

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

## **Sui gruppi localmente finiti con duale**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 36, n° 2 (1966), p. 223-242

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1966\\_\\_36\\_2\\_223\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_223_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## SUI GRUPPI LOCALMENTE FINITI CON DUALE

di GIOVANNI ZACHER (a Padova)

Un gruppo  $G$  dicesi dotato di duale se esiste un gruppo  $\bar{G}$  ed un isomorfismo duale  $\varphi$  del reticolo  $\mathfrak{L}(G)$  dei sottogruppi di  $G$  su quello di  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ , vale a dire una corrispondenza biunivoca  $\varphi$  di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  soddisfacente alle condizioni:

$$\varphi(H \cup K) = \varphi(H) \cap \varphi(K), \quad \varphi(H \cap K) = \varphi(H) \cup \varphi(K)$$

per ogni coppia  $H, K$  di sottogruppi di  $G$ .

Mentre la struttura dei gruppi finiti con duale è nota [11]<sup>1)</sup>, nel caso dei gruppi infiniti si è ancora lontani da una loro caratterizzazione. L'unico risultato di carattere generale in tale direzione è dovuto a Baer [2], il quale ha dimostrato che i gruppi dotati di duale sono periodici. Si deve pure a Baer [1], [2] la caratterizzazione dei gruppi abeliani con duale, mentre l'analoga questione per i gruppi speciali ed i gruppi risolubili fu risolta rispettivamente da Suzuki [8] e dall'A. [10].

Scopo della presente Nota è di apportare nuovi contributi a questo problema, occupandoci dello studio dei gruppi localmente finiti dotati di duale.

---

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Università - Padova.

<sup>1)</sup> I numeri in parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia che compare alla fine del presente lavoro.

Nel n. 1 si danno alcune proprietà degli isomorfismi strutturali fra gruppi localmente finiti generalizzando per lo più risultati noti per i gruppi finiti, e che forniscono premesse indispensabili per l'ulteriore studio. Nel n. 2 il problema della classificazione dei gruppi localmente finiti con duale viene ricondotto a quello analogo dei gruppi localmente finiti privi di automorfismi reticolari non « singolari ». Il risultato centrale del n. 3 è dato dalla determinazione dei gruppi localmente risolubili con duale, provando che tali gruppi sono risolubili. Il n. 4 infine è dedicato allo studio di alcune classi di gruppi localmente finiti dotati di duale. I teoremi conseguiti al n. 3 combinati con l'importante teorema di Feit-Thompson [4] sulla risolubilità dei gruppi finiti d'ordine dispari, ed il fatto che i gruppi finiti con duale sono risolubili di struttura nota [11], forniscono gli strumenti essenziali per tale studio. Il risultato conclusivo del n. 4 è fornito dal teorema *C*: *Se  $G$  è un gruppo localmente finito dualmente isomorfo ad un gruppo localmente finito  $\bar{G}$ , e se in  $G$  i 2-gruppi di Sylow sono ZA-gruppi <sup>11)</sup>, allora  $G$  è risolubile.*

**1.** — Se  $G$  è un gruppo dotato di duale, è noto [2] che  $G$  è necessariamente un gruppo periodico. Nel presente lavoro lo studio dei gruppi  $G$  dotati di duale sarà quasi esclusivamente limitato alla classe dei gruppi localmente finiti. Se  $G$  è un gruppo localmente finito e  $\bar{G}$  un gruppo strutturalmente isomorfo a  $G$ , nel senso che esiste un isomorfismo  $\varphi$  del reticolo dei sottogruppi  $\mathfrak{L}(G)$  di  $G$  su quello  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  di  $\bar{G}$ , allora anche  $\bar{G}$  è un gruppo localmente finito in quanto un gruppo è finito se e solo se tale è il reticolo dei suoi sottogruppi. In seguito avremo bisogno di qualche proprietà degli automorfismi reticolari di un gruppo localmente finito. Incominciamo pertanto con l'esposizione, in forma leggermente più generale di quanto strettamente necessario, di alcune proposizioni relative agli isomorfismi reticolari tra gruppi localmente finiti; si tratta per lo più di generalizzazioni di risultati già noti nel caso di gruppi finiti.

Detto  $p$  un numero primo e  $\alpha$  un numero naturale o il simbolo  $\infty$ , con  $3(p^\alpha)$  si indicherà un gruppo ciclico di ordine  $p^\alpha$  se  $\alpha$  numero naturale o un  $p$ -gruppo quasi-ciclico se  $\alpha = \infty$ . Ade-

rendo strettamente alla terminologia usata in [9], chiameremo  $P$ -gruppo un  $p$ -gruppo abeliano elementare o un gruppo ottenuto estendendo un  $p$ -gruppo abeliano elementare  $N$  (anche non finito) mediante un gruppo ciclico  $\langle a \rangle$  d'ordine primo  $q$ , con  $q \neq p$ , ove  $a$  induce un automorfismo non identico in  $N$ , che muta però in sè ogni sottogruppo di  $N$ . Un isomorfismo reticolare  $\varphi$  tra due gruppi  $G$  e  $\bar{G}$  dicesi singolare se esiste almeno un sottogruppo  $H$  d'ordine primo  $p$  tale che  $\varphi(H)$  è un gruppo d'ordine (primo)  $q$ , con  $q \neq p$ ; e in tal caso  $\varphi$  si dirà « singolare al numero primo  $p$  ».

Siamo ora in grado di formulare il seguente teorema

(1,1): Sia  $G$  un gruppo localmente finito e  $\varphi$  un isomorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ . Sia  $S$  un sottogruppo di Sylow di  $G$  relativo al numero primo  $p$ .

Se  $\varphi$  è singolare al numero primo  $p$ , si presenta una delle seguenti due circostanze:

(i) Il gruppo  $G$  è il prodotto diretto di due sottogruppi di Hall <sup>2)</sup>,  $G = P \times N$ , ove  $P$  è un  $P$ -gruppo che contiene  $S$  come sottogruppo di Sylow.

(ii) Il gruppo  $S$  è uno  $\mathfrak{Z}(p^2)$  gruppo che ha un complemento normale  $N$ ,  $G = SN$ .

Nel caso (i) risulta  $\bar{G} = \varphi(P) \times \varphi(N)$ , con  $\varphi(P)$  (e  $\varphi(N)$ ) sottogruppi di Hall di  $\bar{G}$ , e  $\varphi(P)$  un  $P$ -gruppo. Se  $P$  non è ciclico,  $P$  ed  $N$  sono  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristici, vale a dire mutati in sè da ogni automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ . Nel caso (ii),  $\varphi(S)$  è uno  $\mathfrak{Z}(q^2)$ -gruppo, ed è un sottogruppo di Sylow di  $\bar{G}$ , mentre  $\varphi(N)$  è un sottogruppo caratteristico di  $\bar{G}$  ed è un complemento di  $\varphi(S)$  in  $\bar{G}$ .

Se  $\varphi$  non è singolare al numero primo  $p$ ,  $\varphi(S)$  è un sottogruppo di Sylow di  $\bar{G}$  relativo al numero primo  $p$ , a meno che non risulti  $G = P \times N$ , con  $P$  un  $P$ -gruppo non abeliano che ha  $S$  per sottogruppo di Sylow normale; in tal caso  $\varphi(P)$  è un  $p$ -gruppo abeliano elementare.

*Dimostrazione.* — Sia  $H$  un sottogruppo d'ordine primo  $p$  di  $G$ , con  $\varphi(H)$  d'ordine  $q \neq p$ , ed  $S$  un sottogruppo di Sylow

---

<sup>2)</sup> Un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$  dicesi di Hall se è identico o se con ogni elemento di periodo primo  $p$  vi contiene un sottogruppo di Sylow  $S$  di  $G$  relativo al numero primo  $p$ .

di  $G$  contenente  $H$ . Si fissi quindi una famiglia  $\{A_i\}_{i \in I}$  di gruppi finiti di  $G$ , tale che si abbia  $H \subseteq A_i$ , qualunque sia  $i \in I$ , ed il cui insieme ricopra  $G$ . Considerando la restrizione di  $\varphi$  su  $\mathfrak{L}(A_i)$  ed i risultati esposti in [9] § 1 e 6, non è difficile raggiungere la conclusione per quanto riguarda la prima parte del teorema. Si osservi poi che se il  $p$ -gruppo  $\varphi(S)$  non è un sottogruppo di Sylow di  $\bar{G}$ , la  $\varphi^{-1}$  subordina un isomorfismo singolare su un sottogruppo di Sylow  $A$  di  $\bar{G}$  che contiene  $\varphi(S)$ . Ora  $A$  non può essere uno  $\mathfrak{Z}(p^2)$ -gruppo, perchè tale sarebbe pure  $\varphi^{-1}(A)$ ; quindi  $A$  è abeliano elementare e  $\varphi^{-1}$  è singolare a  $p$ . Ciò basta per concludere che si ha  $\bar{G} = A \times N$  e  $G = \varphi^{-1}(A) \times \varphi^{-1}(N)$ , con  $\varphi^{-1}(A)$  un  $P$ -gruppo.

