RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OTTO H. KEGEL

Eine Charakterisierung der Sylowgruppen endlicher Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 1 (1966), p. 122-128

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_122_0>

EINE CHARAKTERISIERUNG DER SYLOWGRUPPEN ENDLICHER GRUPPEN

di OTTO H. KEGEL (*Frankfurt a. M.*) *)

Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse endlicher Gruppen, die mit der Gruppe G auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe von G enthält und ist f eine Funktion, die jeder Gruppe $G \in \mathfrak{K}$ eine Menge $f(G)$ « interessanter » Untergruppen (von G) zuordnet, so wird man versuchen, die Menge $f(G)$ der « interessanten » Untergruppen von G möglichst durch formale Vererbungseigenschaften der Funktion f zu charakterisieren. Es werden hier solche formalen Eigenschaften von f angeben, die auf der Klasse $\mathcal{A}$ der endlichen auflösbaren Gruppen genau die Menge der π-Hallgruppen von $G \in \mathcal{A}$ für eine feste (aber nicht spezifizierte) Primzahlmenge π charakterisieren; auf der Klasse $\mathfrak{E}$ aller endlichen Gruppen gilt für eine solche Funktion entweder $f(G)$ enthält als einziges Element stets die Einheitsuntergruppe von G, oder $f(G)$ enthält als einziges Element stets die Gruppe G selbst, oder aber die Menge $f(G)$ ist genau die Menge der p-Sylowgruppen von G für eine feste (aber nicht spezifizierte) Primzahl p. — Als Anwendung der formalen Eigenschaften solcher « Sylowfunktionen » erhält man eine Charakterisierung der Klasse $\mathcal{A}$ aller endlichen auflösbaren Gruppen. Eine weitere Charakterisierung

---

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt (Main) — 6 Frankfurt — Robert Mayer Strasse 6-8 (Germania)

dieser Klasse beschreibt sie als die umfassendste Klasse endlicher Gruppen derart, daß mit G auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe in ihr liegt, und G für jedes Paar (p, q) von Primzahlen eine (p, q)-Hallgruppe besitzt.

Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse endlicher Gruppen, die mit G auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe von G enthält, so heiße die Funktion f, die jeder Gruppe $G \in \mathfrak{K}$ die Menge $f(G)$ von Untergruppen von G zuordnet, eine *Sylowfunktion* auf $\mathfrak{K}$, wenn sie die folgenden formalen Eigenschaften hat:

1) Für $G \in \mathfrak{K}$ ist $f(G)$ eine Klasse konjugierter Untergruppen von G.

2) Für jeden Epimorphismus σ der Gruppe $G \in \mathfrak{K}$ gilt $f(G^\sigma) = (f(G))^\sigma$.

3) Zu jeder Untergruppe $S \in f(U)$ mit $U \subseteq G \in \mathfrak{K}$ gibt es eine Untergruppe $T \in f(G)$ mit $S = T \cap U$.

4) Gibt es für das Paar $U \subseteq G \in \mathfrak{K}$ ein $T \in f(G)$ mit $T \cap U \neq \neq 1$, so gibt es ein $S \in f(U)$ mit $S \neq 1$.

Der Name Sylowfunktion stammt von folgendem Beispiel: Ist p eine Primzahl, so sei durch p auch die Funktion bezeichnet, die jeder endlichen Gruppe G die Menge $p(G)$ ihrer p-Sylowgruppen zuordnet. Daß die Funktion p die Eigenschaften 1)-4) hat, also eine Sylowfunktion auf der Klasse $\mathfrak{E}$ aller endlichen Gruppen ist, ist klar.

Ist π eine Menge von Primzahlen, so heißt die Untergruppe H der endlichen Gruppe G eine *π-Hallgruppe* von G, wenn jeder Primteiler der Ordnung von H in π liegt, aber kein Primteiler des Index $[G : H]$.

Für Sylowfunktionen gilt der

Satz 1: *Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse endlicher Gruppen, die mit der Gruppe G auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe von G enthält, und ist f eine Sylowfunktion auf $\mathfrak{K}$, so gibt es eine Primzahlmenge $\pi = \pi_f$ so, daß $f(G)$ für jedes $G \in \mathfrak{K}$ die Menge aller π-Hallgruppen von G ist. Jede π-Untergruppe von G ist in einer Untergruppe aus $f(G)$ enthalten.*

Beweis: Zunächst werde gezeigt:

$f(G)$ ist eine Klasse konjugierter Hallgruppen von G.

