16.2):

$$s_i - s_k \leq a_{2i} - a_{1k}.$$

Se le (15.8) fossero tutte verificate, dovrebbe fra l'altro essere:

$$a_{2i} - a_{2k} < s_i - s_k \leq a_{2i} - a_{1k},$$

ossia:

$$a_{2k} > a_{1k},$$

e ciò è assurdo, giacchè la colonna di posto k deve essere a destra del taglio t. Dunque *il caso a) del Teorema* 1 *non può verificarsi.*

Analogamente si tratta il caso b). Infatti dalle (15.9) segue in particolare:

$$a_{1k} - a_{1i} < s_k - s_{k-1} + a_{2k} - a_{2i},$$

ossia, per la (16.1), ove si ponga $r = k - 1$:

$$a_{2,k-1} + a_{2i} < a_{2k} + a_{1i}.$$

D'altra parte, essendo per la prima delle (15.9) la colonna di posto i a sinistra del taglio t, si ha:

$$a_{1i} \leq a_{2i},$$

cosicchè, sommando membro a membro:

$$a_{2,k-1} < a_{2k}.$$

Dunque *il taglio t deve cadere fra le colonne di posti* $k - 1$ *e* k.

Ma allora:

$$a_{2,i+1} - a_{1,i+1} \geq 0, \quad \ldots, \quad a_{2,k-1} - a_{1,k-1} \geq 0,$$

e sommando queste diseguaglianze membro a membro con la (16.2), si ottiene:

$$s_i - s_k \geq a_{2i} - a_{1k}.$$

Quindi, se tutte le (15.9) fossero verificate, dovrebbe fra l'altro essere:

$$a_{1k} - a_{1i} < s_k - s_i \leq a_{1k} - a_{2i},$$

ossia:

$$a_{1i} > a_{2i},$$

contraddicendo l'ipotesi che la colonna di posto i sia a sinistra del taglio t. Dunque *non può verificarsi neppure il caso b) del Teorema* 1, *del n.* 15. Riassumendo si ha il seguente:

TEOREMA 2: *L'ordinamento di Johnson-Bellman delle colonne di una g-matrice A con due sole righe è, in senso lato, un minimo relativo in* I_1.

17. Sub-g-matrici ottimali di una g-matrice ottimale.

Sia A una g-matrice $m \times n$ e l'ordinamento delle sue n colonne sia uno di quelli (« ottimali ») per cui è minimo il valor massimo delle traiettorie da $(1, 1)$ ad (m, n).

Consideriamo (v. fig. 17.1) una sua traiettoria τ di valore massimo, con i suoi μ gradini, in corrispondenza delle colonne di posti $j_1, j_2, \ldots, j_\mu$, con $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_\mu \leq n$; $\mu \leq m - 1$.

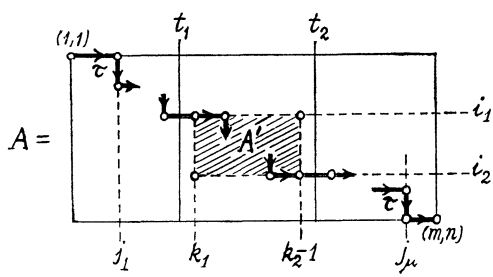


Fig. 17.1

Un taglio verticale t_1 fra le colonne di posto k_1 e $k_1 - 1$ della A $(1 \leq \leq k_1 \leq n + 1)$ intersecherà la τ in corrispondenza della riga di posto i_1.

Consideriamo due tagli siffatti t_1 e t_2 (il primo dei quali preceda l'altro, cosicchè $k_1 \leq k_2$, $i_1 \leq i_2$) e la g-matrice A' formata dalle colonne della A di posti $k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2 - 1$ e dalle righe della A di posti $i_1, i_1 + + 1, \ldots, i_2$. È chiaro che *la porzione della* τ *contenuta in* A' *è una traiettoria di* A', anzi una sua traiettoria *di valore massimo*, altrimenti non lo sarebbe τ per la A.

Essendo per ipotesi ottimale l'ordinamento delle colonne della A, ci si può chiedere *se e quando sia ottimale anche l'ordinamento delle colonne della* A'.

È chiaro che la questione ha interesse solo *quando la g-matrice A ha almeno una riga in più della A'* (costituita da elementi distinti) e se la A' ha almeno due righe e due colonne, ossia se:

$$m - 2 \geq i_2 - i_1 \geq 1, \qquad k_2 - k_1 \geq 2. \tag{17.1}$$

Infatti è chiaro che, *se una delle condizioni suddette non è verificata, la risposta è* SEMPRE *affermativa.*

Quando invece le (17.1) sono verificate e l'ordinamento delle colonne di A' non è ottimale, può accadere che nella matrice $\bar{A}$, differente dalla A per il riordinamento (ottimale per A') delle colonne comuni con A', la τ non sia più una traiettoria di valore massimo. Inoltre il nuovo valore massimo v può essere superiore a v.

Che le circostanze suddette si possano effettivamente verificare, è confermato dal seguente esempio di g-matrice ottimale:

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ \downarrow & & \\ 2 & \rightarrow 2 & 0 \\ & \downarrow \; A' & \\ 1 & 3 \longrightarrow & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} & t_1 & \qquad t_2 \end{array} \end{array}, \text{ per la quale } \quad v = 8,$$

e dove non è ottimale l'ordinamento delle colonne della sub-g-matrice quadrata $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, compresa fra i tagli t_1, t_2. L'ordinamento ottimale di A' si ottiene scambiando le sue due colonne, ma questo scambio, operato sulle stesse colonne della A, la trasforma nella

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & 4 \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \\ 2 & 0 & 2 \\ & & \downarrow \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right], \text{ per la quale } \bar{v} = 10,$$

cosicchè l'ordinamento delle colonne della $\bar{A}$ non è ottimale. Si osservi come tale scambio abbia alterato non solo il valore, ma anche la forma della traiettoria di valore massimo.

