Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Dolcher

Questioni topologiche collegate con la quasi-periodicità nel campo reale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_1_0>

QUESTIONI TOPOLOGICHE COLLEGATE CON LA QUASI-PERIODICITÀ NEL CAMPO REALE

Nota *) *di* MARIO DOLCHER (*a Trieste*) **)

È noto che ad ogni gruppo topologico G può canonicamente associarsi una sua rappresentazione $\varrho : G \rightarrow \widehat{G}$ in un gruppo compatto, attraverso la quale ogni rappresentazione di G in un gruppo compatto può in un modo unico fattorizzarsi [1]); e che le funzioni quasi-periodiche (a valori complessi) definite in G possono caratterizzarsi come quelle che, nella classe delle appli-applicazioni continue, sono fattorizzabili attraverso la ϱ (cfr. A. Weil [14] [2])).

Una questione che recentemente ho studiata (in [8]) indagando sul significato topologico di un teorema di L. Amerio ha attirato la mia attenzione sul caso $G = R$ (retta reale): in tale caso, come in casi assai più generali, la rappresentazione $\varrho : R \rightarrow \widehat{R}$ è biunivoca fra R ed $\widetilde{R} = \varrho(R)$, sicchè la restrizione

*) Pervenuta in redazione il 23 marzo 1964.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

1) Nel caso di gruppi topologici abeliani: detto G un tale gruppo, si indichi con $G^{\cdot}$ il gruppo ottenuto sostituendo alla topologia di G la topologia discreta; si indichi con X il funtore che ad ogni gruppo associa il suo gruppo dei caratteri. Allora è $\widehat{G} = X(X(G)^{\cdot})$. Nel caso di R (gruppo additivo dei numeri reali), essendo $X(R) = R$, si ha $\widehat{R} = X(R^{\cdot})$.

2) Al risultato stesso pervengono, per una via più diretta, E. M. ALFSEN e P. HOLM in [2].

di codominio $\tilde{\varrho}: R \to \widetilde{R}$ ha il significato di un ingrossamento di topologia.

In questa Nota esamino tale caso particolare, trattandolo per una via diretta, che prescinde non soltanto dalla teoria dei caratteri dei gruppi abeliani topologici (sulla quale si fondano A. Weil [14] e L. H. Loomis [12]) ma anche dall'esistenza della menzionata « rappresentazione compatta massimale » $(\varrho, \widehat{G})$ (sulla quale poggia la trattazione di E. M. Alfsen e P. Holm [2] [3])). Precisamente, qui ricerco una topologia in R, compatibile con l'addizione, nella quale risultino uniformemente continue tutte e sole le funzioni quasi-periodiche; il fatto che vi è un'unica siffatta topologia assicura che si tratta dell'$\widetilde{R}$ di cui sopra.

Questo metodo diretto ha il vantaggio di offrire una chiara descrizione della topologia di $\widetilde{R}$ (§ 1), quale difficilmente si desumerebbe dalle citate trattazioni più generali, consentendo così una via di accesso a proprietà peculiari delle funzioni quasi-periodiche nel campo reale. Così ottengo (§ 2) per le funzioni quasi-periodiche qualche criterio di unicità che ritengo nuovo e che non mi pare raggiungibile con i mezzi della teoria classica.

La topologia di $\widetilde{R}$ mostra anche qualche legame con problemi di approssimazione (in senso diofanteo) nel campo reale. Qui mi sono limitato a quanto mi è stato necessario per lo studio della topologia di $\widetilde{R}$, e le proposizioni che ottengo (teorema di approssimazione simultanea, § 2; teorema del § 3, suscettibile di enunciazione aritmetica) non sono nuove. Mi pare comunque interessante il constatare la possibilità di valersi di mezzi di topologia generale nel campo delle approssimazioni diofantee [4]).

---

[3]) Precisamente, i due Autori ritrovano la $(\varrho, \widehat{G})$ in base a soli risultati (ottenuti da E. M. Alfsen e J. E. Fenstad, in [1]) sugli spazi uniformi.

