

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI ANTONIO ROSATI

Gruppi affini d'incidenza

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 1 (1965), p. 71-81

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_71_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

GRUPPI AFFINI D'INCIDENZA

*Nota *) di LUIGI ANTONIO ROSATI (a Firenze) **)*

E. ELLERS e H. KARZEL hanno recentemente introdotto il concetto di gruppo proiettivo d'incidenza [3, 4] e sull'argomento H. KARZEL ha pubblicato successivamente due note [6, 7]. Gruppi proiettivi d'incidenza di dimensione due e desarguesiani erano stati in precedenza considerati da J. SINGER [10], M. HALL [5], G. ZAPPA [11, 12], R. H. BRUCK [2] e da me [9] che avevo determinato tutti i gruppi proiettivi d'incidenza di dimensione due desarguesiani finiti e non ciclici.

In questa nota introduco il concetto di gruppo affine d'incidenza e mostro che i gruppi affini d'incidenza desarguesiani di una data dimensione $n \geq 2$ sono in corrispondenza biunivoca con i quasicorpi associativi di una certa classe che nel caso di gruppi finiti e di dimensione due coincide con la classe dei quasicorpi associativi che hanno per ordine un quadrato.

Estendo anche a tutti i gruppi d'incidenza desarguesiani, proiettivi e affini, alcuni teoremi già da me stabiliti in [8, 9] nel caso di gruppi finiti, proiettivi e affini, desarguesiani di dimensione due.

Introdotta la nozione di gruppo affine d'incidenza bilatero,

*) Pervenuto in redazione il 1° giugno 1964.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Firenze.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività per l'anno 1963-64 dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R.

dimostro anche che ogni gruppo affine d'incidenza di dimensione due (desarguesiano o no) bilatero è commutativo.

Gruppi affini d'incidenza erano già stati considerati da R. C. BOSE [1] che aveva determinato tutti i gruppi affini d'incidenza di dimensione due desarguesiani finiti e ciclici e da me che in [8] avevo determinato tutti i gruppi affini d'incidenza di dimensione due, desarguesiani, finiti, non ciclici.

1. - Diremo *gruppo* con O un insieme $G = \{H, O\}$ dotato di un'operazione di moltiplicazione che induca su H una struttura di gruppo e tale che qualunque sia $a \in G$ si abbia $Oa = aO = O$.

Diremo *gruppo affine d'incidenza* di dimensione n un insieme G dotato di due diverse strutture una di gruppo con O e una di spazio affine di dimensione $n > 1$ e tale che ogni traslazione sinistra del gruppo G

$$\alpha^* : \xi \rightarrow \alpha\xi \quad (0 \neq \alpha, \xi \in G)$$

sia una collineazione (affinità) dello spazio affine G .

È chiaro che al variare di α in $G - \{O\}$ le collineazioni α^* costituiscono un gruppo, Γ , isomorfo ad $H - \{O\}$, semplicemente transitivo sui punti di G diversi da O .

Diremo G *desarguesiano* quando sarà desarguesiano lo spazio proiettivo corrispondente allo spazio affine G . Un gruppo affine d'incidenza di dimensione maggiore di 2 è sempre desarguesiano.

Ad un gruppo affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano si può sempre dare la struttura di spazio vettoriale destro di dimensione n sopra il corpo F delle coordinate. Indicheremo con \bar{G} questo spazio vettoriale e identificheremo ogni punto di G col vettore di \bar{G} che lo rappresenta. Inoltre d'ora in poi useremo il simbolo $\alpha \circ \beta$ per rappresentare il prodotto dei due punti α, β , mentre ci serviremo del simbolo αh per indicare il prodotto del vettore α per l'elemento h di F .