Passiamo a considerare il comportamento dei sottogruppi normali massimi di  $G$  rispetto agli isomorfismi strutturali. Sia dunque  $M$  un sottogruppo normale massimo di  $G$ , e  $\varphi$  un isomorfismo strutturale tra i gruppi localmente finiti  $G$  e  $\bar{G}$ . Sia  $p$  un divisore primo dell'indice  $[G:M]$  di  $M$  in  $G$ , nel senso che il gruppo  $G$  contenga elementi di periodo  $p$  rispetto ad  $M$ . Se  $\varphi$  è singolare a  $p$ , tenendo conto della  $(1, 1)$ , e del fatto che  $M$  è normale massimo in  $G$ , risulta  $N \subseteq M$  e  $[G:M] = p$ , e  $\varphi(M)$  ha pure indice primo in  $\bar{G}$  potendo però sia essere che non essere normale in  $\bar{G}$ . Sia ora  $G/M$  gruppo d'ordine primo  $p$  e  $\varphi$  non singolare a  $p$ . Dimostriamo che  $\varphi(M)$  è normale in  $\bar{G}$ . Esiste un  $a \in G$  per cui  $G = \langle a \rangle \cup M$  e  $\langle a^p \rangle \subseteq M$ . Sia  $L$  un sottogruppo finito di  $M$  con  $\langle a^p \rangle \subseteq L$ , e poniamo  $T = \bigcup_{h \in \langle a \rangle} L^h$ , unione dei coniugati di  $L$  secondo elementi di  $\langle a \rangle$ . Risulta  $T \subseteq M$  e  $T$  normale in  $T \cup \langle a \rangle = F$ , con  $[F:T] = p$ . Poichè  $\varphi$  non è singolare a  $p$ , risulta  $[\varphi(F):\varphi(T)] = p$  e  $\varphi(T)$  normale in  $\varphi(F)$ , [9] § 7, ossia il normalizzante  $\mathcal{N}(\varphi(M))$  di  $\varphi(M)$  contiene  $\varphi(\langle a \rangle)$ ; ma  $\varphi(M) \cup \varphi(\langle a \rangle) = \bar{G}$ , per cui  $\varphi(M)$  è normale in  $\bar{G}$ ,  $\varphi(M) \triangleleft \bar{G}$ , e  $[\bar{G}:\varphi(M)] = p$ . Infine supponiamo  $M$  normale massimo in  $G$  e  $\varphi$  non singolare ad alcun divisore primo di  $[G:M]$ . Il gruppo  $G/M$  è semplice, per cui l'unione dei suoi sottogruppi minimi coincide con  $G/M$ . Ora se  $H/M$  è un tale sottogruppo minimo, per quanto visto sopra,  $\varphi(M)$  è normale in  $\varphi(H)$  e quindi pure nell'unione  $\bigcup \varphi(H) = G$ .

Abbiamo pertanto dimostrato la seguente proposizione:

(1,2): Sia  $\varphi$  un isomorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ , con  $\bar{G}$  gruppo localmente finito, e sia  $M$  un sottogruppo normale massimo di  $G$ . Se  $G/M$  non è abeliano,  $\varphi(M)$  è normale in  $\varphi(G)$  e  $[\varphi(G) : \varphi(M)]$  ha gli stessi divisori primi di  $[G : M]$ . Se  $[G : M] = p$  (numero primo), allora  $\varphi(M)$  è normale in  $\varphi(G)$  se  $\varphi$  non è singolare a  $p$ . In ogni caso l'indice di  $\varphi(M)$  in  $\varphi(G)$  è ancora un numero primo se tale era quello di  $M$  in  $G$ .

*Corollario 1.3.* – Sia  $G$  localmente finito ed  $N$  un sottogruppo normale tale che  $G/N$  risulti unione di sottogruppi semplici; se  $\varphi$  è un automorfismo non singolare di  $\mathfrak{L}(G)$ ,  $\varphi(N)$  è normale in  $G$ .

*Corollario 1.4.* – Sia  $\varphi$  un isomorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ , con  $G$  gruppo localmente finito, e sia  $H$  un sottogruppo d'indice finito in  $G$ . Allora  $\varphi(H)$  ha indice finito in  $\varphi(G)$ .

Infatti in  $G$  esiste un sottogruppo normale  $M$  contenuto in  $H$  e d'indice finito in  $G$ . Se allora  $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_t = G$  è una catena normale a fattoriali semplici, applicando (1, 2) si raggiunge la conclusione.

*Corollario 1.5.* – Sia  $G$  un gruppo localmente finito ed  $N$  il gruppo intersezione di tutti i sottogruppi d'indice finito in  $G$ . Allora  $N$  è  $L(G)$ -caratteristico.

Ciò segue subito dal corollario 1.4.

*Corollario 1.6.* – Sia  $\varphi$  un isomorfismo non singolare di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ , con  $G$  localmente finito; sia  $N \subseteq H \subseteq G$  con  $N$  sottogruppo normale di Hall di  $H$ . Allora  $\varphi(N)$  è normale in  $\varphi(H)$ .

Infatti se  $N \subseteq T \subseteq H$ , con  $[T : N]$  finito, allora per (1.2)  $\varphi(N)$  è un sottogruppo di composizione di  $\varphi(T)$ ; ma è anche un sottogruppo di Hall di  $T$ ; quindi  $\varphi(N)$  è normale in  $\varphi(T)$ . E la conclusione è ora facile.

Terminiamo questo numero con una definizione:

Sia  $G$  un gruppo ed  $H, K$  due suoi sottogruppi. Allora  $H$  dicesi rigidamente legato a  $K$  se per ogni automorfismo non singolare  $\psi$  di  $\mathfrak{L}(G)$  l'essere  $\psi(K) = K$  implica  $\psi(H) = H$ .

**2.** – Se  $\varphi$  un isomorfismo oppure un isomorfismo duale d  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  allora i due gruppi di automorfismi  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(G))$ ,  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(\bar{G}))$

di  $\mathfrak{L}(G)$  ed  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  risultano isomorfi; l'applicazione  $\alpha$  di  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(G))$  su  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(\bar{G}))$  definita dalla posizione  $\alpha(\psi) = \varphi^{-1}\psi\varphi$ , con  $\psi \in \mathcal{A}(\mathfrak{L}(G))$ , definisce un isomorfismo di  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(G))$  su  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(\bar{G}))$ ; l'elemento  $\bar{\psi} = \alpha(\psi)$  si chiamerà l'automorfismo *indotto* in  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  da  $\psi$  mediante  $\varphi$ . Dato l'isomorfismo duale  $\varphi$  di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ , nel seguito avremo spesso da considerare gli automorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  ( $\mathfrak{L}(G)$ ) mediante  $\varphi$  ( $\varphi^{-1}$ ) dagli automorfismi di  $\mathfrak{L}(G)$  ( $\mathfrak{L}(\bar{G})$ ) indotti a loro volta da automorfismi interni di  $G$  ( $\bar{G}$ ). Tali automorfismi indotti in generale possono essere sia singolari, sia non singolari. Lo studio del gruppo  $G$  dotato di duale risulta in gran parte semplificato qualora gli automorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(G)$  mediante  $\varphi^{-1}$  da quelli provenienti da automorfismi interni di  $\bar{G}$  sono tutti non singolari. Nelle righe che seguono daremo un teorema di « struttura » di un gruppo  $G$  localmente finito dotato di duale, la cui applicazione ci permette nelle nostre considerazioni di limitare lo studio dei gruppi localmente finiti con duale a quelli in cui gli automorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(G)$  siano non singolari.