[4]) Ricordiamo al proposito che una dimostrazione del teorema di Kronecker sull'approssimazione simultanea è stata data da H. Bohr, che la ottiene mediante l'uso di polinomi trigonometrici (cfr. G. H. Hardy e E. M. Wright [10], p. 386; ivi, a p. 391 è riportata la bibliografia sull'argomento). Sostanzialmente la stessa, anche se più esplicitamente legata alla nozione di funzione quasi-periodica, è la dimostrazione del teorema di Kronecker riportata in J. Favard [9], p. 18-21. Va comunque

Soltanto per ragioni di semplicità espositiva mi sono limitato a considerare funzioni quasi-periodiche (definite in R) con valori reali: in realtà, *la medesima topologia si ottiene sulla retta reale quando si considerino funzioni quasi-periodiche* (definite in R) *con valori in uno spazio di Banach arbitrario* [5]); e, in particolare, i risultati del § 2 permangono validi. Quanto al dominio, i risultati qui ottenuti possono senza difficoltà estendersi al caso di R^n: non ho ritenuto di farlo perchè non ne emergerebbe — per quanto mi è dato di vedere — alcunchè di interessante che non sia già riscontrabile per $n = 1$.

§ 1. La topologia $\tilde{\mathfrak{T}}$ sulla retta reale.

Parlando di funzioni, sottointenderemo: definite sulla retta reale R, con valori reali, continue.

Quanto alla nozione di funzione quasi-periodica, converrà tenerne presente la definizione nelle due seguenti forme:

Def. I: f è detta quasi-periodica se ogni successione di numeri reali ammette una sottosuccessione regolare per la f, ossia tale che la relativa successione delle traslate della f è uniformemente convergente.

Def. II: f è detta quasi-periodica se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito di numeri reali tali che le relative traslate della f bastino ad approssimare a meno di ε (nel senso della norma uniforme) ogni traslata della f.

L'equivalenza delle due definizioni si constata attraverso la considerazione dell'orbita H_f, ossia dell'insieme delle traslate della f pensato come sottospazio dello spazio delle funzioni continue limitate di R in R, con norma uniforme: la prima definizione esprime allora che ogni successione di elementi di H_f

---

notato che nessun metodo o risultato di topologia generale viene impiegato nelle citate dimostrazioni.

[5]) Le dimostrazioni rimangono le medesime; comunque, proprio per sottolinearlo, ho indicato in nota le banali varianti da apportare al testo.

ammette una sottosuccessione di Cauchy, mentre la seconda esprime che l'orbita è precompatta; ed è ben noto che le due condizioni sono, nel caso di spazi metrici, equivalenti.

È noto che le funzioni quasi-periodiche sono tutte e sole le somme di funzioni continue periodiche e i limiti uniformi di tali somme [6]). Ne segue, indicando con $\mathcal{F}_0$ l'insieme delle funzioni periodiche e con $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni quasi-periodiche, che:

ogni topologia che si attribuisca ad R, nella quale risultino continue tutte le funzioni di $\mathcal{F}_0$, rende continue anche tutte le funzioni di $\mathcal{F}$;

ogni struttura uniforme che si attribuisca ad R, nella quale risultino uniformemente continue tutte le funzioni di $\mathcal{F}_0$, rende uniformemente continue anche tutte le funzioni di $\mathcal{F}$.

Ci proponiamo due questioni:

I) circa l'esistenza di una topologia (per R) la quale renda continue tutte *e sole* le funzioni di $\mathcal{F}$;

II) circa l'esistenza di una struttura uniforme (per R) la quale renda uniformemente continue tutte e sole le funzioni di $\mathcal{F}$. In virtù delle constatazioni sopra enunciate, le due questioni potranno essere trattate partendo dalla considerazione delle funzioni periodiche.

È subito visto che alla questione I) si deve rispondere in senso negativo. E infatti, esistono funzioni quasi-periodiche positive con estremo inferiore 0 (tale è, ad es.,

$$f(x) = 2 - \text{sen}\, ax - \text{sen}\, bx$$

con a/b irrazionale); e allora, la reciproca di ogni tale funzione f, pur non essendo quasi-periodica (è illimitata!) risulta continua in ogni topologia che renda continua la f.

---

[6]) Com'è noto, questo fondamentale Teorema di approssimazione sussiste anche per il caso di funzioni con valori in uno spazio di Banach: cfr. S. BOCHNER [4]; una dimostrazione più diretta è stata data da L. AMERIO, in [3].

Passiamo poi alla questione II), che troverà risposta affermativa.

