

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

VINICIO VILLANI

Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 1 (1965), p. 47-55

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_47_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_47_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU ALCUNE PROPRIETÀ COOMOLOGICHE DEI FASCI COERENTI SU UNO SPAZIO COMPLESSO

*Nota *) di VINICIO VILLANI (a Pisa) **)*

INTRODUZIONE. — Sia X uno spazio complesso nel senso di Serre, con fascio strutturale $\mathfrak{D}$; X abbia topologia con base numerabile. Nel presente lavoro si stabiliscono alcuni criteri che assicurano $H^j(X, \mathfrak{F}) = 0$ per opportuni valori di j , e per ogni fascio di $\mathfrak{D}$ -moduli $\mathfrak{F}$, che sia coerente su X .

Lo spunto per queste considerazioni mi è stato dato del seguente teorema di Andreotti-Grauert [1], pag. 250:

TEOREMA: *Se lo spazio complesso X è q -completo, allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{per } j \geq q$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X .

Dato uno spazio complesso X , denoteremo con S l'insieme dei punti singolari di X . Nel presente lavoro si dimostra:

TEOREMA 1: *Ogni spazio complesso X , tale che $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, $\dim_{\mathbb{C}} S = 0$, è $(n + 1)$ -completo.*

In virtù del citato teorema di Andreotti-Grauert, ne segue:

COROLLARIO: *Se X soddisfa alle ipotesi del teorema 1, si ha*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{per } j \geq n + 1$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X .

*) Pervenuta in redazione il 18 maggio 1964.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il teorema 1 ed il suo corollario valgono in particolare per ogni varietà complessa X , di dimensione complessa n . In tale caso, e sotto opportune ipotesi di natura differenziale per la varietà X , il corollario può essere migliorato:

TEOREMA 2: *Se X è una varietà complessa, di dimensione complessa n , e se esiste su X una funzione φ , differenziabile di classe C^∞ , tale che:*

1) *Gli insiemi $B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X , per ogni $c \in \mathbf{R}$;*

2) *Nei punti $x \in X$ in cui $\text{grad } \varphi = 0$, la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi, x)$ ha almeno un autovalore > 0 ; allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{per } j \geq n$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X .

Senza fare alcuna ipotesi restrittiva sull'insieme singolare S dello spazio X , si dimostra inoltre il

TEOREMA 3: *Se X è uno spazio complesso arbitrario, con $\dim_{\mathbf{C}} X = n$, $\dim_{\mathbf{C}} S = m$, allora si ha*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{per } j \geq \max(n + 2, 2m + 1)$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X .

1. Dimostriamo il teorema 1. Poichè $\dim_{\mathbf{C}} S = 0$, S consta di una totalità, eventualmente infinita, di punti isolati, siano essi $\{P_s\}$, $s = 1, 2, \dots$. Quindi è possibile trovare due sistemi di intorni aperti $\{U_s\}$, rispettivamente $\{V_s\}$ di $\{P_s\}$, tali che:

1) U_s è relativamente compatto in X , per ogni s ;

2) $\overline{U}_s \cap \overline{U}_t = \emptyset$ per ogni $s \neq t$;

3) Detto $\mathcal{T}_s$ lo spazio tangente di Zariski ad X nel punto P_s , e fissato un isomorfismo analitico π_s di un opportuno intorno W_s di P_s , in X , con un sottoinsieme analitico di $\mathcal{T}_s$, si abbia $\overline{U}_s \subset W_s$, per ogni s ;

4) $\overline{V}_s \subset U_s$, per ogni s .

Sia poi $\varrho_s(x)$ una funzione differenziabile di classe C^∞ su X ,

tale che:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varrho_s(x) \leq 1 & \quad \text{per ogni } x \in X \\ \varrho_s(x) = 1 & \quad \text{per } x \in V_s \\ \varrho_s(x) = 0 & \quad \text{per } x \in X - U_s. \end{aligned}$$

Sulla varietà $X - S$ esiste una funzione ψ differenziabile di classe C^∞ , tale che gli insiemi $\{x \in X - S; \psi(x) < c\}$ siano relativamente compatti in $X - S$, per ogni $c \in \mathbb{R}$; per provarlo basta prendere una successione crescente $Z_1, Z_2, \dots$, di insiemi aperti relativamente compatti in $X - S$, tali che $\bar{Z}_h \subset Z_{h+1}$; $\bigcup Z_h = X - S$. Allora si può costruire (lemma di Urysohn) una funzione continua che vale h su $\partial \bar{Z}_h$ (per ogni intero h) e che su $Z_{h+1} - Z_h$ assume solo valori compresi tra h ed $h + 1$. Poichè le funzioni continue possono essere approssimate di quanto si vuole mediante funzioni differenziabili, ne segue subito l'esistenza di una ψ godente delle proprietà desiderate.