Sia  $G$  un gruppo localmente finito e sia  $H$  il gruppo unione di tutti i sottogruppi di  $G$  che sono fattori diretti di Hall di  $G$  e risultano  $P$ -gruppi (si assume  $H = 1$  se  $G$  è privo di tali sottogruppi).  $H$  è dotato di complemento normale  $K$  (eventualmente identico), che sarà privo di fattori diretti di Hall che siano  $P$ -gruppi. Per  $G$  si ha dunque la scomposizione  $G = H \times K$ , con i sottogruppi  $H$  e  $K$  univocamente individuati. Osserviamo che i gruppi  $H$  e  $K$  sono  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristici. Infatti se  $\psi$  è un automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ , risulta  $G = \psi(H) \times \psi(K)$  (teorema 4 § 1 in [9]), con  $\psi(H)$  e  $\psi(K)$  sottogruppi di Hall di  $G$ ,  $\psi(H)$  prodotto di  $P$ -gruppi di Hall,  $\psi(K)$  privo di  $P$ -gruppi fattori diretti di Hall. Quindi  $\psi(H) = H$ ,  $\psi(K) = K$ , data l'unicità della scomposizione  $G = H \times K$ , e risulta  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(G)) \simeq \mathcal{A}(\mathfrak{L}(H)) \times \mathcal{A}(\mathfrak{L}(K))$ . Se  $G$  è dotato di duale allora ciò è vero anche per  $H$  e  $K$ , per cui, in particolare,  $H$  è prodotto diretto di  $P$ -gruppi finiti [9]. Sia poi  $\varphi$  un automorfismo singolare a  $p$  di  $\mathfrak{L}(K)$ . Allora per la (1.1) risulta  $K = SN$  con  $S$  sottogruppo di Sylow di  $K$ , ciclico in quanto è dotato di duale (teor. 1 cap. IV § 2 in [9]). Indichiamo con  $\mathcal{F} = \{N_i\}_{i \in I}$  la famiglia dei sottogruppi normali  $N_i$  che sono il complemento normale di un sottogruppo di Sylow ciclico  $S$  di

ordine  $p^\alpha$ , con  $p$  numero primo relativo al quale  $\mathfrak{L}(K)$  è dotato di un automorfismo singolare. Il gruppo  $T = \bigcap_{i \in I} N_i$  è un sottogruppo normale di Hall di  $K$ , e  $K/T$  risulta un gruppo abeliano a sottogruppi di Sylow ciclici; l'indice di  $T$  in  $K$  ha quindi la potenza al più uguale a quella del numerabile, per cui  $T$  ha un complemento  $C$  in  $K$ , e  $C$  è abeliano a sottogruppi di Sylow ciclici (lemma 5.1.1 in [7]). Se poi  $\psi$  è un qualunque automorfismo di  $\mathfrak{L}(K)$ ,  $\varphi$  induce su  $\mathfrak{L}(T)$  un isomorfismo non singolare; ne segue che ogni automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$  muta i sottogruppi di Sylow di  $T$  in sottogruppi di Sylow di  $T$  (1.1), per cui  $T$  è mutato in sé da ogni automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ . Se allora  $\varphi$  è un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ ,  $\varphi(T)$  è  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ -caratteristico e tra  $\mathfrak{L}(T)$  ed  $\mathfrak{L}(\bar{G}/\varphi(T))$   $\varphi$  induce un isomorfismo duale. Inoltre ogni automorfismo indotto in  $\mathfrak{L}(G)$  mediante  $\varphi^{-1}$  da un automorfismo  $\bar{\varphi}$  di  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  è non singolare su  $\mathfrak{L}(T)$ . Riassumendo abbiamo dunque:

(2.1): Sia  $G$  un gruppo localmente finito e  $\varphi$  un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ . Allora  $G$  si può scomporre in uno ed un solo modo nel prodotto diretto di due sottogruppi di Hall,  $G = H \times K$ , invarianti per ogni automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ , soddisfacenti alle seguenti condizioni:

(i)  $H$  se non identico è un prodotto diretto (discreto) di  $P$ -gruppi di Hall, tutti finiti.

(ii)  $K$  è privo di fattori diretti di Hall che siano  $P$ -gruppi.

(iii)  $K$  contiene un sottogruppo di Hall  $T$  invariante rispetto ad ogni automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ ,  $T$  ha un complemento  $C$  in  $K$  che risulta abeliano a sottogruppi di Sylow ciclici,  $\mathfrak{L}(T)$  è dotato di duale e gli automorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(T)$  da quelli di  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  risultano non singolari su  $\mathfrak{L}(T)$ .

Se  $\varphi$  è un isomorfismo duale tra  $\mathfrak{L}(G)$  ed  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ , ogni sottogruppo  $H$  di  $G$  con  $1 \neq H \subsetneq G$  contiene un sottogruppo minimo ed è contenuto in un sottogruppo massimo di  $G$ , ed i sottogruppi minimi di  $G$  sono in corrispondenza biunivoca con quelli massimi di  $\bar{G}$ , e viceversa.

Diamo ora una condizione sufficiente affinché l'immagine  $\varphi(T)$  di un sottogruppo minimo di  $G$  abbia indice finito in  $\bar{G}$ .

(2.2): Sia  $G$  un gruppo dotato di duale, ed  $a$  un elemento d'or-

dine primo  $p$  contenuto sul centro di  $G$ . Allora  $\varphi(\langle a \rangle)$  ha indice primo in  $\bar{G}$ , se  $\varphi$  è un isomorfismo duale tra  $\mathfrak{L}(G)$  ed  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ .

Sia  $\psi$  un automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ , e supponiamo  $\psi(\langle a \rangle) \neq \langle a \rangle$ . Risulta allora che  $\psi(\langle a \rangle) \cup \langle a \rangle = \psi(\langle a \rangle) \times \langle a \rangle$ . Se ora  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono due automorfismi di  $\mathfrak{L}(G)$ , se  $\psi_1(\langle a \rangle) \neq \psi_2(\langle a \rangle)$  risulta  $T = \psi_1(\langle a \rangle) \cup \psi_2(\langle a \rangle) = \psi_1(\langle a \rangle) \times \psi_2(\langle a \rangle)$ . Infatti  $\psi_1^{-1}(T) = \psi_1^{-1}(\psi_2(\langle a \rangle)) \cup \langle a \rangle = \langle a \rangle \times \psi_1^{-1}(\psi_2(\langle a \rangle))$ .

Ne segue che il gruppo  $U = \bigcup_{\psi \in \mathcal{A}(\mathfrak{L}(G))} \psi(\langle a \rangle)$  è abeliano elementare

ed  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristico.  $\varphi(U) = \bar{U}$  è dunque normale in  $\bar{G}$  ed  $\mathfrak{L}(U)$  è dualmente isomorfo ad  $\mathfrak{L}(\bar{G}/\bar{U})$ .  $\bar{G}/\bar{U}$  è dunque un gruppo abeliano elementare (a sottogruppi di Sylow finiti). Pertanto  $\varphi(\langle a \rangle) \subseteq \bar{U}$  ha indice finito in  $\bar{G}$ .

*Corollario (2.3).* – Sia  $\varphi$  un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ , ed  $H$  un sottogruppo finito del centro  $\mathfrak{Z}(G)$  di  $G$ . Allora  $\varphi(H)$  ha indice finito in  $\bar{G}$ .

Si consideri una serie di composizione di  $H$  e si applichi la (2.2) ai termini di tale serie.

**3.** – In questo numero verranno caratterizzati tra l'altro, i gruppi localmente risolubili dotati di duale.

Ricordiamo anzitutto il seguente teorema dimostrato in [10]:

**TEOREMA A.** – *Se  $G$  è un gruppo risolubile <sup>3)</sup> dualmente isomorfo al gruppo  $\bar{G}$ , allora  $G$  risulta il prodotto diretto di sottogruppi di Hall <sup>2)</sup>  $H$ , ove  $H$  o è un  $p$ -gruppo finito modulare non Hamiltoniano o un  $P$ -gruppo finito non abeliano; il gruppo  $G$ , come pure il gruppo  $\bar{G}$ , risulta metabeliano.*

Passiamo a dimostrare la seguente proposizione:

(3.1): Sia  $G$  un gruppo con duale. Detto  $G''$  il derivato secondo di  $G$ ,  $T$  il sottogruppo intersezione di tutti i sottogruppi ad indice finito in  $G$ , ed  $F$  il gruppo intersezione di tutti i sottogruppi normali di  $G$  a fattoriale risolubile, allora risulta  $G'' = F = T$ .