Sempre nel caso desarguesiano ogni collineazione α^* appartenente a Γ induce sullo spazio vettoriale \bar{G} una trasformazione semilineare, che indicheremo anch'essa col simbolo α^* ,

$$\alpha^* : \xi \rightarrow \alpha \circ \xi \quad (\alpha, \xi \in G; \alpha \neq 0),$$

vale a dire un'applicazione di G su di sè tale che

$$\begin{aligned}\alpha^*(\beta + \gamma) &= \alpha^*\beta + \alpha^*\gamma \\ \alpha^*(\beta h) &= (\alpha^*\beta)h^\sigma,\end{aligned}$$

dove σ è un automorfismo di F dipendente da α . (Nel caso che si abbia $\sigma = 1$ la collineazione α^* verrà detta una *proiettività*).

Si ha pertanto il seguente teorema:

1.1. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza desarguesiano di dimensione n . Allora il gruppo con zero G è il gruppo con zero moltiplicativo di un quasicorpo associativo sinistro ¹⁾ K avente per elementi quelli di G e dotato delle seguenti proprietà:*

- 1) K è uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G ;
- 2) presi comunque $\alpha, \beta \in K$ ($\alpha \neq 0$), $h \in F$ risulta

$$\alpha \circ (\beta h) = (\alpha \circ \beta)h^\sigma,$$

essendo σ un automorfismo di F dipendente da α .

Vogliamo ora invertire questo teorema:

1.2. - *Sia K un quasicorpo associativo sinistro per il quale valgano le proprietà:*

- 1) K è uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra un corpo F ;

2) $\alpha \circ (\beta h) = (\alpha \circ \beta)h^\sigma$ ($\alpha, \beta \in K$; $\alpha \neq 0$; $h \in F$; σ automorfismo di F). Allora il gruppo con O moltiplicativo di K , G , è uno spazio affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano ed F risulta isomorfo al gruppo delle coordinate dei punti di G .

Poichè K è uno spazio vettoriale di dimensione n sopra un corpo F , i vettori di K possono pensarsi come punti di uno spazio affine desarguesiano di dimensione n sopra il corpo F . Quindi per dimostrare il teorema basterà dimostrare che ogni trasla-

¹⁾ Chiamiamo quasicorpo associativo sinistro un insieme dotato di due operazioni \cdot $+$ per le quali valgono tutte le proprietà delle stesse operazioni nei corpi tranne la proprietà distributiva $(a + b)c = ac + bc$.

zione sinistra del gruppo G

$$\alpha^* : \xi \rightarrow \alpha \circ \xi \quad (0 \neq \alpha \in G, \xi \in G)$$

è una collineazione dello spazio affine G .

Sia $\xi = \beta h + \gamma$ ($\beta, \gamma \in G$; $\beta \neq 0$; h variabile in F) l'equazione vettoriale di una retta, r , appartenente a G e sia $\bar{\xi} = \beta \bar{h} + \gamma$ un suo punto. Si ha

$$\alpha^* \bar{\xi} = \alpha \circ (\beta \bar{h} + \gamma) = (\alpha \circ \beta) \bar{h}^\sigma + \alpha \circ \gamma.$$

Pertanto $\alpha^* \bar{\xi}$ appartiene alla retta $\xi = (\alpha \circ \beta)h + \alpha \circ \gamma$.

Analogamente si vede che ogni punto di questa retta è il corrispondente in α^* di un punto di r e rimane dimostrato che α^* è una collineazione di G .

Da [8] risulta che da un qualunque quasicorpo associativo finito d'ordine q^2 si può ricavare col procedimento del teorema 2 un gruppo affine d'incidenza di dimensione 2 desarguesiano. Questo significa che ogni quasicorpo associativo finito d'ordine q^2 verifica le condizioni 1), 2) del teorema 2.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

1.3. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano e siano F il corpo delle coordinate dei punti di G , K il quasicorpo relativo a G , N il nucleo di K . Se tutte le collineazioni appartenenti a Γ sono proiettività allora F è isomorfo al sottoquasicorpo F' di K formato dagli elementi della forma ηh (η unità di K , $h \in F$) e si ha $F' \subseteq N$.*