Le considerazioni ed il controesempio precedenti fanno vedere che *la questione dell'ordinamento ottimale delle colonne di una g-matrice A non si può in generale* (per $m > 2$) *ricondurre a quella dell'ordinamento ottimale di alcune sue sub-g-matrici A', ad esempio quelle con due sole righe.*

Le stesse considerazioni fanno anche vedere come da questo punto di vista il caso $m = 2$ sia *eccezionale*, tanto che la regola di Johnson-Bellman si può pensare derivata dalla condizione di ottimalità per una matrice *quadrata* di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

che ovviamente si può scrivere:

$$a_{11} + a_{22} + \max(a_{12}, a_{21}) \leq \max(a_{11}, a_{22}) + a_{12} + a_{21},$$

e quindi, essendo:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} &= a_{11} + a_{22} + \max(a_{12}, a_{21}) + \min(a_{12}, a_{21}) = \\ &= \min(a_{11}, a_{22}) + \max(a_{11}, a_{22}) + a_{12} + a_{21}, \end{aligned}$$

equivale appunto alla:

$$\min(a_{11}, a_{22}) \leq \min(a_{12}, a_{21}). \tag{17.2}$$

La (17.2) non solo giustifica la regola di Johnson-Bellman per $m = 2$, ma fa vedere, ove si pensi allo schema del n. 13:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdots & \cdots & \longleftarrow & \cdot & \longleftarrow & \cdot & \longleftarrow & \cdot \end{array}\right],$$
$$t$$

che *nell'ordinamento di Johnson è addirittura ottimale l'ordinamento delle colonne di ogni submatrice della A.*

18. Un criterio di ordinamento ottimale per matrici di due colonne.

Consideriamo ora una matrice

$$A = (a, b) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_m & b_m \end{bmatrix},$$

con due sole colonne ed m righe. È facile verificare direttamente che l'ordinamento (a, b) delle sue colonne è ottimale solo se:

$$a_1 + b_m + \max \begin{Bmatrix} b_1 + b_2 + \ldots + b_{m-2} + b_{m-1} \\ a_2 + b_2 + \ldots + b_{m-2} + b_{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2 + a_3 + \ldots + a_{m-1} + b_{m-1} \\ a_2 + a_3 + \ldots + a_{m-1} + a_m \end{Bmatrix} = a_1 + \ldots + a_m + b_1 + \ldots + b_m -$$

$$- \min \begin{Bmatrix} a_2 + a_3 + \ldots + a_{m-1} + a_m \\ b_1 + a_3 + \ldots + a_{m-1} + a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 + b_2 + \ldots \qquad + b_{m-1} \end{Bmatrix} \leq a_1 + \ldots + a_m + b_1 + \ldots + b_m -$$

$$- \min \begin{Bmatrix} b_2 + b_3 + \ldots + b_{m-1} + b_m \\ a_1 + b_3 + \ldots + b_{m-1} + b_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 + a_2 + \ldots \qquad + a_{m-1} \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-2} + a_{m-1} \\ b_2 + a_2 + \ldots + a_{m-2} + a_{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_2 + b_3 + \ldots \qquad + b_m \end{Bmatrix} + b_1 + a_m,$$

ossia soltanto se:

$$(18.1) \quad \begin{cases} \min\,(b_2+b_3+\ldots+b_m;\ a_1+b_3+\ldots+b_m;\ \ldots;\ a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}) \leq \\ \leq \min\,(a_2+a_3+\ldots+a_m;\ b_1+a_3+\ldots+a_m;\ \ldots;\ b_1+b_2+\ldots+b_{m-1}). \end{cases}$$

È chiaro che la (18.1) fornisce un *criterio* per l'ordinamento ottimale della matrice A, essendo esso quello (a, b) o quello (b, a) secondo che la stessa (18.1) sia verificata oppure no. Entrambi gli ordinamenti sono ottimali se nella (18.1) vige il segno di uguaglianza.

Per $m = 2$ la (18.1) si riduce al criterio di ordinamento (17.2) di Johnson-Bellman.

Se il criterio fornito dalla (18.1), che per brevità possiamo scrivere $(a, b) \leq (b, a)$, fosse *transitivo*, ossia se anche per $m > 2$ sussistesse l'implicazione:

$$((a, b) \leq (b, a), \quad (b, c) \leq (c, b)) \Longrightarrow (a, c) \leq (c, a),$$

esso potrebbe servire per un ordinamento delle colonne di una qualsiasi matrice del tipo $m \times n$, anche per $m > 2$.

D'altra parte l'ordinamento così ottenuto *non è* necessariamente ottimale, come verificheremo su di un esempio per $m = 3$, cosicchè la questione della transitività della (18.1) diviene irrilevante.

Per $m = 3$ la (18.1) si scrive:

$$\begin{aligned} \min\,(b_2 + b_3;\ b_3 + a_1;\ a_1 + a_2) \leq \\ \leq \min\,(a_2 + a_3;\ a_3 + b_1;\ b_1 + b_2). \end{aligned} \tag{18.2}$$

Si consideri ora la g-matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 \longrightarrow 1 & 0 \\ \downarrow & \\ 0 \quad 2 \longrightarrow 3 & \\ & \downarrow \\ 2 \quad 2 \quad 1 & \end{bmatrix},$$

per la quale $v = 9$ e per la quale la (18.2) è soddisfatta (con l'uguaglianza) sia per le colonne 1ª e 2ª, che per le 1ª e 3ª, 2ª e 3ª. Malgrado ciò l'ordinamento delle colonne della A *non* è ottimale, mentre lo sono quelli delle g-matrici:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \downarrow & & \\ 3 & 0 & 2 \\ \downarrow & & \\ 1 \longrightarrow & 2 \longrightarrow & 2 \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \downarrow & & \\ 2 & 0 & 3 \\ \downarrow & & \\ 2 \longrightarrow & 2 \longrightarrow & 1 \end{bmatrix}$$

per le quali $v' = v'' = 8$.

Si osservi che l'ordinamento (non ottimale) delle colonne della A corrisponde all'ordinamento ottimale della matrice A^* con tre colonne e due righe, uguali rispettivamente alla somma della 1ª e 2ª e della 1ª e 3ª riga della A:

$$A^* = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

19. Scambî tra colonne che certamente non diminuiscono il valor massimo delle traiettorie, per $m > 2$.

Non essendo in possesso di una regola utile per l'immediato ordinamento ottimale delle colonne di una data g-matrice A, converrà per lo meno cercare di vedere se dall'ordinamento prescelto si possa passare ad un altro di minore valor massimo, con lo scambio di due colonne *adiacenti*. Un algoritmo che consenta tale verifica condurrà necessariamente alla determinazione degli ordinamenti di *minimo relativo* (in senso stretto) in I_1.

Per la ricerca di tale algoritmo potremo servirci di quelli già descritti per la determinazione delle traiettorie di valor massimo della A e per il calcolo del loro valore.

Converrà anzitutto scegliere un ordinamento *iniziale* A. Esso può ad esempio essere uno di quelli determinati (nell'ipotesi della sua transitività) dalla (18.1).

Sulla A mettiamo in evidenza tutte le traiettorie di valore massimo, con i loro tratti orizzontali ed i loro gradini.

Intanto è chiaro che sussiste il seguente

TEOREMA 1: *Non può diminuire il valor massimo v delle traiettorie lo scambio tra due colonne* (anche non adiacenti) *non contenenti gradini ed intersecanti il medesimo tratto orizzontale di* UNA *traiettoria di valor massimo della A.*

Infatti tale scambio lascia immutato il valore v di quella traiettoria, cosicchè il nuovo valor massimo v' non può essere inferiore a v.

Dal Teor. 1 consegue in particolare che: *solo lo scambio tra la* 1ª *e la n^a colonna può diminuire il valore massimo delle traiettorie di una matrice pseudo-circolante A.*

Sicchè, per $n > 2$, l'ordinamento delle colonne di una g-matrice pseudo-circolante A è sempre un minimo relativo (in senso stretto) in I_1 (vedi, per $m = 2$, la Oss. IV del n. 15).