Sia  $H$  un sottogruppo d'indice finito in  $G$ . Allora esiste un

---

<sup>3)</sup> Un gruppo lo chiamiamo risolubile se la sua serie derivata ha lunghezza finita.

sottogruppo normale  $M$ , con  $M \subseteq N$  e  $G/M$  gruppo finito. Il gruppo  $G/M$  ha duale, quindi risulta metabeliano [11]. Pertanto  $G'' \subseteq M \subseteq H$ , e quindi  $G'' \subseteq T$ . Il gruppo  $G/G''$  è risolubile con duale; pertanto (teorema A) l'intersezione dei suoi sottogruppi d'indice finito è il sottogruppo identico, per cui  $T \subseteq G''$ , e pertanto  $G'' = T$ . Risulta poi evidentemente  $F \subseteq G''$ . Sia poi  $N$  un sottogruppo normale di  $G$  con  $G/N$  risolubile. Il gruppo  $G/N$  avendo duale è metabeliano, per cui  $G'' \subseteq N$ , e dunque  $G'' = F$ .

*Osservazione 1.* — La (3.1) implicitamente ci dice che  $G''$  coincide con il suo derivato  $G'''$ . Se  $G''$  ha duale (e questo certamente è il caso se  $G$  è localmente finito, in quanto per il corollario 1.4  $G''$  risulta  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristico),  $G''$  è privo di sottogruppi d'indice finito.

Dalla (3.1) consegue che i gruppi  $G$  con duale che contengono una catena normale discendente a fattori risolubili sono gruppi risolubili; come risolubili sono pure i gruppi residualmente finiti <sup>4)</sup> con duale.

(3.2): Se  $G$  è un  $\tilde{N}$ -gruppo <sup>5)</sup> con duale,  $G$  è risolubile.

Dalla definizione di  $\tilde{N}$ -gruppo segue che se  $A$  è un sottogruppo massimo proprio di  $B \subseteq G$ ,  $A$  ha indice primo in  $B$ . Pertanto un automorfismo  $\psi$  di  $\mathfrak{L}(G)$  muta un sottogruppo  $H$  d'indice finito in  $G$  in un sottogruppo  $\psi(H)$  pure d'indice finito in  $G$ . Il gruppo  $G''$  per la (3.1) è dunque  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristico. Ma allora  $G'' = 1$  altrimenti  $G''$  conterrebbe sottogruppi massimi d'indice finito, ciò che non è possibile per l'osservazione fatta sopra.

*Corollario 3.3.* — Sia  $G$  un  $p$ -gruppo con duale. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- (i)  $G$  è un gruppo finito modulare non Hamiltoniano,
- (ii)  $G$  è localmente finito,
- (iii)  $G$  è un  $\tilde{N}$ -gruppo.

Se  $G$  è localmente finito,  $G$  è localmente un  $\tilde{N}$ -gruppo. Ma allora  $G$  stesso <sup>6)</sup> è un  $\tilde{N}$ -gruppo. Per la (3.2)  $G$  risulta dunque

<sup>4)</sup> Un gruppo  $G$  dicesi residualmente finito se per ogni elemento  $g \neq 1$  di  $G$  esiste un sottogruppo normale  $N$  di  $G$  con  $g \notin N$  e  $G/N$  finito.

<sup>5)</sup> Un gruppo  $G$  dicesi un  $\tilde{N}$ -gruppo se ogni suo sottogruppo fa parte di un sistema normale.

<sup>6)</sup> Vedasi [6] vol. II, pag. 221.

un  $p$ -gruppo risolubile, e da qui applicando il teorema *A* si conclude che  $G$  soddisfa alla (i). È poi ovvio che la (i) implica la (ii).

*Osservazione 2.* — Volendo, la finitezza di un  $p$ -gruppo  $G$  localmente finito con duale si può vedere direttamente nel modo seguente. Il gruppo  $G$  è un  $\tilde{N}$ -gruppo ed avendo duale ogni suo sottogruppo proprio è contenuto in un sottogruppo massimo e normale di  $G$ . Pertanto il gruppo fattoriale  $G/\Phi(G)$  di  $G$  rispetto al suo sottogruppo di Frattini è un  $p$ -gruppo abeliano elementare ed è finito perchè ha duale <sup>7)</sup>. Dunque  $G$  è finitamente generato epper tanto è finito essendo localmente finito.

Alla dimostrazione del teorema centrale di questo numero premettiamo il seguente

**LEMMA 3.4.** — *Sia  $G$  un gruppo localmente finito e  $\varphi$  un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ . Se  $N_1, N_2$  sono due sottogruppi normali di  $G$  con  $N_1 \subseteq N_2$  ed  $N_2/N_1$  è un  $p$ -gruppo, allora il gruppo  $N_2/N_1$  è un  $p$ -gruppo finito modulare non Hamiltoniano.*

*Dim.* — Poichè  $G/N_1$  ha duale non è restrittivo supporre  $N_1 = 1$ , e poniamo per semplicità  $N = N_2$ . Inoltre per la (2.1) possiamo pure supporre che gli automorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(G)$  da quelli interni di  $\bar{G}$  mediante  $\varphi^{-1}$  non siano singolari. Premesso ciò, indichiamo con  $F(N)$  il sottogruppo di  $N$  unione dei suoi sottogruppi minimi. Il  $p$ -gruppo  $F(N)$  è un sottogruppo normale di  $G$  che è contenuto nel gruppo  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristico  $F(G)$ . Pertanto se  $\psi_{\bar{g}}$  indica l'automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$  indotto mediante  $\varphi^{-1}$  dell'automorfismo di  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  indotto da quello interno di  $\bar{G}$  individuato dall'elemento  $\bar{g}$ , risulterà  $\psi_{\bar{g}}(F(N)) \subseteq F(G)$ , qualunque sia  $\bar{g}$  in  $\bar{G}$ . Ora essendo  $F(F(G)) = F(G)$ , per il corollario 1.3 risulta  $\psi_{\bar{g}}(F(N))$  un sottogruppo normale di  $F(G)$ . Ne segue che il gruppo  $H$  unione di tutti i sottogruppi del tipo  $\psi_{\bar{g}}(F(N))$  al variare di  $\bar{g}$  in  $\bar{G}$  è un  $p$ -gruppo (normale) di  $F(G)$  in quanto unione di  $p$ -gruppi normali di  $F(G)$ , ed è dotato di duale in quanto per costruzione  $\varphi(H)$  risulta normale in  $\bar{G}$ . Per il corollario 3.3  $H$  è un  $p$ -gruppo modulare finito, ed essendo unione di sottogruppi minimi risulta abeliano elementare. Pertanto tale è pure il gruppo  $\bar{G}/\varphi(H)$ , ed essendo  $\varphi(F(N)) \supseteq \varphi(H)$  è  $\varphi(F(N)) \triangleleft \bar{G}$ , e quindi anche  $H =$

<sup>7)</sup> Vedasi ad es. [9] pag. 87, teorema 1.

$= F(N)$ . Posto  $F_0(N) = 1$ , definiamo in modo ricorrente  $F_k(N)$  mediante la posizione  $F_k(N)/F_{k-1}(N) = F(N/F_{k-1}(N))$ ; è evidentemente  $\bigcup_k F_k(N) = N$ . Per quanto precede, alla catena normale ascendente  $1 = F_0(N) \subseteq F_1(N) \subseteq \dots$  di  $G$  corrisponde in  $\bar{G}$  mediante  $\varphi$  una catena normale discendente a fattori abeliani (elementari). Per la (3.1) è dunque  $\bar{G}'' \subseteq \varphi(F_k(N))$  qualunque sia  $k$  per cui  $\varphi(N) \supseteq \bar{G}''$ , e il gruppo  $N$  è contenuto nel gruppo  $R = \varphi^{-1}(\bar{G}'')$  che è risolubile essendo dualmente isomorfo al gruppo risolubile  $\bar{G}/\bar{G}''$  (teorema A). Pertanto (teorema A)  $N$  è un  $p$ -gruppo modulare finito non Hamiltoniano.