Poichè tutte le collineazioni appartenenti a G sono proiettività, comunque si prendano $\alpha \neq 0$, ξ in K e h in F , si ha

$$(1) \quad \alpha \circ (\xi h) = (\alpha \circ \xi) h.$$

Pertanto, se h, k sono due qualunque elementi di F , si ha

$$\begin{aligned} (\eta h) \circ (\eta k) &= [(\eta h) \circ \eta] k = (\eta h) k = \eta(hk), \\ \eta(h + k) &= \eta h + \eta k. \end{aligned}$$

Quindi K contiene come sottoquasicorpo il corpo F' isomorfo ad F formato dagli elementi della forma $\eta h (h \in F)$.

Dalla (1) si ha

$$\alpha \circ (\eta h) = \alpha h \quad \text{per ogni } h \in F.$$

Di conseguenza per ogni $h \in F$

$$(\alpha + \beta) \circ (\eta h) = (\alpha + \beta)h = \alpha h + \beta h = \alpha \circ (\eta h) + \beta \circ (\eta h),$$

e questo significa che $F' \subseteq N$.

Invertiamo ora il teorema enunciato.

1.4. - Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione $n (> 1)$ desarguesiano e siano F il corpo delle coordinate dei punti di G , K il quasicorpo relativo a G , N il nucleo di K . Se gli elementi di K della forma ηh (η unità di K ; $h \in F$) costituiscono un sottoquasicorpo F' di K isomorfo ad F e si ha $F' \subseteq N$ allora tutte le collineazioni appartenenti a Γ sono proiettività.

Sia α un qualunque elemento di K diverso da zero e sia ηh un qualunque elemento di $F' \subseteq N$. Si ha allora $\alpha \circ (\eta h) = \alpha h^\sigma$, essendo σ un automorfismo di F . Noi vogliamo dimostrare intanto che σ è indipendente da α . Fissati in K $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, poichè la dimensione n di G è maggiore di uno, si potrà trovare in K $\gamma \neq 0$ tale che si abbia $\alpha + \gamma \neq 0$, $\beta + \gamma \neq 0$, $\alpha \neq \gamma k$, $\beta \neq \gamma k$ per ogni $k \in F$. Si avrà

$$(\alpha + \gamma) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\eta h) + \gamma \circ (\eta h)$$

e quindi

$$(2) \quad (\alpha + \gamma)h^\sigma = \alpha h^{\sigma\alpha} + \gamma h^{\sigma\gamma},$$

essendo σ , σ_α , σ_γ automorfismi di F . Dalla (2) si trae

$$(3) \quad \alpha(h^\sigma - h^{\sigma\alpha}) = \gamma(h^{\sigma\gamma} - h^\sigma)$$

e, poichè per ogni $k \in F$ si ha $\alpha \neq \gamma k$, dalla (3) si ottiene $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma (= \sigma)$. Analogamente si ha $\sigma_\beta = \sigma_\gamma$, e pertanto $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$.

Siano allora α, β due elementi di K diversi da 0. Per ogni $h \in F$ si avrà

$$(\alpha \circ \beta)h^\sigma = (\alpha \circ \beta) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\beta \circ (\eta h)) = \alpha \circ (\beta h^\sigma) = (\alpha \circ \beta)h^{\sigma^2}$$

e pertanto $\sigma = 1$, $\alpha \circ (\eta h) = \alpha h$. Allora

$$(\alpha \circ \beta)h = (\alpha \circ \beta) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\beta \circ (\eta h)) = \alpha \circ (\beta h)$$

e questo dimostra che ogni collineazione appartenente a Γ è una proiettività, come si voleva dimostrare.

2. - Chiamiamo ora *bilatero* un gruppo affine d'incidenza G nel quale, non solo ogni traslazione sinistra, ma anche ogni traslazione destra

$$\bar{a}: x \rightarrow xa \quad (x, a \in G; a \neq 0)$$

sia una collineazione dello spazio affine G .