Per $m = 2$, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè lo scambio fra la 1ª e la nª colonna di una pseudo-circolante A diminuisca il valor massimo v delle traiettorie, sono:

$$a_n < a_1, \qquad a_2 < a_{n+1}. \tag{19.1}$$

Si noti che la (19.1) implica la condizione di preferenza

$$\min(a_n, a_2) < \min(a_1, a_{n+1})$$

della nª alla 1ª colonna (che deriva dalla (17.2)), ma non viceversa.

Sempre per $m = 2$ e per una pseudo-circolante A, perchè lo scambio della 1ª con la nª colonna non sia vantaggioso (non diminuisca v) basta che sia:

$$\min(a_n + a_{n+1};\ a_{n+1} + a_1;\ a_1 + a_2) \leqslant a_2 + a_n. \tag{19.2}$$

Si noti che la (19.2) può essere verificata senza che lo sia la condizione

$$\min(a_1, a_{n+1}) \leq \min(a_n, a_2)$$

di preferenza della 1ª alla nª colonna, che deriva dalla (17.2). Ciò accade ad esempio se

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n+1} = 2,$$

come per la pseudo-circolante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

l'ordinamento delle cui colonne è un minimo relativo in senso lato in I_1, e per la quale $v = 14$. Infatti anche per la

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha $v' = v = 14$. Il minimo assoluto si ottiene con l'ordinamento (di Johnson):

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $v'' = 13$.

Tornando al caso generale, dal Teor. 1 deriva come corollario il

TEOREMA 2: *Affinchè lo scambio fra due colonne* ADIACENTI *possa diminuire v, è necessario che almeno una di esse contenga un gradino di* CIASCUNA *delle traiettorie di valore massimo.*

Fissata una traiettoria t di valor massimo v della A, gli scambi (fra colonne adiacenti) da esaminare sono dunque *due per ciascuno dei gradini della t*: quello che scambia la colonna del gradino con la precedente e quello che la scambia con la successiva. Dalle osservazioni precedenti consegue però che se in A vi sono più traiettorie t, t', ... di valore massimo v, *sono da scartare quei gradini della t alla cui colonna non sia appartenente od adiacente qualche gradino di un'altra traiettoria t' di valore massimo.*

20. Procedimento per ottenere un ordinamento relativamente minimale delle colonne.

Da quanto precede risulta che per diminuire v, se $m > 2$, conviene seguire il seguente *procedimento*:

1) Si sceglie un ordinamento iniziale $A = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ delle colonne a^j della g-matrice data, ad esempio quello ottenuto mediante la condizione di preferenza (18.1), usandola come se fosse transitiva.

2) Si calcolano le w_i e si verifica la eventuale ottimalità della A, col criterio esposto al n. 12.

3) Se la verifica precedente non assicura dell'ottimalità della A, si determinano le sue traiettorie di valore massimo ed il loro valore v, seguendo il procedimento in avanti e costruendo la g-matrice B (n. 3), oppure seguendo il procedimento all'indietro e costruendo la g-matrice C (n. 4).

4) Si scartano, in base al Teor. 2 del n. 19, gli scambi tra colonne adiacenti che sicuramente non diminuiscono v.

5) Si verifica se qualcuno degli scambi rimanenti fra colonne adiacenti diminuisca v. Se ciò non accade, l'ordinamento delle colonne della A risulta essere di minimo relativo, in senso ristretto.

6) Se una delle verifiche di cui alla fase 5) porta ad un ordinamento A' per cui $v' < v$, si ripetono per la A' le stesse fasi 2), 3), 4), 5), 6) sopra descritte. Si tenga presente che i numeri w_i, occorrenti per il controllo della fase 2), sono gli stessi già calcolati per la A.

OSSERVAZIONE I: Per quanto riguarda la verifica 5), da effettuarsi sulle g-matrici differenti dalla A per lo scambio di due colonne adiacenti,

si tenga presente che essa si può effettuare sfruttando in parte le g-matrici B e C già usate nella fase 3). Così, se le colonne in questione sono la i-esima e le k-esima ($k = i + 1$), per calcolare v' si può costruire la g-matrice:

$$H' = \left[\begin{array}{cc|cc} b_{1,i-1} & a_{1,k} & a_{1,i} & c_{1,k+1} \\ b_{2,i-1} & a_{2,k} & a_{2,i} & c_{2,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m,i-1} & a_{m,k} & a_{m,i} & c_{m,k+1} \end{array}\right],$$

ed usare il metodo misto descritto al n. 5, relativo al taglio t fra le colonne i-esima e k-esima. Si ha:

$$v' = \max\,(b'_{1i} + c'_{1k},\, b'_{2i} + c'_{2k},\, \ldots,\, b'_{mi} + c'_{mk}),$$

essendo:

$$b'_{1i} = a_{1k} + b_{1,i-1}; \quad b'_{2i} = a_{2k} + \max\,(b_{2,i-1},\, a_{1k}); \quad \ldots$$
$$\ldots \quad b'_{mi} = a_{mk} + \max\,(b_{m,i-1},\, a_{m-1,k});$$

$$c'_{1k} = a_{1i} + \max\,(c_{1,k+1},\, a_{2i}); \quad \ldots; \quad c'_{m-1\,k} = a_{m-1,i} +$$
$$+ \max\,(c_{m-1,k+1},\, a_{mi}); \quad c'_{mk} = a_{mi} + c_{m,k+1}.$$

Inoltre, sulla g-matrice:

$$(b^1, \ldots, b^{i-1}, b'^i \underset{t}{|} c'^k, c^{k+1}, \ldots, c^n),$$

risultano disegnate le traiettorie di valore massimo della g-matrice simile:

$$A' = (a^1, \ldots, a^{i-1}, a^k, a^i, a^{k+1}, \ldots, a^n),$$

utili eventualmente per la fase 3), relativa alla A'.

Si tenga presente che, se $i = 1$ oppure se $k = n$, dalla H' scompaiono (vanno sostituite da una colonna di zeri) la 1ª o rispettivamente la 4ª colonna.

Osservazione II: Giunti infine ad un ordinamento $A^{(h)}$ di minimo relativo in senso ristretto, si potrà fissare l'attenzione e ripetere le fasi 3), 4), 5), 6) su ciascuno degli eventuali ordinamenti $A^{(h+1)}$ delle colonne che, differendo da quello $A^{(h)}$ per uno scambio di colonne adiacenti, dànno luogo allo stesso valor massimo $v^{(h+1)} = v^{(h)}$ della $A^{(h)}$. Può infatti accadere che, a differenza di quello $A^{(h)}$, l'ordinamento $A^{(h+1)}$ non sia più di minimo relativo.