Veniamo ora alla dimostrazione del seguente

**TEOREMA B.** — *Un gruppo  $G$  localmente risolubile dotato di duale è risolubile.*

*Dim.* — Il gruppo  $G$  è periodico e localmente risolubile, pertanto è anche localmente finito. In virtù delle (1.2) non sarà restrittivo supporre che esista un isomorfismo duale  $\varphi$  di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$  tale che gli automorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(G)$  da quelli interni di  $\bar{G}$  mediante  $\varphi^{-1}$  siano non singolari. Essendo  $G$  un gruppo localmente risolubile,  $G$  è un  $SI$ -gruppo<sup>8)</sup>, vale a dire  $G$  ha un sistema principale  $\delta$  di composizione a fattori  $p$ -gruppi abeliani; per la (3.4) tali fattori sono dunque tutti finiti. Ne segue che i centralizzanti di tali fattori hanno tutti indice finito in  $G'$ , ma allora  $G'' \neq G$  se  $G \neq 1$ . Infatti se i centralizzanti coincidono tutti con  $G$ , ogni sottogruppo finito è speciale, e poichè  $G$  è localmente finito ciò comporta che  $G$  sia prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow. Ognuno di questi ha quindi duale, per cui è risolubile (corollario 3.3). Se invece  $\delta$  ha fattori non centrali,  $G$  possiede sottogruppi di indice finito diverso da uno e per la (3.1) è ancora  $G'' \neq G$ . Il gruppo  $G''$  è localmente risolubile con duale (osservazione 1). Se allora  $G'' \neq 1$ , sarebbe  $G''' \neq G''$  per quanto visto sopra; ma ciò è in contrasto con la (3.1) (osservazione 1).  $G$  è dunque metabeliano.

<sup>8)</sup> Un gruppo  $G$  dicesi un  $SI$ -gruppo se possiede un sistema invariante risolubile (vedasi [3] vol. II, pag. 182).

<sup>9)</sup> Un gruppo  $G$  dicesi un  $SN^*$ -gruppo se possiede una serie ascendente risolubile (vedasi [6], vol. II, pag. 183).

*Corollario 3.5.* — Un  $SN^*$ -gruppo <sup>9)</sup>  $G$  con duale è risolubile. Infatti  $G$ , essendo periodico, risulta localmente finito <sup>10)</sup>. Ma allora è pure localmente risolubile e per il teorema B si conclude.

4. — Passiamo a studiare alcune classi di gruppi localmente finiti dotati di duale. Se  $G$  è un tale gruppo, la struttura di  $G/G''$  è nota (teorema A) e il derivato secondo ((3.1) ed osservazione 1) è un gruppo perfetto ( $G'' = G'''$ )  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristico ed è privo di sottogruppi d'indice finito diverso da 1. Tenendo conto di questi fatti, le considerazioni che seguono saranno condotte nell'ipotesi che  $G$  sia un gruppo localmente finito e perfetto. Se  $\varphi$  è un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\overline{G})$ , gli isomorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(G)$  mediante  $\varphi^{-1}$  risultano tutti non singolari in virtù della (2.1), osservazione questa che sarà continuamente sottintesa nel seguito. Nel gruppo localmente finito  $G$  indichiamo con  $\mathfrak{R}(G)$  il sottogruppo di  $G$  unione di tutti i sottogruppi normali localmente risolubili di  $G$  e lo chiameremo il radicale di  $G$ . Poichè in un gruppo localmente finito l'estensione di un sottogruppo localmente risolubile per un gruppo localmente risolubile è ancora localmente risolubile, risulta  $\mathfrak{R}(G)$  localmente risolubile, mentre il gruppo  $G/\mathfrak{R}(G)$  ha il radicale identico. Abbiamo ora il seguente teorema di struttura:

(4.1): Sia  $G$  un gruppo localmente finito e perfetto, dotato di duale. Allora il radicale  $\mathfrak{R}(G)$  ha duale e coincide col centro di  $G$ .

*Dimostrazione.* — Nel radicale  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G)$  di  $G$  definiamo per ricorrenza la catena normale ascendente ponendo  $R_0 = 1$ ,  $R_k/R_{k-1} = F(\mathfrak{R}/R_{k-1})$ , ove  $F(\mathfrak{R}/R_{k-1})$  indica (come già sopra) il gruppo unione di tutti i sottogruppi minimi di  $\mathfrak{R}/R_{k-1}$ , ove  $\mathfrak{R}/R_{k-1}$  coincide col radicale di  $G/R_{k-1}$ ; è manifestamente  $\bigcup R_k = \mathfrak{R}$ . Andiamo a provare che  $\mathfrak{R}$  è  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristico; all'uopo basterà provare che tali sono gli  $R_k$ . Usiamo induzione su  $k$ , osservando che per  $k = 0$  la cosa è vera. Nel gruppo  $G/R_k$  il radicale è  $\mathfrak{R}/R_k$ , come si è osservato, e il gruppo  $F(\mathfrak{R}/R_k) = R_{k+1}/R_k$  è caratteristico in  $G/R_k$  ed è contenuto nel gruppo  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristico  $F(G/R_k)$ . Sia  $\psi$  un automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ . Allora

<sup>10)</sup> Vedasi ad es. [6] vol. II, pag. 190.

$\varphi$  subordina un automorfismo  $\bar{\varphi}$  su  $\mathfrak{L}(G/R_k)$  e si ha  $\bar{\varphi}(R_{k+1}/R_k) = \varphi(R_{k+1})/R_k$ . Ora il gruppo  $\varphi(R_{k+1})$  è localmente risolubile in quanto è noto che gruppi finiti risolubili vengono mutati da un isomorfismo reticolare in gruppi finiti risolubili [3]. Pertanto  $\varphi(R_{k+1})/R_k$  è localmente risolubile ed è normale in  $F(G/R_k)$  per il corollario 1.3; pertanto è contenuto nel radicale di  $F(G/R_k)$ , e quindi nel radicale di  $G/R_k$ ; ma è pure unione di gruppi minimi e quindi sta in  $F(\mathfrak{R}/R_k) = R_{k+1}/R_k$ , ossia  $\varphi(R_{k+1}) \subseteq R_{k+1}$ ; similmente si vede che  $\varphi^{-1}(R_{k+1}) \subseteq R_{k+1}$ , ossia  $R_{k+1} \subseteq \varphi(R_{k+1})$  e in conclusione  $\varphi(R_{k+1}) = R_{k+1}$ . Il gruppo  $\mathfrak{R}$  unione di gruppi  $\mathfrak{L}(G)$ -caratteristici è dunque pure tale. Ne segue che il gruppo localmente risolubile  $\mathfrak{R}$  ha duale; pertanto (teorema B) è un prodotto diretto di sottogruppi finiti  $H$  di Hall di  $\mathfrak{R}$ : gli  $H$  sono dunque normali in  $G$ . Il centralizzante  $\mathcal{C}(H)$  ha dunque indice finito in  $G$ , per cui deve essere  $\mathcal{C}(H) = G$ , ed  $\mathfrak{R}$  sta nel centro  $\mathfrak{Z}(G)$  di  $G$ . Poichè viceversa è  $\mathfrak{Z}(G) \subseteq \mathfrak{R}$ , si conclude come volevasi che  $\mathfrak{R} = \mathfrak{Z}(G)$ .

*Corollario 4.2.* — Sia  $\varphi$  un isomorfismo duale tra due gruppi localmente finiti  $G$  e  $\bar{G}$ . Allora  $G$  è perfetto con  $\mathfrak{R}(G) = 1$  se e solo se  $\bar{G}$  è perfetto con  $\mathfrak{R}(\bar{G}) = 1$ .

Per concludere si tenga conto del corollario 2.3 e della (4.1).

Sia  $S$  un 2-sottogruppo di Sylow finito di ordine  $2^\alpha$  del gruppo  $G$ . Se  $G$  è localmente finito due qualunque 2-sottogruppi di Sylow sono tra loro coniugati, per cui in particolare hanno lo stesso ordine. E passiamo a dimostrare la seguente proposizione:

(4.3): Siano  $G$  e  $\bar{G}$  due gruppi localmente finiti e  $\varphi$  un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ . Se un 2-sottogruppo di Sylow di  $G$  è finito,  $G$  risulta risolubile.