Introduciamo le seguenti notazioni:

(1) $$I_a^\delta = \bigcup_{k\in Z}\{x : | x - ka | < \delta\}$$ [7] per $a > 0$, $\delta > 0$;

(2) $$I^\delta_{a_1, a_2, \ldots a_k} = \bigcap_1^k {}_i I^\delta_{a_i};$$

(3) $$V_a^\delta = \{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 \in I_a^\delta\}$$ per $\delta > 0$;

(4) $$V^\delta_{a_1, a_2, \ldots a_k} = \bigcap_1^k {}_i V^\delta_{a_i} .$$

Fra le strutture uniformi per R, nelle quali risultano uniformemente continue tutte le funzioni periodiche, ve ne è una di minima finezza (struttura uniforme indotta da una famiglia di applicazioni, cfr. Bourbaki [5] II, 5): un sistema generatore di entourages per essa è costituito dagl'insiemi del tipo

(5) $$V_f^{*\varepsilon} = \{(x_1, x_2) : | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon\}$$ [8]

con $f \in \mathcal{F}_0$, $\varepsilon > 0$.

Proviamo che la famiglia degl'insiemi (3) genera questa medesima struttura uniforme.

Ogni insieme del tipo (5) contiene un insieme del tipo (3): infatti, ogni funzione periodica è uniformemente continua nel senso ordinario, sicchè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che da $| x_1 - x_2 - ka | < \delta$ (con k intero, ed essendo a il periodo della f) segue $| f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon$.

Ogni insieme del tipo (3) contiene un'intersezione finita d'insiemi del tipo (5). Infatti, assegnati a e δ, sia f la funzione perio-

---

[7]) Z indica l'insieme degl'interi relativi.

[8]) È ovvio che nel caso che la funzione prenda i suoi valori in uno spazio di Banach, qui e altrove la norma terrà il posto del valore assoluto.

dica di periodo a definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\, x & \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a}{2} \;{}^{9)} \\[2ex] 2 - \dfrac{2}{a}\, x & \text{per} \quad \dfrac{a}{2} \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

e sia $g(x) = f\left(x - \dfrac{a}{4}\right)$. allora, pur di prendere $\varepsilon < \dfrac{1}{2} \mid a \mid \delta$, si ha $V_f^{*\varepsilon} \cap V_g^{*\varepsilon} \subset V_a^{\delta}$.

Dunque, la famiglia degl'insiemi (3) è generatrice di una struttura uniforme, che indicheremo con $\widetilde{\mathfrak{U}}$, la quale è la meno fine fra quelle che rendono uniformemente continue tutte le funzioni di $\mathcal{F}_0$; di conseguenza, risultano $\widetilde{\mathfrak{U}}$-uniformemente continue anche tutte le funzioni di $\mathcal{F}$.

È subito visto che la $\widetilde{\mathfrak{U}}$ è compatibile con l'addizione in R, nel senso che per ogni entourage V della base (4), da $(x, y) \in V$ segue $(x + a,\ y + a) \in V$ quale che sia $a \in R$.

Indichiamo con $\widetilde{\mathfrak{T}}$ la topologia dedotta dalla $\widetilde{\mathfrak{U}}$. In essa, gl'insiemi del tipo (1) costituiscono un sistema generatore d'intorni di 0, gl'insiemi del tipo (2) costituiscono una base d'intorni di 0: è subito visto che gl'insiemi (1), epperò anche gl'insiemi (2), sono $\widetilde{\mathfrak{T}}$-aperti.

Indicheremo con $\widetilde{R}$ la retta reale, dotata della struttura ordinaria di gruppo additivo, e della topologia $\widetilde{\mathfrak{T}}$ (e quindi della struttura uniforme $\widetilde{\mathfrak{U}}$).

Constatiamo che $\widetilde{R}$, *come spazio uniforme, è precompatto.*

Dim. - Dia V un entourage arbitrario della $\widetilde{\mathfrak{U}}$. Se V è del tipo (3), l'insieme $I_a^{\delta/2}$ è V-piccolo, ed è evidente che basta un numero finito di suoi traslati a ricoprire $\widetilde{R}$. Sia poi V del tipo (4): per ciascuno dei k entourages $V_{a_i}^{\delta}$ si ricavi, nel senso detto, un

---

9) Nel caso che i valori si vogliano in uno spazio di Banach, in luogo di $\dfrac{2}{a}\, x$ si porrà $\dfrac{2}{a}\, u_0 x$, con u_0 vettore non nullo arbitrario.

ricoprimento finito; gl'insiemi-intersezione (limitatamente a quelli non vuoti) degli elementi dell'insieme-prodotto dei k detti ricoprimenti forniscono un ricoprimento finito di $\tilde{R}$ i cui insiemi sono V-piccoli.