Si considerino poi negli spazi $\mathcal{T}_s$, di coordinate $z_1, \dots, z_{d_s}$ ($d_s = \dim \mathcal{T}_s$) le funzioni

$$\chi_s = \varrho_s \left(s + \sum_{\alpha=1}^{d_s} z_\alpha \bar{z}_\alpha \right).$$

Le funzioni χ_s danno luogo a delle funzioni differenziabili di classe C^∞ su X , ponendo

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \pi_s^*(\chi_s) & \text{se } x \in U_s \\ 0 & \text{se } x \notin U_s. \end{cases}$$

Si ponga infine

$$\varphi = (1 - \sum_s \varrho_s) \psi + \sum_s \psi_s.$$

La funzione φ è chiaramente ben definita e differenziabile. Dimostriamo che X è $(n + 1)$ -completo relativamente a φ : gli insiemi $\{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X . Nei punti non singolari di X nulla si sa sugli autovalori di φ ; ma in tali punti lo spazio tangente di Zariski ha dimensione n , ossia la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi, x)$ è una forma in n variabili; nella più sfavorevole delle ipotesi questa forma non avrà alcun autovalore positivo in taluni di questi punti, ossia, detto $n = q + 1$

il numero degli autovalori positivi, risulterà $n - q + 1 = 0$, vale a dire $q = n + 1$. Nei punti singolari P_s , la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi, x)$, calcolata nello spazio tangente $\mathcal{T}_s$, è una forma in d_s variabili; in questo caso però, per costruzione, tutti gli autovalori sono positivi, ossia si può prendere per q un qualunque intero ≥ 1 . Se ne trae appunto che X è q -completo, con $q = n + 1$.

2. La funzione φ , che nel teorema 1 doveva venire costruita, viene invece data a priori nel teorema 2; se X è una varietà compatta, una funzione φ soddisfacente alle ipotesi del teorema 2 non può esistere su X (nei punti di massimo di φ , l'ipotesi 2 certamente non è verificata). Invece è facile costruire delle funzioni φ soddisfacenti alle ipotesi del teorema 2, per ampie classi di varietà non compatte; ignoro se le ipotesi del teorema 2 possono venir soddisfatte per ogni varietà complessa non compatta.

Alla dimostrazione del teorema 2 premettiamo il seguente

LEMMA: *Ipotesi e notazioni siano come nel teorema 2. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la varietà B_c è n -completa, relativamente alla funzione*

$$\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}, \text{ ove } K \text{ è una costante positiva opportunamente grande.}$$

DIMOSTRAZIONE: La funzione $\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$ è ben definita su B_c .

Sia Δ_c l'insieme dei punti di $\overline{B_c}$, in cui $\text{grad } \varphi = 0$. Sia U_c un intorno aperto di Δ_c in X , tale che in tutti i punti x di U_c la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi, x)$ abbia almeno un autovalore positivo; ciò è possibile per via dell'ipotesi 2 del teorema 2, e per via della continuità degli autovalori di $\mathcal{L}(\varphi, x)$, al variare del punto x . L'insieme $D_c = \overline{B_c} - U_c \cap \overline{B_c}$ è un compatto che ha intersezione vuota con Δ_c .

Sia $V_1, \dots, V_s$ un ricoprimento di D_c , costituito da un numero finito di carte locali di X , tali che ciascun V_e sia contenuto come sottoinsieme relativamente compatto in una carta locale W_e . Poniamo

$$\mu_e = \min_{x \in \overline{V_e}} (\text{grad } \varphi \times \overline{\text{grad } \varphi}) = \min_{x \in \overline{V_e}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \overline{\varphi(x)}}{\partial \bar{z}_\alpha},$$

ove $z_1, \dots, z_n$ sono le coordinate locali in W_e .

Poniamo poi

$$\mu = \min_{\varrho=1,\dots,s} \mu_{\varrho}.$$

Il numero μ è positivo. Poniamo ora

$$\begin{aligned} M_{\varrho} &= \max_{\substack{\|v\| = 1 \\ x \in \overline{V}_{\varrho}}} |\mathcal{L}(\varphi, x)(v)|; \end{aligned}$$

infine sia

$$M = \max_{\varrho=1,\dots,s} M_{\varrho}.$$

La tesi del lemma è verificata, prendendo per K una qualunque costante che verifichi la disuguaglianza $K\mu > M$. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}, x\right)(v) &= \frac{Ke^{K\varphi}}{(e^{Kc} - e^{K\varphi})^2} (\mathcal{L}(\varphi, x)(v) + \\ &+ K|\text{grad } \varphi \times v|^2) + 2 \frac{(Ke^{K\varphi})^2}{(e^{Kc} - e^{K\varphi})^3} |\text{grad } \varphi \times v|^2. \end{aligned}$$

L'ultimo addendo è sempre ≥ 0 ; poichè il coefficiente del primo addendo è positivo, basta far vedere che in ciascun punto $x \in B_c$ la forma $\mathcal{L}(\varphi, x)(v) + K|\text{grad } \varphi \times v|^2$ assume valore > 0 in una direzione v . Ora se $x \in U_c$ l'addendo $\mathcal{L}(\varphi, x)(v)$ è positivo almeno su una direzione v , per come U_c è stato costruito, e l'addendo $K|\text{grad } \varphi \times v|^2$ è certo ≥ 0 . Se invece $x \in D_c$, la tesi si verifica prendendo v nella direzione individuata da $\text{grad } \varphi$, e ricordando la disuguaglianza $K\mu > M$.