Angenommen, dies ist falsch; dann gibt es unter den Gegenbeispielen zu dieser Aussage eine Gruppe G von kleinster Ordnung. Da $T \in f(G)$ keine Hallgruppe von G ist, so gibt es einen gemeinsamen Primteiler p von der Ordnung von T und dem Index $[G : T]$. Sei P eine p-Sylowgruppe von G mit $P \cap T \neq 1$. Wegen Eigenschaft 4) besteht $f(P)$ aus Untergruppen $\neq 1$ von P. Ist nun $P \neq G$, so folgt aus der Minimalität von G die Aussage $P \in f(P)$; und aus der Eigenschaft 3) erhält man die Existenz einer zu T konjugierten Untergruppe $T_1 \in f(G)$, die P enthält und daher zu p teilerfremden Index in G hat. Dies widerspricht der Wahl von P. — Daher gilt $P = G$.

Ist G elementar abelsch, so gibt es eine zu T komplementäre Untergruppe $S \neq 1$ von G. Wegen Bedingung 2) gilt $1 \in f(S)$. Andererseits gibt es einen Automorphismus σ von G derart, daß $T^\sigma \cap S \neq 1$; und die Eigenschaft 4) liefert einen Widerspruch. — Daher ist G nicht elementar abelsch.

Ist nun M eine maximale Untergruppe der p-Gruppe G, so gilt — wegen der Minimalität von G — entweder $1 \in f(M)$ oder $M \in f(M)$. Gilt nun $1 \in f(M)$, so ist $T \cap M = 1$ wegen Eigenschaft 4); also hat T die Ordnung p. Da G nicht elementar abelsch ist, so ist $M \neq 1$; und es gibt eine Untergruppe U der Ordnung p in M. Nach Bedingung 2) gilt für die zu T isomorphe Gruppe $U \in f(U)$; Bedingung 3) zeigt nun $1 \in f(M)$, was der Annahme über $f(M)$ widerspricht. — Also gilt $M \in f(M)$. Nach Bedingung 2) ist dann $1 \in f(G/M)$. Es gibt dann aber einen Isomorphismus von G/M auf eine Untergruppe U der Ordnung p von M. Da nach Bedingung 4) gilt: $U \in f(U)$, so folgt aus der Eigenschaft 2): $G/M \in f(G/M)$; ein Widerspruch! — Damit ist die Annahme, $T \in f(G)$ sei keine Hallgruppe von G zum Widerspruch geführt; es kann kein solches Gegenbeispiel geben.

Sind nun X und Y Gruppen aus der Klasse $\mathfrak{K}$ und ist die Primzahl p ein Teiler der Ordnung von $S \in f(X)$ und der Ordnung von Y, dann gibt es nach Bedingung 4) eine Untergruppe U der Ordnung p in S, so daß $U \in f(U)$ gilt. Wegen der Eigenschaft 2) gilt dann aber für jede Untergruppe V der Ordnung p von Y ebenfalls $V \in f(V)$. Nach Bedingung 3) teilt nun aber p auch die Ordnung von $T \in f(Y)$.

Für jedes $G \in \mathfrak{K}$ sei π_G die Menge der Primteiler der Ordnung von G; dann ist die gesuchte Primzahlmenge genau

$$\pi = \pi_f = \bigcup_{G \in \mathfrak{K}} \pi_{f(G)} .$$

Für die letzte Aussage des Satzes sei V eine π-Untergruppe von $G \in \mathfrak{K}$ und sei $H \in f(G)$ eine π-Hallgruppe von G. Da $f(V)$ aus π-Hallgruppen von V besteht, gilt $V \in f(V)$. Wegen der Eigenschaft 3) der Sylowfunktionen gibt es also eine zu H konjugierte Untergruppe $H_1 \in f(G)$ mit $V \subseteq H_1$.