Dopo di ciò, siamo in grado di stabilire il risultato che ci interessa e che costituisce l'annunciata risposta alla questione II) posta all'inizio.

Sono $\tilde{\mathfrak{U}}$-uniformemente continue soltanto le funzioni quasi-periodiche.

Dim. - Sia f una funzione $\tilde{\mathfrak{U}}$-uniformemente continua. Assegnato $\varepsilon > 0$, sia V un $\tilde{\mathfrak{U}}$-entourage tale che per $(x, y) \in V$ si abbia $| f(x) - f(y) | < \varepsilon$. Dalla precompattezza di $\tilde{R}$ segue l'esistenza di un numero finito di insiemi $\tilde{\mathfrak{T}}$-aperti $U_1, U_2, \ldots, U_m$ V-piccoli ricoprenti $\tilde{R}$. Detto a_i un punto di U_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. consideriamo le a_i-traslate f_{a_i} della f, e proviamo che esse bastano ad approssimare a meno di ε ogni traslata della f.

Detto t un punto arbitrario di $\tilde{R}$, sia $t \in U_j$, dunque $(a_j, t) \in V$, Tenuto presente che da $(a_j, t) \in V$ segue $(x - a_j, x - t) \in V$ quale che sia x, e atteso il significato di V in relazione ad ε, si ha:

$$| f_t(x) - f_{a_j}(x) | = | f(x - t) - f(x - a_j) | < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \,,$$

dunque $\| f_t - f_{a_j} \| < \varepsilon$. Dunque, a norma della seconda definizione riportata all'inizio, resta accertata la quasi-periodicità della f.

Dalla descrizione della topologia di $\tilde{R}$ ne possiamo dedurre subito alcune proprietà.

È uno *spazio di Hausdorff*: e infatti, se è $a \neq 0$, gl'insiemi I_{2a}^{δ} ed $a + I_{2a}^{\delta}$ sono, per $\delta < \frac{1}{2} | a |$, due intorni risp. di 0 e di a, disgiunti. In quanto gruppo topologico di Hausdorff, $\tilde{R}$ è anche *regolare*.

E ancora, $\tilde{R}$ gode della *proprietà di Lindelöf* (ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile): infatti, ogni insieme $\tilde{\mathfrak{T}}$-aperto è anche aperto nella topologia ordinaria della retta, la quale gode della proprietà di Lindelöf. Essendo poi che ogni spazio regolare di Lindelöf è *paracompatto* (K. Morita [13]), tale è $\tilde{R}$ che, di conseguenza risulta anche essere *normale.*

Proviamo ancora che $\tilde{R}$ è *perfettamente normale*, ossia, che ogni insieme $\tilde{\mathfrak{T}}$-aperto è riunione numerabile d'insiemi $\tilde{\mathfrak{T}}$-chiusi. Sia A $\tilde{\mathfrak{T}}$-aperto; allora esso è anche aperto nel senso della topologia ordinaria, dunque $A = \bigcup_i J_i$, essendo i J_i intervalli aperti a due a due disgiunti. Ognuno dei J_i è riunione numerabile d'intervalli chiusi, i quali, come subito si vede, sono anche $\tilde{\mathfrak{T}}$-chiusi; e ne segue la tesi.

Lo spazio $\tilde{R}$ è *separabile*: infatti, ogni insieme denso nel senso della topologia ordinaria è anche denso nel senso della $\tilde{\mathfrak{T}}$, che di quella è meno fine.

Osserviamo da ultimo che $\tilde{R}$ *non è compatto.* Per provarlo, consideriamo, ad esempio, l'insieme $E = \{2^n : n = 0, 1, 2, ...\}$ ed accertiamo che esso non ammette punti di accumulazione nel senso della $\tilde{\mathfrak{T}}$. Per $x \notin Z$, per δ abbastanza piccolo è $(x + I_1^\delta) \cap E = \varnothing$; per $x = 0$, per $\delta < 1$ è $I_3^\delta \cap E = \varnothing$; sia poi $0 \neq x \in Z$, e sia $x = 2^k d$ con d intero dispari: allora (sempre con $\delta < 1$) l'intorno $x + I^\delta_{2^{k+1}}$ ha in comune con Z tutti e soli i numeri del tipo $2^k(d + 2h)$, dei quali uno solo al più può appartenere ad E. Resta così provato che $\tilde{R}$ non è neppure numerabilmente compatto.

§ 2. - Alcune applicazioni.