Le traslazioni destre costituiscono un gruppo $\bar{\Gamma}$, isomorfo al gruppo $H = G - \{O\}$ ed al gruppo Γ delle traslazioni sinistre, semplicemente transitivo sui punti di G diversi da O .

Dopo alcune considerazioni generali sopra i gruppi affini d'incidenza di dimensione due dimostreremo che ogni gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero è commutativo.

2.1. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due e sia R una retta di G passante per 1 e non per O . Allora l'insieme dei punti di R non è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$.*

Supponiamo, per assurdo, che R sia un sottogruppo di H . Se a è un qualunque elemento di H si ha che aR è un laterale di R in H e pertanto o $aR = R$ (se $a \in R$) oppure aR ed R non hanno elementi in comune. Pertanto le due rette aR ed R o coincidono o sono parallele.

Sia ora b un qualunque punto della parallela S ad R per O . Si ha subito che bR coincide con S , perchè bR passa per b ed è parallela ad R . Ebbene questo è impossibile perchè ogni collineazione $b^* \in \Gamma$ muta O in sè e quindi rette per O in rette per O , rette non passanti per O in rette non passanti per O .

2.2. - Sia L un insieme di elementi di un gruppo H e supponiamo che si abbia $1 \in L$. Allora L è un sottogruppo di H se e solo se, qualunque sia $x \in L$, si ha $xL = L$ ($Lx = L$).

È ovvio che, se L è un sottogruppo di H , qualunque sia $x \in L$, si ha $L = xL$ ($L = Lx$).

Supponiamo al contrario che, qualunque sia $x \in L$, si abbia $xL = L$. Qualunque sia $x \in L$ si ha anche $L = x^{-1}L$ e, poichè $1 \in L$, si ha $x^{-1} \in x^{-1}L = L$. Se anche $y \in L$, si ha $yL = L$ e pertanto $xyL = yL = L$. Questo significa che $xy \in L$ e rimane dimostrato che L è un sottogruppo di H .

2.3. - L'insieme N dei punti diversi da O della retta M che congiunge O con 1 è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$.

Poichè $1 \in N$, se $x \in N$, si ha $x \in xN$. Ne viene che M e xM coincidono perchè passano entrambe per x e per O . Allora coincidono anche x e xN e per 2.2. N è un sottogruppo di H .

2.4. - Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero e sia R una retta di G passante per 1 e non passante per O . Allora da $aR = R$ ($a \in G$, $a \neq 0$) segue $a = 1$.

Per 2.1 R non è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$ e allora per 2.2 le rette Rr^{-1} ($r \in R$) non sono tutte coincidenti con R . Se Rr_1^{-1} ($r_1 \in R$) è distinta da R , siccome Rr_1^{-1} ed R passano entrambe per 1 , si ha che 1 è l'unico punto che esse abbiano in comune. Allora a è l'unico punto comune ad aRr_1^{-1} e aR .

Ora se è $aR = R$ risulta anche $aRr_1^{-1} = Rr_1^{-1}$ e perciò $a = 1$, come si voleva dimostrare.

2.5. - Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero e sia R una retta di G passante per 1 e non per O . Allora l'insieme dei punti di R è un sistema di generatori di $H = G - \{O\}$.

Come abbiamo già osservato le rette Rr^{-1} ($r \in R$) non sono tutte coincidenti e, poichè passano tutte per 1 , se a è un qualunque elemento di H , esisterà $r_1 \in R$ tale che Rr_1^{-1} e Ra^{-1} siano incidenti; esisteranno cioè $r_2, r_3 \in R$ tali che si abbia $r_2r_1^{-1} = r_3a^{-1}$, ossia $a = r_1r_2^{-1}r_3$ e risulta dimostrato quanto si voleva.

2.6. - Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due (desarguesiano o no) bilatero. Allora G è commutativo.