ZUSATZ: *Die Sylowfunktion f ordnet jeder Gruppe G der Klasse $\mathfrak{K}$ genau dann auflösbare π-Hallgruppen zu, wenn es zu jeder Teilmenge π' der Primzahlmenge π eine Sylowfunktion g auf $\mathfrak{K}$ gibt mit $\pi' = \pi_g$.*

Beweis: Gibt es zu jeder Teilmenge π' von π eine Sylowfunktion g auf $\mathfrak{K}$ mit $\pi' = \pi_g$, und ist $S \in f(G)$ mit $G \in \mathfrak{K}$, so besitzt die endliche Gruppe S zu jedem Primteiler p ihrer Ordnung ein p-Komplement. Nach einem Satz von P. Hall [2] ist S dann aber auflösbar. — Ist andererseits $S \in f(G)$ für jedes $G \in \mathfrak{K}$ $G \in \mathfrak{K}$ unflösbar, und sei $\pi' \subseteq \pi$, so sei g die Funktion, die jedem $G \in \mathfrak{K}$ die Menge $g(G)$ der π'-Hallgruppen von G zuordnet. Dann liegt für $G \in \mathfrak{K}$ jede π'-Untergruppe von G in einer auflösbaren π-Hallgruppe, und daher auch in einer π'-Hallgruppe von G. Nun verifiziert man direkt die Eigenschaften 1)-4): g ist also eine Sylowfunktion auf $\mathfrak{K}$.

BEMERKUNG: In diesem Zusammenhang sei auch auf den Satz von Gol'berg hingewiesen, der im wesentlichen besagt, daß auf der Klasse $\mathfrak{K}$ der π-separablen endlichen Gruppen, die Funktion f, die jedem $G \in \mathfrak{K}$ die Menge $f(G)$ der (auflösbaren!) π-Hallgruppen von G zuordnet, eine Sylowfunktion auf $\mathfrak{K}$ ist. (Vgl. etwa Kurosh [4], S. 196).

Schränkt man die Klasse $\mathfrak{K}$ nicht irgendwie ein, so gilt

SATZ 2: *Ist f eine Sylowfunktion auf der Klasse $\mathfrak{E}$ aller endlichen Gruppen, so ist die f nach Satz 1 zugeordnete Primzahlmenge π_f entweder leer oder einelementig, oder aber die Menge aller Primzahlen.*

Dies ist die im Titel erwähnte Charakterisierung der Sylowgruppen.

Beweis: Gibt es in π_f mindestens zwei Primzahlen, so ist zu zeigen, daß π_f alle Primzahlen enthält.

Sind die Primzahlen 2 und 3 beide in π_f enthalten und enthält π_f nicht alle Primzahlen, so sei p die kleinste nicht in π_f enthaltene Primzahl. In der symmetrischen Gruppe S_{p+1} des Grades $p+1$ kann es keine π_f-Hallgruppe geben; denn diese hätte den Index p in S_{p+1}, also hätte S_{p+1} eine Permutationsdarstellung vom Grade p, was wegen $p > 3$ nicht geht. — Enthält also die Primzahlmenge π_f nicht alle Primzahlen, so enthält π_f sicher nicht beide Zahlen 2 und 3. Sind nun in dieser Situation p und q ($p < q$) die beiden kleinsten Primzahlen, die in π_f vorkommen, dann gilt $5 \leq q$. Nach P. Hall ([3], Theorem A 4) gibt es in der symmetrischen Gruppe S_q des Grades q keine (p, q)-Hallgruppe. — Dies widerspricht Satz 1. — Daher stimmt π_f mit der Menge aller Primzahlen überein, wenn π_f mindestens zwei Primzahlen enthält.

Die Sylowfunktion f auf der Klasse $\mathfrak{K}$ endlicher Gruppen heißt *maximal bei G auf $\mathfrak{K}$*, falls $G \notin f(G)$ und falls für jede Sylowfunktion s auf $\mathfrak{K}$ mit $G \notin s(G)$ aus $P \in f(G)$, $Q \in s(G)$ und $P \subseteq Q$ folgt $P = Q$; sie heißt *nicht-trivial bei G auf $\mathfrak{K}$*, falls $G \notin f(G)$, aber die Ordnung von $P \in f(G)$ mindestens zwei verschiedene Primteiler hat.