La dimostrazione la conduciamo usando induzione sull'esponente  $\alpha$ , se  $2^\alpha$  indica l'ordine di un 2-gruppo di Sylow di  $G$ . Se  $\alpha = 0$  il teorema è vero in quanto in tal caso in virtù del celebrato teorema di Feit-Thompson [11],  $G$  risulta localmente risolubile, e quindi risolubile (teorema B). Sia  $\alpha > 0$  e per ipotesi assurda supponiamo  $G$  non risolubile. In virtù di (3.1) non sarà restrittivo supporre  $\bar{G}$  perfetto, con  $\mathfrak{R}(G) = 1$ , per cui per il corollario 4.2 è pure  $\bar{G}$  perfetto con  $\mathfrak{R}(\bar{G}) = 1$ . Supponiamo che in  $G$  esista almeno una involuzione  $\tau$  (elemento di periodo 2) permutabile con un elemento (non identico) d'ordine primo

con 2. Se allora indichiamo con  $V_\tau$  il sottogruppo di  $G$  unione di tutti i sottogruppi d'ordine primo di  $G$  contenuti nel centralizzante  $C(\tau)$  di  $\tau$  in  $G$ , il gruppo  $V_\tau$  contiene nel centro il sottogruppo  $\langle \tau \rangle$ . Ciò basta per concludere che  $\varphi(V_\tau) \triangleleft \varphi(\langle \tau \rangle)$ , e quindi il gruppo  $V_\tau / \langle \tau \rangle$  ha duale. Per l'ipotesi induttiva,  $V_\tau / \langle \tau \rangle$  è risolubile. Pertanto (teorema B) si ha  $V_\tau / \langle \tau \rangle = T / \langle \tau \rangle \cup \cup N / \langle \tau \rangle$  con  $T / \langle \tau \rangle$  2-gruppo di Sylow (eventualmente identico) di  $V_\tau / \langle \tau \rangle$ , ed  $N / \langle \tau \rangle$  complemento normale non identico. Da qui si ricava  $N = \langle \tau \rangle \times L$  con  $L \neq 1$ . Se  $\psi$  è un elemento di  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(G))$ , risulta  $\psi(\langle \tau \rangle \times L) = \psi(\langle \tau \rangle) \times \psi(L)$  (teor. 4, pag. 5 di [9]) sicchè se  $\psi(\langle \tau \rangle) = \langle \tau \rangle$ , è pure  $\psi(L) = L$ , tenuto conto del significato di  $L$ . Ma allora  $\mathcal{N}(\varphi(L)) \supseteq \varphi(\langle \tau \rangle)$ , e poichè  $\varphi(\langle \tau \rangle) \cup \varphi(L) = \bar{G}$ , è  $\varphi(L) \triangleleft \bar{G}$ . Il gruppo  $L$  è localmente risolubile, per cui il gruppo  $\bar{G} / \varphi(L)$  è risolubile e quindi  $\bar{G}' \neq \bar{G}$ ; assurdo. Resta dunque da esaminare il caso in cui ogni involuzione di  $G$  ha per centralizzante un 2-gruppo. Nel gruppo localmente finito  $G$  esiste un sottogruppo abeliano  $A$  d'ordine infinito [5], che certamente non conterrà elementi di periodo 2. Facciamo anzitutto vedere che  $A$  non può contenere uno  $3(p^\infty)$ -gruppo. Sia  $H \subseteq A$  tale e sia  $T$  il suo sottogruppo d'ordine  $p$ . Se  $\psi_t$  indica l'automorfismo indotto in  $\mathfrak{L}(G)$  mediante  $\varphi^{-1}$  dall'automorfismo interno di  $\bar{G}$  individuato dall'elemento  $t \in \varphi(T)$ , allora  $\psi_t(T) = T$  e  $T$  è nel centro del gruppo unione  $U = \bigcup_{t \in \varphi(T)} \psi_t(H)$ . Il gruppo  $U$  non ha 2-elementi per cui è localmente risolubile, e dunque il gruppo  $U/T$  avendo duale è risolubile; pertanto tutti i suoi sottogruppi di Sylow sono d'ordine finito, mentre  $H/T$  è un  $p$ -gruppo infinito. Sia ora  $a$  un elemento di  $A$  d'ordine  $p$ . Il gruppo  $V_a / \langle a \rangle$  è risolubile con duale. Pertanto la  $p$ -componente di  $A$  è d'ordine finito. Dunque  $a$  è permutabile con un elemento  $b$  d'ordine primo  $q \neq p$ . Ma allora come nel caso della involuzione  $\tau$  si conclude che  $G$  contiene un gruppo localmente risolubile non identico  $L$  con  $\varphi(L) \triangleleft \bar{G}$ ; pertanto è  $\bar{G}' \neq \bar{G}$ . L'assurdo cui siamo di nuovo pervenuti prova il teorema.

*Corollario 4.4.* — Sia  $\varphi$  un isomorfismo duale tra i due gruppi localmente finiti  $G$  e  $\bar{G}$ . Se in  $G$  ogni involuzione ha per centralizzante un 2-gruppo,  $G$  è risolubile.

Basterà far vedere che in  $G$  i 2-gruppi sono finiti. Sia  $S$  un 2-gruppo di Sylow di  $G$  d'ordine infinito. Poichè  $S$  è localmente finito,  $S$  contiene un gruppo abeliano infinito  $A$  [5]. Sia  $\tau$  una involuzione di  $A$  e  $V_\tau$  il gruppo unione di tutte le involuzioni di  $G$  permutabili con  $\tau$ . Il gruppo  $V_\tau / \langle \tau \rangle$  è un 2-gruppo, essendo  $\tau$  nel centro di  $V_\tau$ , con duale: dunque è finito. Ne segue che  $A$  deve contenere uno  $\mathfrak{Z}(2^\infty)$ -gruppo  $H$ . Se allora  $a$  è l'involuzione di  $H$ , posto  $\bar{B} = \varphi(\langle a \rangle)$ , il gruppo  $U = \bigcup_{b \in \bar{B}} \psi_b(H)$  ha il gruppo

$\langle a \rangle$  nel centro per cui è un 2-gruppo, e il gruppo  $U / \langle a \rangle$  ha duale; pertanto deve essere finito (corollario 3.3): assurdo.

Ci proponiamo ora di dare un teorema di struttura dei 2-gruppi di Sylow di un gruppo localmente finito  $G$  dualmente isomorfo ad un gruppo localmente finito  $\bar{G}$ . Sia  $S$  un 2-gruppo di Sylow di  $G$  e supponiamo che sia abeliano elementare. Proviamo che  $S$  è necessariamente finito. Sia non tale, e sia  $H_\alpha$  un sottogruppo di  $S$  di indice finito, almeno 4, in  $S$ . Il gruppo  $\mathcal{N}(H_\alpha)/H_\alpha$  ha duale, essendo  $\mathcal{N}(H_\alpha)$  rigidamente legato ad  $H_\alpha$  (corollario 1.3 e 1.6), per cui risulta per la (4.3) e il teorema A  $\mathcal{N}(H_\alpha)/H_\alpha = S/H_\alpha \times \times C/H_\alpha$ . Da qui segue che  $S/A_\alpha$  è lasciato fermo da ogni automorfismo di  $\mathfrak{L}(\mathcal{N}(H_\alpha)/H_\alpha)$ , per cui  $\varphi(S)$  è normale in  $\varphi(H_\alpha)$ . Se Ora  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$  è una famiglia di sottogruppi di  $S$  che hanno indice finito almeno 4 in  $S$ , con  $\bigcap_{\alpha \in I} H_{\alpha-1}$ , il gruppo  $S$  ha per duale il gruppo

$\bigcup_{\alpha \in I} \varphi(H_\alpha)/\varphi(S) = \bar{G}/\varphi(S)$ . Ne segue che  $S$  è finito (corollario 3.3)

contro l'ipotesi. Siano ora  $G$  e  $\bar{G}$  due gruppi localmente finiti e  $\varphi$  un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ ; inoltre sia  $G = G'$ . Sia  $S$  un 2-gruppo di Sylow di  $G$  e  $\Phi(S)$  il suo sottogruppo di Frattini. Essendo  $S$  uno  $\tilde{N}$ -gruppo <sup>6)</sup>,  $S/\Phi(S)$  è abeliano elementare, ed il gruppo  $\mathcal{N}(\Phi(S))/\Phi(S)$  ha quale. Pertanto, per quanto visto sopra,  $S/\Phi(S)$  è finito. Questo risultato lo generalizziamo dimostrando che se  $H$  è un sottogruppo d'indice finito di  $S$ , allora  $\Phi(H)$  ha indice finito in  $H$ . Ragioniamo per assurdo supponendo  $[H : \Phi(H)] = \infty$ ; sia  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una famiglia di sottogruppi di  $S$  con  $\Phi(H) \subseteq H_\alpha \subset H$ ,  $[H : H_\alpha]$  finito maggiore o uguale a 4,  $H_\alpha$  normale in  $S$  ed  $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha = \Phi(H)$ .