ESEMPIO: Per la g-matrice

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 9 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha

$$w_1 = 19 + 3 = 22, \quad w_2 = 18 + 2 = 20, \quad w_3 = 19 + 3 = 22,$$

e l'ordinamento iniziale A dato dalla (18.1) è:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 9 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per esso:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & = & 4 & = & 9 & = & 13 & - & 19 \\ | & & | & & | & & \| & & \\ 3 & & 8 & & 12 & & 22 & = & 24 \\ | & & & & & & | & & \| \\ 9 & - & 16 & - & 20 & & 23 & & 25 \end{bmatrix},$$

sicchè $v = 25$ e sulla B risulta disegnata l'unica traiettoria di valore massimo. Dal suo esame risulta che possono diminuire il valore massimo solo gli scambi (a^3, a^4) ed (a^4, a^5). Con essi si ottengono dalla A le g-matrici A' ed A'', per le quali rispettivamente $v' = 25$ e $v'' = 29$, cosicchè l'ordinamento delle colonne della A è di minimo relativo in senso ristretto.

APPENDICE

SUI PROBLEMI DI ORDINAMENTO NELLA ORGANIZZAZIONE DI UN IMPIANTO INDUSTRIALE

21. La g-matrice A dei tempi parziali di lavorazione.

Con riferimento a quanto s'è detto (brevemente nella premessa e con maggiori dettagli ai nn. 8-11) sulle questioni di ricerca operativa che hanno dato origine al presente lavoro, converrà osservare anche quanto segue.

L' « ufficio » di cui si è parlato nella precedente schematizzazione può in realtà rappresentare la *catena di produzione* di un impianto industriale, destinato a produrre n diversi prodotti finiti od *articoli* (quelli che sopra erano chiamati »utenti »). Ciascuno di questi articoli si ottiene a partire da un materiale iniziale (ad esempio un semilavorato) sottoponendolo

ad m successive trasformazioni. Gli « sportelli » a_i rappresentano allora le m *macchine* od attrezzature capaci di eseguire quelle trasformazioni.

Abbiamo ordinato sia gli sportelli (le macchine) che gli utenti (gli articoli), supponendo che ciascun sportello debba servire nello stesso ordine gli n utenti e che ciascun utente debba essere servito nello stesso ordine dagli m sportelli. Ciò significa che per ciascun articolo il materiale iniziale debba subire lo stesso numero m di trasformazioni, e che queste debbano essere sempre realizzate successivamente dalla 1ª, 2ª, ..., mª macchina, non essendo ammessi scavalcamenti tra i semilavorati destinati alla produzione dei diversi articoli.

L'elemento a_{ij} della matrice A è la misura dell'intervallo di tempo occorrente alla macchina a_i per eseguire la i-esima trasformazione occorrente alla produzione dell'articolo a^j. In a_{ij} è compreso l'intervallo di tempo occorrente al trasporto del semilavorato da a_{i-1} ad a_i ed all'eventuale modifica dell'attrezzatura, occorrente per passare dalla lavorazione dell'articolo a^{j-1} a quella di a^j. Comunque la A si può chiamare *matrice dei tempi* (parziali) *di lavorazione.*

22. Problemi di ordinamento ottimale nell'organizzazione dell'impianto, per la produzione di un solo ciclo di articoli.

Supponiamo dapprima che l'impianto debba produrre un solo esemplare di ciascun articolo. Il numero v misura allora il *tempo totale di lavorazione*, ossia l'intervallo di tempo intercorrente fra l'istante in cui inizia la lavorazione del 1° articolo a^1 e l'istante in cui termina la lavorazione dell'n° articolo a^n.

Se la catena di produzione dell'impianto si suppone già esistente, ordinare le colonne della A in modo da rendere minimo v significa *profittare della scelta dell'ordine di lavorazione degli n articoli per diminuire il tempo totale di lavorazione v.*

Se il costo di alcune macchine è particolarmente elevato, potrà invece interessare un ordinamento della lavorazione tale da *rendere minimo il loro tempo totale di riposo* (« pre-riposo », n. 9).

In altri casi (ad esempio per questioni di ingombro) potrà invece essere conveniente *rendere minimo il massimo tempo di attesa* (« pre-attesa », n. 9) di alcuni articoli.

In questa schematizzazione di problemi di « organizzazione aziendale » è interessante osservare a posteriori come, ammesso già costruito l'im-

pianto, l'economia realizzabile con un ordinamento ottimo della successione delle n lavorazioni risulti vincolata al valore dei successivi tempi parziali di lavorazione, ossia alla successione ordinata delle coordinate di ciascuno dei vettori-colonna della matrice A. Sicchè *l'organizzazione aziendale può e deve intervenire* (ammesso già costruito l'impianto) *addirittura in fase di progettazione* delle successive trasformazioni e quindi di determinazione dei tempi parziali di lavorazione $a_{ij}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$) che la materia prima iniziale deve subire successivamente presso le diverse macchine $a_1, a_2, \ldots, a_m$ per generare il prodotto finito a^j.

Può ad esempio darsi che agendo in tal modo sia possibile disporre poi l'ordine di lavorazione degli n articoli in guisa che la A risulti pseudocircolante, od almeno tale che sulle sue diagonali secondarie gli elementi risultino ordinati per valori non decrescenti dall'alto al basso, così da render nulli tutti i costosi tempi di preriposo delle macchine. Allora, se il massimo tempo d'attesa non è troppo grande rispetto alle caratteristiche dell'impianto, *non interessa più minimizzare il tempo totale v di lavorazione*, giacchè il costo della produzione dipenderà dalla somma dei tempi totali di lavorazione delle singole macchine, e ciascuno di questi tempi sarà il minimo possibile, essendo nulli tutti i tempi parziali di preriposo successivi al primo. Anzi, questo primo tempo parziale di preriposo non conta, giacchè è solo al suo scadere che quella macchina comincerà effettivamente a lavorare, proseguendo poi senza interruzione sino alla fine le n lavorazioni ad essa affidate.

23. Il tempo di uscita di un ciclo, nel caso di un numero illimitato di cicli successivi ed uguali.

Supponiamo ora che l'impianto industriale di cui sopra debba produrre non un solo esemplare di ciascuno degli n articoli, ma una quantità tanto grande di ciascuno di essi da poterla praticamente considerare *illimitata*. Supponiamo inoltre che per tale produzione l'impianto possa funzionare *ininterrottamente*.

Si richiederà però che siano fissati i rapporti

$$r_1 : r_2 : \ldots : r_n$$

fra i numeri r_j dei diversi articoli da produrre in un certo periodo di tempo T. I numeri r_j sono dunque interi dati, che possiamo addirittura supporre primi fra loro.

Ad evitare le perdite di tempo derivanti da cambi troppo frequenti dell'attrezzatura delle macchine, sembra ragionevole supporre conveniente impostare dapprima la produzione di r_1 esemplari del 1° articolo, poi di r_2 esemplari del secondo, e così via. In seguito considereremo quindi come un unico articolo a^j il *blocco* degli r_j articoli dello j-esimo tipo.