La descrizione della topologia di $\tilde{R}$ permette di stabilire proposizioni riguardanti le funzioni quasi-periodiche [10]): accertato che sia che un insieme D è $\tilde{\mathfrak{T}}$-denso (condizione assai meno restrittiva della densità nel senso della topologia ordinaria), se ne può dedurre che una funzione quasi-periodica è individuata, attesa la sua $\tilde{\mathfrak{T}}$-continuità, dai valori che essa assume in D. E ancora:

---

[10]) Con valori reali, o più in generale con valori in uno spazio di Banach arbitrario.

i valori che una funzione quasi-periodica assume in un insieme E bastano a determinare i valori che la medesima assume nella $\tilde{\mathfrak{T}}$-chiusura di E (la quale è, in generale, più ampia della chiusura ordinaria).

Come si è già osservato nell'Introduzione, le proprietà topologiche di $\tilde{R}$, fra le quali la precompattezza gioca la parte essenziale, permettono di ottenere anche teoremi di approssimazione nel campo reale: da un teorema di tale genere dedurremo un criterio di densità in $\tilde{R}$.

Diciamo che un insieme $E(\subset R)$ ammette un numero $l(>0)$, come *lunghezza d'inclusione* se ogni intervallo di lunghezza l contiene punti di E.

LEMMA: *Ogni insieme $\tilde{\mathfrak{T}}$-aperto ammette una lunghezza d'inclusione.*

Dim. - Basta provare la tesi per gl'insiemi del tipo

$$c + I^{\delta}_{a_1, a_2, \dots a_k} \quad \text{con} \quad c \in R \,, \quad \delta > 0 \,, \quad a_i \neq 0 \,,$$

che costituiscono una base per lo spazio $\tilde{R}$. Non sarà restrittivo supporre $c = 0$. (Scriveremo I in luogo di $I^{\delta}_{a_1, a_2, \dots a_k}$).

Sia V l'entourage $\{(x, y) : x - y \in I\}$. Essendo $\tilde{R}$ precompatto, esiste un numero finito di insiemi V-piccoli ricoprenti $\tilde{R}$. Ogni insieme V-piccolo è contenuto in un traslato di I: siano $t_i + I$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ tali traslati. Suppongasi ora, per assurdo, che I non ammetta lunghezza d'inclusione; e sia J un intervallo di lunghezza $3l$, con $l = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |t_i|$, privo di punti di I. Essendo che ogni traslazione di ampiezza non maggiore di l porta nella parte centrale di lunghezza l, di J, soltanto punti di J, dalla supposizione fatta segue che $\bigcup\limits_{1}^{m}{}_i(t_i + I)$ non esaurisce la retta, in contrasto con quanto dedotto dall'ipotesi. Dall'assurdo segue la tesi.

TEOREMA di approssimazione simultanea: *Quali che siano i numeri reali non nulli a_1, a_2, ... a_k e comunque si fissi $\delta > 0$, esiste un numero positivo l tale che per ogni intervallo J di lunghezza*

l vi siano k interi $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tali che i numeri $r_i a_i$ appartengano tutti ad un intervallo di lunghezza δ contenuto in J [11]).

Dim. - Sia $I = I^{\delta}_{a_1, a_2, \ldots a_k}$, $I' = I^{\delta/2}_{a_1, a_2, \ldots a_k}$. Dalla precompattezza di $\tilde{R}$ segue (Lemma) che I' ammette una lunghezza d'inclusione l': quale che sia l'intervallo J' di lunghezza l', è $J' \cap I' \neq \varnothing$. Posto $l = l' + \delta$, sia J un intervallo arbitrario di lunghezza l, e sia J' l'intervallo di lunghezza l' avente il centro nel centro di J. Detto $\bar{x}$ un punto di $J' \cap I'$, l'essere $\bar{x} \in I'$ comporta l'esistenza di k interi r_i tali che $| \bar{x} - r_i a_i | < \delta/2$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ dunque $r_i a_i \in J$. Essendo che da $| x - \bar{x} | < \delta/2$ si deduce $x \in J$ e $| x - r_i a_i | < \delta$ per ogni i, ne viene che l'intervallo $\{x : | x - \bar{x} | < \delta/2\}$ è contenuto in J e contiene gli $r_i a_i$.