Tenuto conto di 2.5, basterà dimostrare che il prodotto di

due elementi qualsiasi di una retta R di G passante per 1 e non passante per O è commutativo.

Detto r un qualunque punto di R , si consideri la collineazione di G

$$\tilde{r} : x \rightarrow r x r^{-1}.$$

Si verifica subito che $rR = \tilde{r}Rr^{-1} = R$: infatti $1 \in R$ e perciò $1 \in rRr^{-1}$; d'altra parte $r \in R$ e pertanto $r \in rRr^{-1}$. Ne viene che rRr^{-1} è la retta che congiunge 1 con r , cioè la retta R . Da $rRr^{-1} = R$ segue che si ha anche $r^{-1}Rr = R$ e allora, tenuto conto che R è un sistema di generatori di H , si ha che se x è un qualunque punto di G diverso da zero, risulta

$$(4) \quad xR x^{-1} = R.$$

Siano allora a, b due punti appartenenti ad R . Posto $a^{-1}b = x$, poichè a, b appartengono ad R , si ha che $a^{-1}R$ è la retta che congiunge 1 con x . Dalla (4) segue

$$\tilde{x} : a^{-1}R \rightarrow x a^{-1} R x^{-1} = x a^{-1} x^{-1} R.$$

Ora $b = xa \in R$, $a \in R$ e quindi $x a^{-1} x^{-1} R = x a^{-1} R x^{-1}$ è la retta che congiunge x con 1, cioè si ha $a^{-1}R = x a^{-1} x^{-1} R$, ossia $ax a^{-1} x^{-1} R = R$. Da 2.4 segue allora $ax a^{-1} x^{-1} = 1$, $ax = xa$ e quindi $ab = ba$, come si voleva dimostrare.

3. - Rammentiamo che, secondo ELLERS e KARZEL [4], si dice *gruppo proiettivo d'incidenza* un gruppo G dotato anche di una struttura di spazio proiettivo tale che ogni traslazione sinistra del gruppo G

$$a^* : x \rightarrow ax \quad (a, x \in G)$$

sia una collineazione dello spazio proiettivo G . Queste collineazioni costituiscono un gruppo Γ isomorfo a G semplicemente transitivo sui punti di G .

Vogliamo ora accennare al modo di estendere due teoremi analoghi ai teoremi 3 e 4 anche ai gruppi proiettivi d'incidenza desarguesiani di dimensione $n > 1$.

Modificando un po' la definizione di E. ELLERS e H. KARZEL [4] chiameremo *quasicorpo normale* di dimensione n un quasicorpo associativo sinistro K che sia uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra un campo F che contenga come sottoquasicorpo un corpo \bar{F} antiisomorfo ad F e tale che il gruppo moltiplicativo K^* di K abbia un sottogruppo normale isomorfo al gruppo moltiplicativo \bar{F}^* di \bar{F} .

Secondo il procedimento seguito da ELLERS e KARZEL [4] e da me nel caso di gruppi d'incidenza proiettivi desarguesiani di dimensione due ad ogni gruppo di incidenza G desarguesiano di dimensione $n > 1$ si può associare un quasicorpo normale che sia uno spazio vettoriale destro di dimensione $n + 1$ sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G e che quindi contenga come sottoquasicorpo un corpo \bar{F} antiisomorfo a F nella seguente maniera:

Lo spazio proiettivo G desarguesiano di dimensione $n > 1$ definisce uno spazio vettoriale destro K sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G di dimensione $n + 1$ nel quale ogni collineazione α^* appartenente a Γ determina una trasformazione semilineare α^* tale che

$$(\alpha h)^* \xi = (\alpha^* \xi) h \quad (\alpha, \xi \in K; \alpha \neq 0; h \in F; h \neq 0).$$

In K introduciamo un'operazione di moltiplicazione, che indicheremo col simbolo \circ , ponendo

$$O \circ \beta = O; \quad \alpha \circ \beta = \alpha^* \beta, \quad \text{se } \alpha \neq O.$$