Supponiamo al solito che per ciascuna delle m macchine a_i siano costanti (e quindi trascurabili ai fini della successiva ottimizzazione) gli intervalli di tempo occorrenti per modificare l'attrezzatura passando dalla lavorazione di un tipo di articolo a quella del tipo successivo.

Supponiamo inoltre nota la tabella dei tempi parziali di lavorazione di questi (blocchi di) articoli $a^1, \ldots, a^n$, ossia la matrice $A' = (a'_{ij}) = (r_j \cdot a_{ij})$.

Se la produzione dovesse limitarsi ad r_j esemplari di ciascun tipo di articolo, l'organizzazione ottima della produzione si potrebbe — come abbiamo già visto — basare sulla considerazione del tempo totale v di lavorazione, ossia dell'intervallo di tempo intercorrente dall'istante in cui inizia la lavorazione del 1° articolo a^1 all'istante in cui termina la lavorazione dell'ultimo articolo a^n. Sappiamo come sia allora essenziale l'ordinamento degli articoli, ad esempio per rendere minimo v.

Si deve però ora tener presente che quello considerato è solo un « ciclo » di produzione, e che questi cicli si susseguono *ininterrottamente*.

Intanto ciò fa sì che l'ordinamento degli articoli interessi eventualmente solo a meno di una permutazione circolare, sicchè invece di $n!$ ordinamenti basterà prenderne in considerazione soltanto $(n-1)!$, e come primo articolo se ne potrà prendere uno qualsiasi. Dunque, in particolare, la questione dell'ordinamento può interessare solo se $n > 2$.

Inoltre, una volta avviato il processo di produzione continuo, l'intervallo di tempo che interessa ai fini della produzione non è più quello totale v di lavorazione di un ciclo, bensì quello *di uscita* t del ciclo stesso, intercorrente dalla fine della lavorazione dell'ultimo articolo di un ciclo alla fine della lavorazione dell'ultimo articolo del ciclo successivo. Infatti nell'intervallo di tempo v l'impianto effettua contemporaneamente le diverse lavorazioni sugli articoli di più cicli successivi.

24. Analogia idraulica e minimizzazione del tempo di uscita, regolando l'andamento della produzione con l'artificio dell'articolo fittizio. Esempio.

Il processo produttivo si può paragonare al moto di un « liquido » (le materie prime, all'entrate; gli articoli finiti, all'uscita) attraverso una « condotta » (l'impianto industriale).

Una quantità interessante ai fini della produzione è la *velocità media di efflusso* (o »velocità di produzione »), ossia il rapporto fra la quantità di liquido uscente ed il tempo impiegato ad uscire. Fissata la quantità uscente, ad esempio il ciclo $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$, una misura di tale velocità è fornita appunto da $1|t$, dove t è il *tempo di uscita* suddetto (n. 23).

Le m macchine che operano successivamente le trasformazioni dei materiali iniziali in articoli finiti, si possono pensare come *diaframmi* che determinano tale velocità di efflusso. Infatti i materiali occorrenti alla produzione del ciclo $(a^1, \ldots, a^n)$ impiegano un tempo

$$v'_i = a'_{i1} + a'_{i2} + \ldots + a'_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

per essere trasformati dalla macchina a_i, ossia per attraversare l'i-esimo diaframma. Ne consegue che *t non può essere inferiore al massimo dei numeri v'_i.*

La suddetta analogia « idraulica » permette di prevedere, per il funzionamento della catena di produzione, un breve periodo iniziale di *assestamento* (destinato alla produzione di uno o più cicli di articoli) ed un successivo periodo di funzionamento regolare o *stabile*, nel quale (a meno di imprevisti, come guasti alle macchine, scioperi, ecc.) ogni ciclo $(a^1, \ldots, a^n)$ di articoli impiega lo stesso tempo ad *uscire* dall'impianto.

È anche facile vedere che, *se gli spazi d'attesa sono abbastanza capaci*, si può regolare il funzionamento dell'impianto in modo che il tempo d'uscita di un ciclo di articoli sia il minimo possibile:

$$t = \max_i v'_i,$$

assicurando contemporaneamente la stabilità del processo.

Basta perciò pensare di aggiungere ad esempio all'inizio di ogni ciclo di n articoli successivo al primo un *articolo fittizio* a^0, fissandone i tempi parziali di lavorazione in modo che sia:

$$a_{i,0} = (\max_{r=1,2,\ldots,m} v'_r) - v'_i.$$

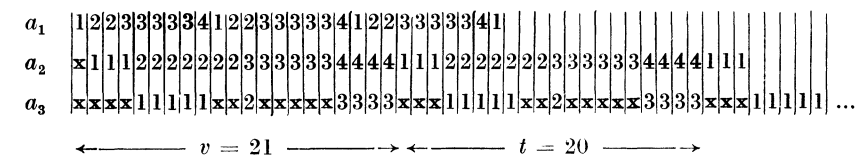
Allora ogni ciclo completo $(a^0, a^1, \ldots, a^n)$ impiega lo stesso tempo t ad attraversare ogni diaframma, e quindi finalmente anche ad uscire dall'impianto.

Anzi, così si riconosce a posteriori che (se gli spazi di attesa sono abbastanza capaci) *in un processo continuo di produzione il tempo di uscita di ciascun ciclo di articoli non dipende affatto dal loro ordinamento.*

ESEMPIO: Produzione di più cicli di 4 articoli (a^1, a^2, a^3, a^4) con una catena di 3 macchine (a_1, a_2, a_3), essendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} v_1 = 9 \\ v_2 = 20 = t. \\ v_3 = 10 \end{matrix}$$

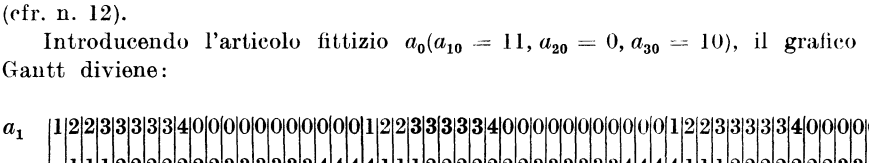
Il « grafico di Gantt » [4]) dell'andamento della produzione è:



e diviene stabile dopo il 1° ciclo. Si noti però che la maggior velocità di efflusso attraverso a_1 crea un intasamento nello spazio d'attesa tra a_1 ed a_2. Volendolo evitare, si deve imporre ad a_1 un tempo di riposo $v_2 - v_1 = 11$ per ogni ciclo successivo al primo. Inoltre la minor velocità di efflusso attraverso a_2 costringe automaticamente a_3 ad un tempo totale di riposo $v_2 - v_3 = 10$ per ogni ciclo successivo al primo.

L'ordinamento delle colonne di A è tale da rendere minimo $v = 21 = w_2$ (cfr. n. 12).