In termini della topologia di $\tilde{R}$, il teorema ora dimostrato può enunciarsi: *per ogni insieme $\tilde{\mathfrak{T}}$-aperto A, esistono due numeri positivi l, δ tali che ogni intervallo di lunghezza l contiene un intervallo di lunghezza δ contenuto in A.*

Facilmente se ne deduce che *è denso in $\tilde{R}$ ogni insieme D il quale soddisfi alla condizione*:

(*) « quali che siano i numeri positivi δ ed l, esiste un intervallo di lunghezza l tale che ogni suo sottointervallo di lunghezza δ contenga almeno un punto di D ».

E allora, dall'essere ogni funzione quasi-periodica $\tilde{\mathfrak{T}}$-continua, resta dimostrato il seguente

Criterio di unicità. - *Una funzione quasi-periodica* [10]) *è indivi-*

---

[11]) L'esistenza di k interi r_i tali che gli $r_i a_i$ stiano in un intervallo di lunghezza minore di δ consegue facilmente da un noto teorema di approssimazione (vedasi, ad es. G. H. Hardy e E. M. Wright [10], teor, 201). La precisazione riguardante l'esistenza della lunghezza d'inclusione l è più laboriosa ad ottenersi per via diretta. Per il caso $k = 2$, il risultato consegue dal teor. 445 dell'op. cit.; per il caso generale non sono in grado di citare una dimostrazione: nell'op. cit., a pag. 391, è detto soltanto: « *the proof is more difficult, and the argument we have used in this section* (ossia, per il caso $k = 2$) *cannot be generalized* ». Sull'argomento vedasi anche J. F. Koksma [11], in partic. cap. VIII.

duata dai valori che essa assume in un insieme D soddisfaciente alla (*).

Soddisfano alla condizione (*), ad esempio, gl'insiemi seguenti:

(I) $D = \{x : x > a\}$; nel teorema ora stabilito rientra dunque quello già noto (J. Favard [9], p. 36) secondo il quale una funzione quasi-periodica è individuata dai valori che assume su un intervallo illimitato.

(II) $$D = \left\{ \sum_{1}^{n} {}_k \frac{1}{k} \quad : \quad n = m,\ m+1,\ \ldots \right\}$$

(III) $$D = \left\{ a_n + \frac{k}{n} \quad : \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2; \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \right\}$$

(a_n arbitrari) .

(IV) $$D = \{m\alpha + n\beta \quad : \quad m,\ n \text{ interi pos.}\}$$

con α/β irrazionale .

È forse opportuno dimostrare che in quest'ultimo caso la (*) è soddisfatta. Proviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero u tale che per ogni $x > u$ si ha $|\,(m\alpha + n\beta) - x\,| < \varepsilon$ con opportuni m, n interi positivi. È comodo supporre $\beta = 1$ (se ne deduce poi in modo ovvio la tesi in generale).

Per ogni numero reale t, sia $\mu(t)$ tale che $0 \leqslant \mu(t) < 1$, $t - \mu(t) \in Z$. Sia $\overline{m}$ tale che l'insieme $\{\mu(m\alpha)\colon m = 0,\ 1,\ \ldots,\ \overline{m}\}$ abbia punti in ogni sottointervallo di lunghezza ε dell'intervallo unitario, e sia $u = \overline{m}\alpha$. Allora, supposto $x > u$, sia m intero tale che $0 < \overline{m} \leqslant m$ e $|\,\mu(m\alpha) - \mu(x)\,| < \varepsilon$; si avrà allora, per un opportuno intero $n > 0$, $|\,(x - m\alpha) - n\,| < \varepsilon$, come desiderato.

Un'altra proposizione sulla topologia di $\tilde{R}$ ci permetterà di stabilire un teorema del tipo « di determinazione » per le funzioni quasi-periodiche, con ipotesi e tesi più deboli delle precedenti.

LEMMA: *Ogni intorno I di 0 in $\tilde{R}$ contiene infiniti interi positivi* [12]).

Dim. - Dato un intorno arbitrario $I = I^{\delta}_{a_1, a_2, \ldots a_k}$ di 0, sia

---

[12]) Si potrebbe aggiungere che l'insieme $I \cap Z$ ammette lunghezza d'inclusione.

$I' = I^{\delta/2}_{a_1, a_2, \dots a_k, 1}$. L'essere $\bar{x} \in I'$ comporta l'esistenza di interi $r_1, r_2, \dots, r_k, r$ tali che $|\bar{x} - r_i a_i| < \delta/2$ (per $i = 1, 2, \dots, k$), ed $|\bar{x} - r| < \delta/2$. Si ha allora $|r_i a_i - r| < \delta$ ossia $r \in I^{\delta}_{a_i}$ per ogni i, dunque $r \in I$. Dalla precompattezza di $\tilde{R}$ si ha che ogni intorno di 0 è illimitato, sicchè il numero $\bar{x}$ sopra utilizzato può prendersi grande a piacere; donde la tesi.