## Tra i gruppi

$$A = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \varphi(H_\alpha)} \psi_{\bar{\alpha}}(H)/H_\alpha \quad \text{e} \quad \varphi(H_\alpha)/\bigcap_{\bar{\alpha} \in \varphi(H_\alpha)} (\varphi(H))_{\bar{\alpha}} = A$$

$\varphi$  indice un isomorfismo duale. Poichè i 2-gruppi di Sylow di  $A$  sono finiti d'ordine maggiore o uguale a 4, per la (4.3),  $A$  è risolubile e dunque per il teorema  $A$  è  $\psi_{\bar{\alpha}}(H) = H$ , ossia  $\varphi(H)$  è normale in  $\varphi(H_\alpha)$ . Ne segue che il gruppo  $H/\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha = H/\Phi(H)$

ha duale ed essendo un  $p$ -gruppo abeliano è finito, contro ipotesi. Ne segue che se  $S \supseteq \Phi_1(S) \supseteq \Phi_2(S) \supseteq \dots$  è la serie discendente dei successivi sottogruppi di Frattini di  $S$ , il gruppo  $\Phi_m(S)$  ha indice finito in  $S$ . Posto  $\Phi = \bigcap \Phi_m(S)$ ,  $\Phi$  è dunque il gruppo intersezione di tutti i sottogruppi d'indice finito in  $S$ . Ebbene proviamo che  $\Phi$  stesso ha indice finito in  $S$ . Se  $\Phi_1(S) = \Phi_2(S)$ , è  $\Phi = \Phi_1(S)$  e l'asserzione è provata. Se  $\Phi_2(S) \neq \Phi_1(S)$ , allora  $\Phi_m(S)$  ha almeno indice 4 in  $S$  non appena  $m \geq 2$ . Se  $\psi$  è un automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ , è evidentemente  $\psi(\Phi_m(S)) = \Phi_m(\psi(S))$ , per cui  $\psi(\Phi_m(S))$  è normale in  $\psi(S)$ . Ciò basta per concludere che  $T = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \varphi(\Phi_m(S))} \psi_{\bar{\alpha}}(S)/\Phi_m(S)$

ha duale e quindi è risolubile essendo i suoi 2-gruppi finiti. Ma allora  $T$  ha un solo sottogruppo di Sylow relativo al numero primo 2, in virtù del teorema A; ciò implica  $\psi_{\bar{\alpha}}(S) = S$ , ossia  $\varphi(S)$  è normale in  $\varphi(\Phi_m(S))$ . Pertanto il 2-gruppo  $S/\Phi$  ha duale ed è dunque finito, e precisamente è un gruppo modulare non Hamiltoniano; inoltre  $\Phi$  è privo di sottogruppi massimi. Riassumendo possiamo dunque affermare:

(4.5): Siano  $G$  e  $\bar{G}$  due gruppi localmente finiti e  $\varphi$  un isomorfismo duale di  $\mathfrak{L}(G)$  su  $\mathfrak{L}(\bar{G})$ . Allora un 2-gruppo di Sylow  $S$  di  $G$  ha la seguente struttura: Detto  $\Phi$  il sottogruppo di  $S$  intersezione di tutti i sottogruppi d'indice finito in  $S$ ,  $\Phi$  ha indice finito in  $S$ ,  $S/\Phi$  è modulare non Hamiltoniano, e  $\Phi$  è privo di sottogruppi massimi.

Facciamo a questo punto due osservazioni che ci saranno utili nel seguito.

1) Se  $H$  è un sottogruppo di un gruppo localmente finito  $G$ , e se  $H$  è privo di sottogruppi d'indice finito, il normalizzante  $\mathcal{N}(H)$  di  $H$  (in  $G$ ) è rigidamente legato ad  $H$ .

Infatti se  $T$  è un gruppo che contiene  $H$  ed ha indice finito in  $T$ , (per il teorema di Poincarè)  $H$  è normale in  $T$ . Se poi  $\psi$  è un automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$ ,  $\psi(T)$  ha indice finito in  $\psi(H)$  (corollario 1.4) e  $\psi(H)$  è privo di sottogruppi d'indice finito. Pertanto è pure  $\psi(H) \triangleleft \psi(T)$ . Se si tiene ora conto che  $\mathcal{N}(H)$  coincide con l'unione dei sottogruppi di  $G$  in cui  $H$  ha indice finito, la conclusione si raggiunge facilmente.

2) Se  $H$  è un  $p$ -gruppo abeliano che contiene uno  $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ -gruppo, se  $\varphi$  è un isomorfismo di  $\mathfrak{L}(H)$  su  $\mathfrak{L}(\overline{H})$ , allora  $\overline{H}$  è pure abeliano.

All'uopo basta osservare che  $\overline{H}$  è un gruppo con reticolo dei sottogruppi  $\mathfrak{L}(\overline{H})$  modulare, che contiene uno  $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ -gruppo; e dalla caratterizzazione dei  $p$ -gruppi modulari (teor. 18 a pag. 22 in [23]) l'asserzione fatta segue facilmente. Ne deriva che se  $S$  è un sottogruppo di Sylow del gruppo localmente finito  $G$ , se  $S$  è abeliano e contiene uno  $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ -gruppo, allora se  $A \subseteq S$ ,  $\mathcal{N}(A)$  è rigidamente legato ad  $A$ . Ci proponiamo ora di dimostrare che se  $\varphi$  è un isomorfismo duale tra due gruppi localmente finiti  $G$  e  $\overline{G}$ , e se in  $G$  i 2-gruppi di Sylow sono  $ZA$ -gruppi <sup>11)</sup>, essi sono d'ordine finito e quindi  $G$  per la (4.3) è risolubile. Non sarà restrittivo nel seguito supporre che gli automorfismi indotti in  $\mathfrak{L}(G)$  mediante  $\varphi^{-1}$  da quelli interni di  $\overline{G}$  siano non singolari. E sia dunque  $E$  un 2-gruppo di Sylow di  $G$ , e per ipotesi assurda supponiamo che sia infinito; essendo  $G$  localmente finito, infinito sarà pure l'ordine di ogni 2-gruppo di Sylow di  $G$ . Per la (4.5) il gruppo  $\Phi$  di  $E$  è un gruppo privo di sottogruppi d'indice finito ed è uno  $ZA$ -gruppo periodico. Ciò basta per concludere che  $\Phi$  è abeliano <sup>12)</sup> e precisamente un prodotto diretto di  $\mathfrak{Z}(2^\infty)$ -gruppi. Il gruppo  $\Phi$  è altresì caratterizzato come il sottogruppo di  $E$  unione di tutti i sottogruppi completi di  $E$  <sup>13)</sup>.

Fissato uno  $\mathfrak{Z}(2^\infty)$ -gruppo di  $\Phi$ , chiamiamolo  $A$ , indichiamo con  $\mathcal{F}$  l'insieme dei sottogruppi  $X$  di  $G$  soddisfacenti alle seguenti condizioni:

<sup>11)</sup> Un gruppo  $G$  dicesi uno  $ZA$ -gruppo se possiede una serie centrale ascendente (vedasi ad es. [6], vol. II, pag. 218).

<sup>12)</sup> Vedasi ad es. § 23 e 65 in [6].

<sup>13)</sup> Vedasi ad es. Satz 1.8 in [3].

1)  $X$  è un 2-gruppo abeliano completo; 2)  $X \cup A = X \times A$ .  $\mathcal{F}$  è un insieme non vuoto contenendo il sottogruppo identico; ordinato parzialmente per inclusione,  $\mathcal{F}$  risulta un insieme induttivo. Infatti se  $\{X_i\}$  è una catena di  $\mathcal{F}$ , il gruppo  $Y = \bigcup X_i$  è un 2-gruppo abeliano completo e inoltre  $Y \cup A = Y \times A$ . Per Zorn esiste allora in  $\mathcal{F}$  un elemento massimale  $Z$ . Sia  $S$  un qualunque 2-gruppo di Sylow di  $G$  che contiene  $B = Z \cup A = Z \times A$ . Indicato di nuovo con  $\Phi$  il sottogruppo di  $S$  quale definito nella (4.4), risulta  $B \subseteq \Phi$ , anzi  $\Phi = B \times Q = A \times (Z \times Q)^{14}$ , e per la massimalità di  $Z$  è  $Q = 1$ , ossia  $B = \Phi$ . Consideriamo ora il gruppo  $M = \mathcal{N}(Z)/Z$ . Esso ha duale in virtù dell'osservazione 1. Andiamo a vedere come è fatto un suo 2-gruppo di Sylow  $M_2$ .  $M_2$  è del tipo  $R/Z$  con  $R$  un 2-gruppo che contiene  $Z$  ed  $A$ , quindi  $B$ . Se allora  $G_2$  è un 2-gruppo di Sylow di  $G$  che contiene  $R$ , e se  $\Phi$  è il gruppo di  $G_2$  quale definito in (4.4), per quanto visto risulta  $\Phi = B$ . Poichè il gruppo  $B$  ha indice finito in  $G_2$ , il suo indice è finito in  $R$ . Ne segue che il  $\Phi$  di  $M_2$  è il gruppo  $B/Z \cong A$  ossia è uno  $3(2^\infty)$ -gruppo. Abbiamo dunque il risultato che nel gruppo  $\mathcal{N}(Z)/Z$  ogni 2-gruppo di Sylow ha come sottogruppo massimo completo abeliano uno  $3(2^\infty)$ -gruppo. Supporremo nel seguito che nel gruppo  $G$  i 2-gruppi di Sylow godano delle predette proprietà, ed inoltre sarà lecito supporre che  $G = G'$  ed  $\mathcal{R}(G) = 1$ . Distinguiamo due casi:

a) In  $G$  ogni 2-gruppo di Sylow è uno  $3(2^\infty)$ -gruppo.