Si verifica facilmente che con l'aggiunta di questa operazione di moltiplicazione K diventa un quasicorpo normale di dimensione $n + 1$ sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G . Supposto di aver dimostrato come in [4] che la moltiplicazione introdotta dà a K una struttura di quasicorpo associativo sinistro, per brevità ci limiteremo a controllare che K contiene un sottoquasicorpo \bar{F} antiisomorfo ad F e che \bar{F}^* è un sottogruppo normale di K^* . Sia η l'unità di K e siano h, k due qualunque

elementi di F ; si ha

$$\begin{aligned}(\eta h) \circ (\eta k) &= \eta \circ (\eta k)h = (\eta k)h = \eta(kh) \\ \eta h + \eta k &= \eta(h + k)\end{aligned}$$

e questo dimostra che gli elementi di K della forma $\eta h (h \in F)$ costituiscono un corpo \overline{F} antiisomorfo ad F .

Consideriamo ora l'applicazione, φ , di K^* su G che porta ogni vettore α appartenente a K^* nel punto a di G rappresentato da α . Evidentemente φ è un omomorfismo di K^* su G ed il nucleo $\varphi^{-1}(1)$ di φ , costituito dagli elementi di K^* della forma ηh , coincide con \overline{F}^* , ossia \overline{F}^* è normale in K^* .

Viceversa ad ogni quasicorpo normale di dimensione $n + 1 > 2$ sopra un corpo F si può associare uno spazio proiettivo d'incidenza desarguesiano G di dimensione $n > 1$ in modo che F risulti isomorfo al corpo delle coordinate dei punti di G .

La definizione di quasicorpo normale qui data, nel caso che F sia un corpo commutativo, coincide con quella di ELLERS e KARZEL. I quasicorpi normali di dimensione 3 sopra un corpo finito F sono stati determinati da me nella nota [9] dalla quale risulta l'esistenza di quasicorpi associativi finiti non normali.

Ebbene, seguendo il procedimento usato per dimostrare i teoremi 3 e 4 si può dimostrare quanto segue:

3.1. - *Sia G un gruppo proiettivo d'incidenza desarguesiano di dimensione $n > 1$ e sia K il quasicorpo normale relativo. Allora Γ è un gruppo di proiettività se e solo se \overline{F} è un sottocorpo del nucleo N di K .*

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOSE R. C.: *An affine analogous of Singer' theorem*. Journ. Indian Math. Soc., 6 (1942), 1-15.
- [2] BRUCK R. H.: *Difference sets in a finite group*. Trans. Amer. Math. Soc., 78 (1955), 463-481.
- [3] ELLERS E. e KARZEL H.: *Involutorische Geometrien*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25 (1961), 93-104.
- [4] ELLERS E. e KARZEL H.: *Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 26 (1963), 55-77.
- [5] HALL M.: *Cyclic projective planes*. Duke Math. J., 14 (1947), 1079-1090.
- [6] KARZEL H.: *Kommutative Inzidenzgruppen*. Arch. Math., 13 (1962), 535-538.
- [7] KARZEL H.: *Ebene Inzidenzgruppen*. Arch. Math., 15 (1964), 10-17.
- [8] ROSATI L. A.: *Piani desarguesiani affini non ciclici*. Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 22 (1957), 443-449.
- [9] ROSATI L. A.: *Piani proiettivi desarguesiani non ciclici*. Boll. U. M. I., III, 12 (1957), 230-240.
- [10] SINGER J.: *A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory*. Trans. Amer. Math. Soc., 43 (1938), 337-385.
- [11] ZAPPA G.: *Sui piani grafici finiti h-l-transitivi*. Boll. U. M. I., III, 9 (1954), 16-24.
- [12] ZAPPA G.: *Sui piani grafici finiti transitivi e quasi transitivi*. Ricerche di Matematica, 2 (1953), 274-287.