Quanto si è detto per gl'intorni di 0 sussiste per gl'intorni di un intero arbitrario; ed anche: *qualunque sia* $c \in \tilde{R}$, *ogni intorno di* c *contiene, quale che sia* $a \neq 0$, *infiniti numeri del tipo* $c + na$ *con* n *intero positivo*. (Nessuna sostanziale modifica alla dimostrazione di sopra).

Posto:

$$P_m = \{m, m+1, \dots\} ,$$

si ha dunque

$$\overline{P}_m = Z .$$

Ne deduciamo il

TEOREMA: *I valori che una funzione quasi-periodica* [10]) *assume nell'insieme* P_m *individuano i valori che essa assume per ogni* n *intero*. E così: *i valori che una funzione quasi-periodica assume nell'insieme* $\{c + na: n = m, m+1, \dots\}$ (c reale, m intero, arbitrari; $a \neq 0$) *individuano i valori che essa assume in tutto l'insieme* $\{c + na: n \in Z\}$.

§ 3. Basi locali e convergenza di successioni in $\tilde{R}$.

Di seguito alle constatazioni fatte alla fine del § 1 sulla topologia di $\tilde{R}$, dimostriamo in questa sezione un teorema sulla convergenza delle successioni in $\tilde{R}$, dal quale in fine dedurremo altre proprietà, fra le quali la non-metrizzabilità, del nostro spazio.

LEMMA: *Siano* α, β, a, b *numeri reali tali che*:

(1) $$0 < \alpha < \beta < a < b ;$$

(2) $$\alpha > b - a ;$$

(3) *da* $(n+1)\alpha \geqslant a$, *con* n *intero, segua* $n(\beta - \alpha) > b - a$.

Esistono allora due numeri α', β' *tali che*:

(4) $$\alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta \, ;$$

(5) *quando sia* $\alpha' \leqslant x \leqslant \beta'$, *il numero* mx *sia, per ogni intero* m, *esterno all'intervallo di estremi* a, b.

Dim. - Indichiamo con I e con J gl'intervalli aperti di estremi risp. a, b ed α, β. Sia

$$k = \max\{n : n \in Z \; , \; n\alpha < a\} \, .$$

Dalla (1) segue che è $k \geqslant 1$. Dall'essere $\alpha < \dfrac{a}{k}$ e dalla (2) segue $b - a < \dfrac{a}{k}$, donde $\dfrac{b}{k+1} < \dfrac{a}{k}$. Indicando con H l'intervallo aperto di estremi $\dfrac{b}{k+1}$ ed $\dfrac{a}{k}$, notiamo che quando sia $x \in H$, per ogni intero n il numero nx è esterno ad I (come vuole la (5)). Resta però da vedere com'è situato H rispetto a J.

Distinguiamo due casi:

I) sia $k\beta > a$. Ricordando che è $\dfrac{a}{k} > \alpha$, si ha allora $\dfrac{a}{k} \in J$, sicchè $H \cap J$ è un intervallo: detti $\alpha'(<)\beta'$ due suoi punti, si soddisfa alla (4) oltre che, come già notato, alla (5);

II) sia $k\beta \leqslant a$. Si ha allora, tenuto conto della definizione di k e della (3):

$$(k+1)\beta = (k+1)\alpha + (k+1)(\beta-\alpha) > a + (b-a) = b \, .$$

Dall'essere dunque $\dfrac{b}{k+1} < \beta$ (ed $\dfrac{a}{k} > \alpha$) segue che anche in questo caso $H \cap J$ non è vuoto, donde l'esistenza dei numeri α', β' richiesti.

Teorema: *Sono* $\tilde{\mathfrak{T}}$*-convergenti tutte e sole le successioni di numeri reali che sono convergenti nella topologia ordinaria* (che indichiamo con $\mathfrak{T}$); *e i limiti sono gli stessi.*

Dim. - Che ogni successione $\mathcal{T}$-convergente sia $\widetilde{\mathcal{T}}$-convergente segue dall'essere la $\widetilde{\mathcal{T}}$ un ingrossamento della $\mathcal{T}$; dall'unicità del limite che sussiste anche in $\widetilde{R}$ (in quanto spazio di Hausdorff) segue, per le successioni $\mathcal{T}$-convergenti, anche l'asserto relativo ai limiti.