Durch $\mathfrak{K}(G)$ sei die Klasse aller epimorphen Bilder von Untergruppen der Gruppe G bezeichnet. $\nu(G)$ bezeiche die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Ordnung von G.

Mit diesen Bezeichnungen gilt

SATZ 3: *Für die endliche Gruppe G sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) G ist auflösbar.

b) Für jedes Paar von Primzahlen (p, q) besitzt jede Untergruppe U von G eine (p, q)-Hallgruppe.

c) Für jede Gruppe $H \in \mathfrak{K}(G)$ mit $\nu(H) \geq 4$ (bzw. $\nu(H) = 3$) gibt es mindestens 4 (bzw. genau 3) Sylowfunktionen auf $\mathfrak{K}(G)$, die bei H verschieden, nicht-trivial und maximal sind.

Beweis: Nach den Hallschen Sätzen sind *b*) und *c*) Folgen von *a*). Angenommen, die Bedingung *b*) bzw. *c*) impliziert nicht die Auflösbarkeit von G, so gibt es eine endliche Gruppe G von kleinster Ordnung, die nicht auflösbar ist, aber die Bedingung b) bzw. c) erfüllt. Da sich die Bedingungen b) und c) offenbar auf Untergruppen und auf epimorphe Bilder vererben, so ist jede echte Untergruppe und jedes echte epimorphe Bild von G auflösbar. Also ist G eine minimal-einfache Gruppe.

Ist $\nu(G) = 3$, so folgt aus der Bedingung b) bzw. aus der Existenz von drei verschiedenen, nicht-trivialen, maximalen Sylowfunktionen bei G die Existenz eines p-Komplements für jeden Primteiler p der Ordnung von G; und nach einem Satz von P. Hall [2] ist G auflösbar. Dies widespricht unserer Annahme über G. Daher gilt $\nu(G) \geq 4$.

Nach einem von J. G. Thompson angekündigten Satz [6] ist die Struktur der minimal-einfachen Gruppen bekannt: Gilt für eine solche Gruppe G die Ungleichung $\nu(G) \geq 4$, so ist G zu einer Gruppe vom Typ PSL $(2, q)$ oder zu einer Gruppe $S(q)$ von Suzukischen Typ isomorph.

Daß die Gruppen der Form PSL$(2, q)$ die Bedingungen 2) und 3) nicht erfüllen, ergibt sich aus der wohlbekannten Übersicht über die Untergruppen von PSL$(2, r^n)$ (vgl. Dickson [1], chapter XII): Sei p ein Primteiler von $r^n + 1$, so gibt es in PSL$(2, r^n)$ für $r^n \geq 4$ keine (p, r)-Hallgruppen. Ebenso einfach verifiziert man, daß es in $PSL(2, r^n)$ höchstens drei verschiedene, nicht-triviale, maximale Sylofunktionen gibt.

Die Ordnungen der einfachen Gruppen $S(q)$ mit $q = 2^{2n+1}$ von Suzuki haben die Form $q^2(q^2 + 1)(q - 1)$. Ist p ein Primteiler von $q^2 + 1$. dann entnimmt man der Liste der Untergruppen von $S(q)$ (vgl. [5], § 15), daß es in $S(q)$ keine $(2, p)$-Hallgruppen gibt. Ebenso stellt man fest, daß es bei $S(q)$ genau drei verschiedene maximale Sylowfunktionen gibt.

Diese Aussagen widersprechen aber unserer Annahme, die Gruppe G mit $\nu(G) \geq 4$ sei nicht auflösbar; also muß diese falsch sein. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] L. E. DICKSON: *Linear groups.* Leipzig 1901.
[2] P. HALL: *A characteristic property of soluble groups.* J. London Math. Soc. XII (1937) 198-200.
[3] P. HALL: *On theorems like Sylow's.* Proc. London Math. Soc. (III) 4 (1956) 268-304.
[4] A. G. KUROSH: *The theory of groups,* English ed. New York 1956 vol. II.
[5] M. SUZUKI: *On a class of doubly transitive groups.* Annals of Math. 75 (1962) 105-145.
[6] J. G. THOMPSON: *Some simple groups.* Symposium on Group Theory. Harvard 1963, 21-22.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 giugno 1965.