Inoltre gli insiemi $\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}} < C$ sono relativamente compatti in B_c , per ogni $C \in \mathbf{R}$. Ciò prova il lemma.

OSSERVAZIONE: Più precisamente gli insiemi $\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}} < C$ sono della forma

$$B_{c^0} = \{x \in X; \varphi(x) < c^0\},$$

con $c^0 = \frac{1}{K} \log \left(e^{Kc} - \frac{1}{C} \right)$, ossia le funzioni φ e $\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$ hanno in B_c le medesime superficie di livello. Questa osservazione sarà essenziale per concludere la dimostrazione che ora daremo del teorema 2.

Sia $\mathfrak{A}$ un ricoprimento di X , adattato al fascio $\mathfrak{F}$, e tale che per ogni fissato intero m , gli aperti di $\mathfrak{A}$ aventi intersezione non vuota con $\overline{B}_m$ siano tutti contenuti in B_{m+1} . Allora per ogni m il ricoprimento $\mathfrak{A}$ può essere sostituito con un ricoprimento $\mathfrak{B}$ di B_{m+2} , adattato ad $\mathfrak{F}$ su B_{m+2} , e tale che le restrizioni di $\mathfrak{A}$ e di $\mathfrak{B}$ a B_{m+1} coincidano ¹⁾.

Tenuto conto della coincidenza di questi due ricoprimenti su B_{m+1} , e del lemma dimostrato sopra, si può applicare la proposizione 19 di [1], nella dimensione $q = n$, ossia esiste un $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leq 1$) tale che l'applicazione

$$Z^{n-1}(\mathfrak{A}|B_{m+\varepsilon}, \mathfrak{F}) \rightarrow Z^{n-1}(\mathfrak{A}|B_m, \mathfrak{F})$$

ha immagine densa. Si noti che qui viene sfruttata l'osservazione fatta al termine della dimostrazione del lemma; infatti $B_m, B_{m+\varepsilon}$, che sono definiti attraverso le superficie di livello della funzione φ , sono altresì definibili tramite le superficie di livello della funzione introdotta nel lemma, che dà la n -completezza di B_{m+2} .

Per far vedere che si può scegliere $\varepsilon = 1$ basta applicare un numero finito di volte la proposizione 20 di [1], nella quale va notato che l'ipotesi « il ricoprimento $\mathfrak{A}$ sia adattato ad $\mathfrak{F}$ » è inessenziale.

Possiamo ora utilizzare il lemma di [1], pag. 250, per $r = n$, da cui segue appunto $H^n(X, \mathfrak{F}) \simeq H^n(\emptyset, \mathfrak{F}) = 0$.

OSSERVAZIONE: Con una dimostrazione perfettamente analoga a quella del teorema 2, si prova altresì il teorema seguente:

Se X è una varietà complessa, di dimensione complessa n , e

¹⁾ Questa precisazione è necessaria, in quanto la restrizione di un ricoprimento adattato ad $\mathfrak{F}$ su X , non è più necessariamente un ricoprimento adattato ad $\mathfrak{F}$ su B_m .

se esiste su X una funzione φ , differenziabile di classe C^∞ , tale che: 1) Gli insiemi $B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X , per ogni $c \in \mathbf{R}$;

2) Nei punti $x_0 \in X$ in cui $\text{grad } \varphi \neq 0$, la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi, x_0)$, ristretta all'iperpiano complesso tangente all'ipersuperficie $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, ha almeno $n - q$ autovalori > 0 ; nei punti $x \in X$ in cui $\text{grad } \varphi = 0$, la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi, x)$ ha almeno $n - q + 1$ autovalori > 0 . Allora

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{per} \quad j \geq q,$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X .