b) In  $G$  esiste almeno un 2-gruppo di Sylow  $S$  in cui  $\Phi$  ha indice maggiore di 1 in  $S$ .

*Caso a):* Se  $F$  è un sottogruppo finito di  $G$ , i 2-gruppi di Sylow di  $F$  sono ciclici. Ne segue (Burnside) che gli elementi di ordine dispari di  $F$  formano un sottogruppo di  $F$ . Ciò basta per concludere che in  $G$  gli elementi d'ordine dispari costituiscono un sottogruppo normale  $N$ , per cui il 2-gruppo  $G/N$  ha duale e dovrebbe pertanto essere finito, contro ipotesi.

Il caso a) non può, dunque, presentarsi.

*Caso b).* Distinguiamo due sottocasi:

---

<sup>14</sup>) Vedasi ad es. § 23 in [6].

- i) Esiste un 2-gruppo di Sylow  $S$  con  $\mathcal{N}(\Phi)$  non 2-gruppo.
- ii) Qualunque sia il 2-gruppo di Sylow  $S$  di  $G$ ,  $\mathcal{N}(\Phi) = S$ .
- i) Partiamo da un 2-gruppo di Sylow  $S$  di  $G$ , con  $\mathcal{N}(\Phi) \supset S$  non 2-gruppo. Il gruppo  $\mathcal{N}(\Phi)/\Phi = S/\Phi \cup C/\Phi$ , con  $C \cap S = \Phi$ ,  $C/\Phi$  non identico e  $C$  normale in  $\mathcal{N}(\Phi)$ .

In  $C$  il 2-gruppo di Sylow è uno  $3(2^\infty)$ -gruppo normale per cui  $C$  è il prodotto diretto di  $\Phi$  e di un gruppo non identico  $T$  privo di elementi d'ordine pari,  $C = \Phi \times T$ .  $T$  è pertanto normale in  $\mathcal{N}(\Phi)$  ed è l'insieme di tutti gli elementi d'ordine dispari di  $G$  che normalizzano  $\Phi$ ; di qui concludiamo che  $T$  è rigidamente legato a  $\Phi$  (corollario 1.6). Pertanto  $\varphi(\Phi)$  normalizza  $\varphi(T)$ ; ma  $\varphi(T) \cup \varphi(\Phi) = \varphi(T \cap \Phi) = \varphi(1) = \overline{G}$ : dunque  $\overline{G}/\varphi(T)$  è risolubile (teorema B) ed  $\mathcal{R}(G) \neq 1$  per il corollario 4.2; e questo è una contraddizione.

Per concludere la dimostrazione resta da escludere il sottocaso ii). Si consideri il gruppo unione  $U = \bigcup_{\bar{h} \in \varphi(H)} \psi_{\bar{h}}(\Phi)$  (come al solito

$\psi_{\bar{h}}$  indica l'automorfismo di  $\mathfrak{L}(G)$  indotto mediante  $\varphi^{-1}$  da quello interno individuato dall'elemento  $\bar{h}$  di  $\varphi(H)$ ), ove  $H$  è un sottogruppo finito di  $\Phi$  d'ordine almeno 4. Esso non può essere un 2-gruppo in quanto  $U/H$  avendo duale dovrebbe essere un gruppo finito. Ne segue che il centralizzante di  $H$  in  $G$  contiene elementi non identici d'ordine primo dispari. Sia  $a$  un tale elemento e posto  $F = \langle a \rangle$ , si consideri il gruppo  $T$  unione di tutti i sottogruppi ciclici di  $G$  hanno ordine primo con  $p$  e sono direttamente permutabili con  $F$ . Il gruppo  $T$  è rigidamente legato ad  $F$  per cui se  $B = T \cup F$ , il gruppo  $B/F$  ha duale. Si consideri un 2-gruppo di Sylow  $S$  di  $B$ ; esso non può essere infinito in quanto  $S$  conterrebbe uno  $3(2^\infty)$ -gruppo  $\Phi$  il cui normalizzante  $\mathcal{N}(\Phi)$  contenendo  $F$  non sarebbe un 2-gruppo; pertanto esso è finito e di ordine almeno 4. Ma allora il gruppo  $B/F$  è risolubile e tenuto conto del teorema A, risulta  $B/F = L/F \times M/F$  ove  $L/F$  è il 2-gruppo di Sylow di  $B/F$ . È dunque  $L = P \times F$ , con  $P$  2-gruppo di  $L$  e quindi di  $B$ ; ma  $L$  è normale in  $B$ , per cui  $P$  è l'unico 2-gruppo di Sylow di  $B$ . Esso è dunque rigidamente legato ad  $F$ . Ne segue di nuovo  $\mathcal{R}(G) \neq 1$  contro ipotesi. E con ciò abbiamo completato la dimostrazione del

TEOREMA C. — Sia  $\varphi$  un isomorfismo duale tra i gruppi localmente finiti  $G$  e  $\overline{G}$ . Se i 2-gruppi di Sylow di  $G$  sono  $ZA$ -gruppi, il gruppo  $G$  è risolubile.

Corollario 4.7. — Se  $G$  è un gruppo localmente finito dualmente isomorfo ad un gruppo localmente finito  $\overline{G}$ , se in  $G$  i 2-gruppi di Sylow soddisfano alla condizione minimale per i sottogruppi abeliani, allora  $G$  è risolubile.

Poichè  $G$  è localmente finito i  $p$ -gruppi di  $G$  sono localmente risolubili. Ma un  $p$ -gruppo risolubile in cui i gruppi abeliani soddisfano alla condizione minimale sono  $ZA$ -gruppi<sup>15</sup>). Donde la conclusione.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] BAER R.: *Dualism in abelian groups*. Bull. Amer. Math. Soc., 43 (1937), 121-124.
- [2] BAER R.: *Duality and commutativity of groups*. Duke Math. J., 5 (1939), 824-838.
- [3] ČERNIKOV S. N.: *Endlichkeitsbedingungen in der Gruppentheorie*. Math. Forschungsberichte. Deutscher Verlag der Wiss., Berlin (1936), 9-76.
- [4] FEIT W. and THOMPSON J. C.: *Solvability of groups of odd order*. Pacif. J. of Math., 13 (1963), 775-1029.
- [5] HALL P. and KULATILAKA C. R.: *A property of locally finite groups*. J. London Math. Soc., 39 (1964), 235-239.
- [6] KUROSH A. G.: *The theory of groups*. Chelsea Publ. C. New York, N. Y. (1955).
- [7] ROBINSON, DEREK J. S.: *Groups in which normality is a transitive relation*. Proc. Cambr. Ph. Soc., 60 (1964), 21-38.
- [8] SUZUKI M.: *On the lattice of subgroups of finite groups*. Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 345-371.
- [9] SUZUKI M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. Ergeb. der Math. u. ihrer Grenzgebiete. Neue Folge Heft 10. Springer Verlag-Berlin (1956).
- [10] ZACHER G.: *I gruppi risolubili con duale*. Rend. Sem. Mat. Padova, 31 (1961), 104-113.
- [11] ZACHER G.: *Caratterizzazione dei gruppi immagini omomorfe duali di un gruppo finito*. Rend. Sem. Mat. Padova, 31 (1961), 412-422.

Pervenuta in Redazione il 1 settembre 1965.

---

<sup>15</sup>) Vedasi ad es. [3], pag. 53, Folgerung 8-10.