Introducendo l'articolo fittizio $a_0(a_{10} = 11, a_{20} = 0, a_{30} = 10)$, il grafico di Gantt diviene:



Fin dal 2° ciclo il tempo di attraversamento di ogni diaframma diviene uguale a $t = 20$. I tempi di riposo delle macchine sono i minimi possibili e, per ciascuna di esse, sono posti all'inizio della lavorazione di ciascun ciclo di articoli e coincidono con i tempi di lavorazione dell'articolo fittizio.

Permangono invece, per gli articoli effettivi, anche i tempi di attesa successivi al primo e coincidono con gli elementi $e_{ij}(i, j > 1)$ della matrice E, calcolati (come descritto al n. 9) a partire dalla matrice

$$\hat{A} = (\hat{a}_{ij}) = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 6 & 4 \\ 10 & 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

[4]) Cfr. C. W. CHURCHMAN, R. L. ACKOFF, E. L. ARNOFF: *Eléments de recherche opérationnelle* (Paris, Dunod, 1961), p. 415.

Si noti che nella $\hat{A}$ si è assunto come tempo di lavorazione parziale $\hat{a}_{20}$ dell'articolo fittizio a_0 quello che si ottiene aumentando $a_{20} = 0$ del tempo (unitario) di attesa di a_0 prima di a_2, che deriva dall'assestamento.

L'esistenza di questi tempi di attesa e la loro localizzazione fanno sì che la produzione possa seguire l'andamento stabile descritto dal precedente grafico di Gantt solo se gli spazi d'attesa fra a_1 ed a_2 e fra a_2 ed a_3 sono capaci di contenere rispettivamente due articoli (contemporaneamente) ed un solo articolo.

25. Alcuni accorgimenti adatti e problemi da risolvere per migliorare il rendimento dell'impianto.

Si tenga presente che gli accorgimenti adatti ad aumentare il rendimento degli impianti si possono predisporre a diversi livelli, e precisamente:

a) in fase di progettazione dell'impianto (numero e tipo delle macchine, capienza ed attrezzatura degli spazi d'attesa);

b) in fase di progettazione degli articoli da fabbricare (determinazione dei modi e dei tempi di lavorazione);

c) in fase esecutiva, stabilendo l'ordine di fabbricazione ed i rapporti tra le quantità dei diversi articoli da produrre.

Abbiamo già accennato all'importanza che può avere, per conseguire la massima velocità di produzione, l'ampiezza degli spazi d'attesa, determinata nella fase *a*). D'altra parte il numero ed il tipo delle macchine condizionano anche la fase *b*), e quindi la determinazione dei tempi parziali di lavorazione. Da essi dipende essenzialmente il tempo di uscita t di un ciclo di articoli, e quindi il costo del ciclo, a parità di costo orario di funzionamento dell'impianto.

Per diminuire t occorre, in fase *b*), ripartire giudiziosamente la lavorazione di ciascun articolo tra le diverse macchine.

Sarebbe desiderabile che ciascuna macchina impiegasse lo stesso tempo

$$v'_i = \sum_{1}^{n}{}_k \, a'_{ik}$$

nella lavorazione dei diversi articoli. Sarebbero così eliminati i tempi (improduttivi) di riposo delle macchine, uguali per ciascuna di esse ai tempi parziali di lavorazione dell'articolo fittizio di cui al n. 24.

Supponiamo ad esempio già esistente l'impianto e già fissati i tempi parziali di lavorazione a_{ik} *per una unità* di ciascuno di una serie di n articoli. Non siano invece ancora fissati i numeri r_j di cui al n. 23. Da quanto

precede risulta che se il sistema di m equazioni lineari ed omogenee:

$$x^0 = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ammette soluzioni razionali positive, ognuna di queste $(x_1, \dots, x_n, x_0)$ fornisce (per una scelta conveniente dell'intero k) una possibile n-pla degli interi r_j:

$$r_1 = kx_1, \dots, r_n = kx_n,$$

tali che

$$v'_i = t = kx_0.$$

La richiesta dei diversi articoli sul mercato potrà poi suggerire quale delle n-ple (r_j) possibili vada effettivamente usata [5]).

Comunque, in fase b) occorre studiare i piani di lavorazione degli articoli e quindi determinare la tabella $A' = (a'_{ij})$ dei tempi parziali di lavorazione in modo da rendere minimo il tempo di uscita $t = \max_i v'_i$ di un ciclo della produzione.

---

[5]) Per chiarire meglio quanto s'è detto sarà opportuno il seguente

CONTROESEMPIO: Con riferimento all'esempio del n. 24, supponiamo che la g-matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

sia quella dei tempi parziali di lavorazione *per una unità* di ciascuno dei 4 articoli. Se si volesse impostare la produzione per blocchi di articoli, in modo da uguagliare i tempi di attraversamento delle 3 macchine da parte di un ciclo (di blocchi) di articoli, si dovrebbero scegliere gli interi r_1, r_2, r_3 tra le soluzioni positive del sistema omogeneo:

$$x_0 = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 5x_1 + x_2 + 4x_3,$$

ossia tra quelle positive del sistema:

$$11x_1 + 3x_3 - x_4 = 0, \qquad 11x_2 + x_3 + 7x_4 = 0.$$

Purtroppo però soluzioni siffatte *non esistono*, come si riconosce facilmente osservando che nello spazio cartesiano $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, 1)$ la retta di equazioni non omogenee:

$$11x + 3z - 1 = 0, \qquad 11y + z + 7 = 0,$$

non possiede punti di coordinate non omogenee x, y, z positive,

A parità di velocità di produzione, ossia di tempo d'uscita, *il rendimento dell'impianto si potrà aumentare diminuendone il costo orario di funzionamento.* Una tale diminuzione si potrà ad esempio conseguire diminuendo i *tempi di inattività* (pre-riposo) *delle macchine* (il costo orario dei quali, una volta avviato l'impianto, non può essere molto inferiore a quello dei tempi di servizio) ed i *tempi di attesa degli articoli* (il cui costo può uguagliare quello dei tempi di lavorazione; inoltre così diminuisce la lunghezza della catena di montaggio, ossia la capienza degli spazi d'attesa e quindi la spesa, da prevedere in fase *a*), per la costruzione, la manutenzione ed il funzionamento dell'impianto).

Sarebbe addirittura desiderabile che in fase *b*) i tempi parziali di lavorazione fossero determinati in modo che esista un ordinamento degli articoli capace di rendere *circolante* (e non solo pseudo-circolante) la matrice A'. Verrebbero così eliminati *tutti* i tempi di inattività delle macchine e quelli di attesa degli articoli. Inoltre, come previsto al n. 23, tale ordinamento sarebbe determinato a meno di una permutazione circolare.

Si tenga presente che, volendo soddisfare a questa esigenza, in fase *b*) si possono fissare ad arbitrio solo un numero di tempi di lavorazione a'_{ij} uguale al maggiore dei due interi m, n. Inoltre debbono essere uguali fra loro tanto le somme v'_i degli elementi di una riga quanto le somme u'_j degli elementi di una colonna della g-matrice A'.