3. La dimostrazione del teorema 3 fa uso della successione esatta di Mayer-Vietoris, stabilita in [1], che qui ricordiamo brevemente:

Siano: X uno spazio topologico, X_1, X_2 due suoi sottoinsiemi aperti tali che $X = X_1 \cup X_2$. Sia poi $\mathfrak{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X . Allora si ha la successione esatta di coomologia:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathfrak{F}) &\xrightarrow{\alpha} H^0(X_1, \mathfrak{F}) \oplus H^0(X_2, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\beta} H^0(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha} \dots \dots \dots \xrightarrow{\beta} H^1(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^{j+1}(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha} H^{j+1}(X_1, \mathfrak{F}) \oplus H^{j+1}(X_2, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\beta} H^{j+1}(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

ove, indicate rispettivamente con $\tau_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ ($\lambda = 1, 2$) e con $\sigma_\lambda: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_\lambda$ ($\lambda = 1, 2$) le iniezioni naturali, gli omomorfismi α e β sono definiti da:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \tau_1^*(\xi) \oplus \tau_2^*(\xi) & \xi &\in H^j(X, \mathfrak{F}) \\ \beta(\xi_1 \oplus \xi_2) &= \sigma_1^*(\xi_1) - \sigma_2^*(\xi_2) & \xi_1 &\in H^j(X_1, \mathfrak{F}) \\ & & \xi_2 &\in H^j(X_2, \mathfrak{F}). \end{aligned}$$

A questo punto possiamo dimostrare il teorema 3. Sia U un intorno aperto dell'insieme S dei punti singolari di X ; dimostriamo in primo luogo che l'omomorfismo naturale di restrizione

$$H^j(X, \mathfrak{F}) \rightarrow H^j(U, \mathfrak{F})$$

è un isomorfismo per $j \geq n + 2$. A tal fine poniamo $V = X - S$, e consideriamo la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{j-1}(U \cap V, \mathfrak{F}) \rightarrow H^j(X, \mathfrak{F}) \rightarrow \\ \rightarrow H^j(U, \mathfrak{F}) \oplus H^j(V, \mathfrak{F}) \rightarrow H^j(U \cap V, \mathfrak{F}) \rightarrow \dots; \end{aligned}$$

se $j \geq n + 2$, dal corollario al teorema 1 (applicabile in quanto V e $U \cap V$ sono varietà) risulta: $H^{j-1}(U \cap V, \mathfrak{F}) = 0$; $H^j(U \cap V, \mathfrak{F}) = 0$; $H^j(V, \mathfrak{F}) = 0$, per cui la successione sopra scritta diviene semplicemente

$$0 \rightarrow H^j(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\tau^*} H^j(U, \mathfrak{F}) \rightarrow 0,$$

il che prova l'isomorfismo voluto.

Ne segue che il limite diretto $\lim_{U \supset S} \text{ind } H^j(U, \mathfrak{F})$, al variare di

U nella famiglia degli intorni aperti di S in X , coincide con $H^j(X, \mathfrak{F})$. D'altra parte questo limite diretto è isomorfo con $H^j(S, \mathfrak{F})$ (cfr. [2], teorema 4.11.1); onde abbiamo provato l'isomorfismo $H^j(X, \mathfrak{F}) \simeq H^j(S, \mathfrak{F})$ per ogni $j \geq n + 2$, e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X .

Il fascio $\mathfrak{F}$, ristretto ad S , in generale non si può interpretare come fascio coerente su S ; tuttavia, se S ha dimensione complessa m , ossia dimensione topologica $2m$, si ha certamente $H^j(S, \mathfrak{F}) = 0$ per $j \geq 2m + 1$; ne risulta la tesi del nostro teorema ¹⁾.

OSSERVAZIONE: La tesi del teorema 3 è non banale, purchè sia $n \geq 2$, perchè in tal caso si ha $\max(n + 2, 2m + 1) \leq 2n = \dim. \text{ topologica di } X$. Invece il teorema 3 diventa banale per

²⁾ Il teorema 5 di [4] prova che S ha dimensione topologica $2m$, intendendo per dimensione topologica la dimensione definita nel cap. III di HUREWICZ-WALLMAN, *Dimension Theory* (cfr. anche [3], pag. 162). Il teorema 4 (pag. 181) di [3], applicabile poichè S ha topologia con base numerabile, dimostra che S ha dimensione topologica $2m$ anche nel senso del numero di Lebesgue; da quest'ultima caratterizzazione della dimensione segue appunto $H^j(S, \mathfrak{F}) = 0$, per $j \geq 2m + 1$.

$n = 1$. Ma in tale caso siamo senz'altro nelle ipotesi del teorema 1, il cui corollario dà a sua volta informazioni non banali sulla coomologia dello spazio complesso X , a valori in un fascio coerente $\mathfrak{F}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDREOTTI A., GRAUERT H.: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*. Bull. Soc. Math. France, 90, p. 193-259, 1962.
- [2] GODEMENT R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris, Hermann, 1958.
- [3] KURATOWSKI C.: *Topologie I* (2^a ed.), Warszawa, 1948.
- [4] VILLANI V.: *Sulle varie nozioni di dimensione per un insieme analitico*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie III, 17, p. 141-173, 1963.