26. L'ordinamento degli articoli può diminuire solo i loro tempi di attesa.

D'altra parte è chiaro che *una diminuzione dei tempi di inattività delle macchine* NON PUO *realizzarsi in fase c) con un opportuno ordinamento degli articoli.* Infatti, se i tempi parziali di lavorazione a'_{ij} sono stati già fissati, restano determinati tanto il tempo *minimo* di efflusso di un ciclo:

$$t = \max_i v'_i,$$

quanto i tempi totali *minimi* di inattività (= riposo):

$$d_i = t - v'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

delle m macchine destinate alla lavorazione degli n articoli di un ciclo. Ed abbiamo visto come tali minimi possano effettivamente essere raggiunti, *in modo indipendente dall'ordinamento degli n articoli*, ad esempio

(n. 24) regolando l'andamento del processo produttivo con l'artificio dell'*articolo fittizio* a^0, i cui tempi parziali di lavorazione $a_{0i} = d_i$ (di cui almeno uno nullo) sono in realtà gli unici tempi di inattività delle macchine a_i. Con tale artificio l'eventuale tempo di inattività di ciascuna delle m macchine a_i viene portato *all'inizio* della lavorazione di ogni ciclo $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ di articoli.

La circostanza che l'introduzione dell'articolo fittizio non aumenti il tempo di efflusso, sta a significare la convenienza di impostare, contemporaneamente a quella degli n articoli $a^1, a^2, \ldots, a^n$, anche la effettiva produzione di un altro articolo (o gruppo di articoli) a^0, con i tempi parziali di lavorazione (minori od) uguali a quelli dell'articolo fittizio.

D'altra parte l'esame del grafico di Gantt dell'andamento della produzione regolata con l'artificio dell'articolo fittizio (v. esempio alla fine del n. 24) fa vedere come anche dopo la stabilizzazione permangano dei tempi di attesa degli articoli diversi da quelli, minimi, derivanti necessariamente (come vedremo fra poco) dalla differenza dei loro tempi totali di lavorazione. Si può perciò ritenere che — in fase *c*) — sia possibile *profittare dell'ordinamento degli articoli effettivi solo per rendere minimi* (il massimo o la somma dei quadrati di) *tali tempi d'attesa.*

27. Regolazione della produzione, con ripartizione dei tempi totali minimi di inattività delle macchine e di attesa degli articoli.

Si può anche pensare che ogni articolo effettivo a^j sia (ad es.) *preceduto* da un articolo fittizio, assegnando a questi n articoli fittizi $\hat{a}^j$ dei tempi parziali di lavorazione x_{ij} positivi e tali che:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{27.1}$$

Ciò equivale ad assegnare a ciascun articolo effettivo a^j un *tempo parziale fittizio di lavorazione*:

$$a''_{ij} = x_{ij} + a'_{ij}, \tag{27.2}$$

tale che per ciascuna macchina a_i sia sempre uguale a t il tempo totale di lavorazione di un ciclo di articoli:

$$a''_{i1} + \ldots + a''_{in} = a'_{i1} + \ldots + a'_{in} + d_i = v'_i + d_i = t.$$

Si vengono così a *ripartire i tempi totali minimi di inattività di ciascuna delle m macchine all'inizio della lavorazione di ciascuno degli n articoli*, ad ogni ripartizione siffatta corrispondendo una soluzione *non negativa* del sistema (27.1). Si osservi che le incognite effettive sono al più $(m - 1) \cdot n$, giacchè uno almeno dei numeri d_1 è nullo.

Anche le somme degli elementi delle colonne della A':

$$a'_{1j} + a'_{2j} + \dots + a'_{mj} = u'_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

sono, come le v'_i, invarianti per una permutazione delle sue righe o delle sue colonne, ed hanno significato operativo, giacchè rappresentano i *tempi totali di lavorazione* di ciascuno degli articoli a^j. Sia:

$$u = \max_j u'_j, \qquad e_j = u - u'_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

I numeri non negativi e_j (uno almeno dei quali è nullo) sono la misura dei *tempi totali minimi di attesa* di ciascuno a^j degli n articoli [6]). È chiaro

---

[6]) Si pensi, dualizzando l'analogia « idraulica » del n. 24, ad un fluido costituito da una successione infinita di catene $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ di macchine il cui avanzamento in una condotta sia ostacolato da una successione ordinata di n diaframmi $(a^1, \dots, a^n)$.

Assunta come unità di misura della quantità di fluido la catena $(a_1, \dots, a_m)$ di macchine, la velocità media di attraversamento del diaframma a^j è l'inverso del tempo di attraversamento, ossia del tempo totale di lavorazione u'_j dell'articolo a^j da parte delle m macchine della catena. Quello che interessa è la velocità di efflusso del fluido dalla condotta (la *velocità media di lavorazione*) e questa non può essere superiore a quella minima di attraversamento dei diversi diaframmi. Sicchè il suo inverso non può essere inferiore al massimo u dei tempi totali u'_j di lavorazione, e le differenze $e_j = u - u'_j$ appaiono appunto come *tempi totali minimi d'attesa* di ciascun articolo a_j (attesa della lavorazione da parte della catena di macchine).

Il modello ora descritto non è del tutto adeguato alla descrizione del fenomeno reale, potendo la velocità di lavorazione essere ulteriormente *diminuita* (e quindi i tempi minimi d'attesa *aumentati*) dalla circostanza che in realtà si dispone di una sola catena di macchine e di una successione infinita di cicli di articoli. Così ad esempio la macchina a_1 può essere ancora impegnata nella lavorazione dell'articolo a^n di un ciclo, quando occorrerebbe (secondo il modello) che la macchina a_1 della seconda catena (ossia in realtà la stessa macchina a_1) iniziasse la lavorazione dell'articolo a^1 del ciclo successivo.

Ciò porta anche ad escludere (come si può riconoscere su esempi) che l'artificio di una *macchina fittizia* a_0 possa sempre regolare l'andamento della produzione rendendo minimi i tempi totali di attesa degli articoli e portandoli all'inizio della lavorazione di ciascun articolo.

che *anch'essi restano determinati in modo indipendente dall'ordinamento degli articoli.*

Con riferimento a quanto detto sopra, oltre alle (27.1) si possono imporre agli incrementi fittizi x_{ij} dei tempi parziali di lavorazione a_{ij} le condizioni:

$$x'_{1j} + x'_{2j} + \dots + x'_{mj} = e'_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{27.3}$$

Ciò equivale a supporre che per ciascun articolo a^j sia sempre uguale ad u il tempo fittizio totale di lavorazione da parte delle m macchine $(a_1, \dots, a_m)$:

$$a''_{1j} + a''_{2j} + \dots + a''_{mj} = a'_{1j} + \dots + a'_{mj} + e_j = u'_j + e_j = u.$$

In questo modo si vengono a *ripartire anche i tempi totali minimi di attesa di ciascun articolo all'inizio della sua lavorazione da parte di ciascuna delle m macchine* (non essendo però escluso che i tempi totali effettivi d'attesa risultino superiori ai minimi). Ogni ripartizione siffatta corrisponde ad una soluzione non negativa del sistema (27.3). Anche qui, essendo nulla almeno una delle e_j, i valori delle incognite x_{ij} da determinare sono al più $m \cdot (n - 1)$.

28. Condizioni di equilibrio occorrenti per la ripartizione suddetta. Esempio.

Ci si può chiedere se esistano soluzioni x_{ij} non negative del sistema di *tutte* le equazioni (27.1), (27.3).

Si osservi l'analogia di questo sistema con quello che interviene nella programmazione lineare, come condizione di ammissibilità nel « problema dei trasporti ». Le (27.1) assegnano i valori d_i delle somme degli elementi di ciascuna riga della matrice (x_{ij}); quelle (27.3) assegnano invece i valori e_j delle somme degli elementi di ciascuna colonna della stessa (x_{ij}).

Pertanto condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano soluzioni simultanee non negative dei due sistemi (27.1), (27.3), è che sia:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = e_1 + e_2 + \dots + e_n, \tag{28.1}$$

ossia che la somma dei tempi totali minimi di inattività delle m macchine eguagli la somma dei tempi totali minimi di attesa degli n articoli.

Sulla matrice A' si mettano in evidenza una riga (la i-esima) ed una colonna (la j-esima) per le quali siano massime le somme degli elementi. Sarà, per quanto precede:

$$t = v'_i, \qquad u = u'_j, \tag{28.2}$$

$$\begin{cases} d_r = v'_i - v'_r & (r = 1, 2, \dots, m), \\ u'_j - u'_s = e_r & (s = 1, 2, \dots, n), \\ u'_1 + \dots + u'_j + \dots + u'_n = v'_1 + \dots + v'_i + \dots + v'_m, \end{cases} \tag{28.3}$$

da cui, sommando le (28.3) membro a membro e tenendo conto delle (28.2), si ricava:

$$n \cdot u + d_1 + \dots + d_m = m \cdot t + e_1 + \dots + e_n. \tag{28.4}$$

Per la (28.4), la (28.1) equivale alla:

$$n \cdot u = m \cdot t. \tag{28.5}$$

Si osservi come la (28.1) o l'equivalente (28.5) possano interpretarsi come *condizioni di equilibrio* della catena di produzione. La (28.5) vuole infatti che siano uguali il tempo *totale* $m \cdot t$ di produzione ed il tempo *totale* $n \cdot u$ di lavorazione, di un ciclo di n articoli da parte delle m macchine della catena.

Pertanto: solo se la catena di produzione è *equilibrata*, si può regolare l'andamento del processo produttivo indipendentemente dall'ordinamento degli articoli ed in guisa che:

a) come col metodo dell'articolo fittizio, la velocità di produzione sia la massima possibile ed i tempi totali di inattività delle macchine siano i minimi possibili;

ed inoltre:

b) i tempi totali di inattività delle macchine siano ripartiti all'inizio della lavorazione di ciascun articolo e si possano considerare come tempi parziali d'attesa degli articoli stessi, la cui somma, per ciascun articolo, sia uguale al suo tempo totale minimo d'attesa e_j.

La scelta della ripartizione e dell'ordinamento degli articoli si potranno poi fare in modo da rendere minimi (i massimi, o la somma, o la somma dei quadrati de) gli eventuali ulteriori tempi d'attesa degli articoli, eccedenti i minimi suddetti.

ESEMPIO: Riprendiamo in esame l'esempio del n. 24, mettendo in evidenza i numeri v_i', u_j', d_i, e_j:

	$e_1 = 6$	$e_2 = 5$	$e_3 = 0$	$e_4 = 10$	$v_0 = 21$
$d_1 = 11$	1	2	5	1	$v_1 = 9$
$d_2 = 0$	3	7	6	4	$v_2 = 20 = t$
$d_3 = 10$	5	1	4	0	$v_3 = 10$
$u_0 = 21$	$u_1 = 9$	$u_2 = 10$	$u = u_3 = 15$	$u_4 = 5$	

Si osservi che se le quantità d_i si interpretano come tempi di lavorazione di un articolo fittizio a^0, il suo tempo totale di lavorazione $u_0 = 21$ supera il massimo $u = u_3 = 15$ dei tempi di lavorazione degli articoli effettivi.

Analogamente, se la quantità e_j si interpretano come tempi parziali di lavorazione di una »macchina fittizia» a_0, il tempo $v_0 = 21$ del suo attraversamento da parte di un ciclo di articoli effettivi $a^1, \ldots, a^4$) supera il massimo $t = v_2 = 20$ dei tempi di attraversamento delle macchine effettive.

D'altra parte la catena di produzione è *equilibrata*, essendo:

$$n \cdot u = 4 \cdot 15 = 60 = 3 \cdot 20 = m \cdot t.$$

Il sistema delle (27.1), (27.3), dovendo essere:

$$x_{i3} = x_{2j} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3: j = 1, 2, 3, 4),$$

riguarda solo le 6 incognite x_{ij} con $i \neq 2$, $j \neq 3$ ed assegna le somme delle righe e delle colonne della loro matrice, come ricordato dal seguente schema:

x_{11}	x_{12}	x_{14}	11
x_{31}	x_{32}	x_{34}	10
6	5	10	21

Assumiamo ad esempio la soluzione:

$$(x_{ij}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad (i \neq 2, j \neq 3),$$

cosicchè la tabella dei tempi fittizi di lavorazione diviene:

$$A'' = \begin{bmatrix} 4+1 & 1+2 & 5 & 6+1 \\ 3 & 7 & 6 & 4 \\ 5+2 & 1+4 & 4 & 0+4 \end{bmatrix}.$$

Il seguente grafico di Gantt fa vedere come, dopo un primo ciclo di assestamento, l'andamento della produzione si stabilizzi:

| | | |

[9] LEVY F. K., THOMPSON G. L., WIEST J. D.: *A mathematical development of critical path scheduling*. In « Factory Scheduling », Prentice Hall, 1963.

[10] ASHLEY W. F., AUSTIN M. T.: *Case studies in network planning, scheduling and control of research and development projects*. Chapt. 12 of « Oper Res. in Research and Development ». Ed. by DEAN B. V., New York, Wiley, 1963.

[11] SISSON R. L.: *Sequencing Theory*. In « Progress in O. R. », Vol. I, ed. by ACKOFF R. L., New York, Wiley, 1963.

[12] KAUFMANN A.: *Méthodes et modéles de la recherche opérationnelle*. Vol. II (sez. 4: « Solution de certains problémes d'ordennancement »), Paris, Dunod, 1964.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 marzo 1966.