Si tratta di provare poi che *nessuna successione che non sia $\mathcal{T}$-convergente può essere $\widetilde{\mathcal{T}}$-convergente.*

Sarà sufficiente all'uopo limitarsi alla considerazione delle successioni crescenti $\mathcal{T}$-divergenti. E infatti, una successione S che non sia $\mathcal{T}$-convergente o ammette una sottosuccessione la quale (o l'opposta della quale) è del tipo detto, oppure è limitata, nel quale caso ammette sottosuccessioni $\mathcal{T}$-convergenti, epperò $\widetilde{\mathcal{T}}$-convergenti, verso limiti diversi sicchè, essendo $\widetilde{R}$ spazio di Hausdorff, la S non può risultare $\widetilde{\mathcal{T}}$-convergente. Di più, sarà sufficiente provare che *nessuna successione crescente e $\mathcal{T}$-divergente può essere $\widetilde{\mathcal{T}}$-convergente verso* 0: e invero, il supporre $\widetilde{\mathcal{T}}$-convergente verso l una successione $\{c_n\}$ implica che la $\{c_n - l\}$ (che è ancora del tipo considerato) è $\widetilde{\mathcal{T}}$-convergente verso 0.

Sia dunque $\{c_n\}$ una successione di numeri reali (che supponiamo positivi) crescente e divergente: proviamo che esiste un $\widetilde{\mathcal{T}}$-intorno di 0 il quale esclude infiniti dei c_n. Anzi, ci proponiamo di soddisfarvi con un intorno del tipo I^{δ}_{a}, e con δ prefissato ad arbitrio (ed a da determinarsi opportunamente).

Sia $\delta > 0$, arbitrario.

Chiamiamo « terna favorevole » ogni terna (α, β, s) con α, β reali ed s intero positivo, tale che i quattro numeri α, β, $c_s - \delta$, $c_s + \delta$ soddisfino alle ipotesi (1), (2), (3) del Lemma.

Constatiamo dapprima che ogni terna (α, β, s) con $0 < \beta - \alpha < 2\delta < \alpha$, e tale che

$$\left(\frac{c_s - \delta}{\alpha} - 1\right)(\beta - \alpha) > 2\delta \tag{6}$$

è favorevole. La (1) è verificata, essendo

$$\beta < \alpha + 2\delta < \alpha + \left(\frac{c_s - \delta}{\alpha} - 1\right)(\beta - \alpha) < \alpha + \left(\frac{c_s - \delta}{\alpha} - 1\right)\alpha = c_s - \delta\,.$$

La (2) sta nell'attuale ipotesi. Quanto alla (3), si supponga $(n+1)\alpha \geqslant c_s - \delta$, ossia $n \geqslant \dfrac{c_s - \delta}{\alpha} - 1$; allora è

$$n(\beta - \alpha) \geqslant \left(\frac{c_s - \delta}{\alpha} - 1\right)(\beta - \alpha) > 2\delta \,.$$

Proviamo, con procedimento induttivo, l'esistenza di una successione (α_k, β_k, s_k) di terne favorevoli con $\{\alpha_k\}$ crescente, $\{\beta_k\}$ decrescente, $\{s_k\}$ crescente.

Per costruire la prima terna, diciamo α_1, β_1 due numeri soddisfacienti alla $0 < \beta_1 - \alpha_1 < 2\delta < \alpha_1$ e del resto arbitrari; l'essere divergente la $\{c_n\}$ assicura poi l'esistenza di un intero s_1 soddisfaciente alla (6) (pensata riscritta con α_1, β_1, s_1 in luogo risp. di α, β, s). Che la terna (α_1, β_1, s_1) così costruita sia favorevole, segue da quanto si è sopra constatato.

Data che sia una terna favorevole (α_k, β_k, s_k), deduciamone un'altra da considerare sua « successiva ». Dal Lemma segue che esistono due numeri α_{k+1}, β_{k+1} tali che: (4) $\alpha_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} < \beta_k$, (5) $\alpha_{k+1} < x < \beta_{k+1}$ implichi che nessun multiplo di x cada a distanza minore di δ da c_{s_k}. Sia poi s_{k+1} un intero maggiore di s_k e tale che valga la (6) (con α_{k+1}, β_{k+1}, s_{k+1} in luogo risp. di α, β, s). Anche la $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, s_{k+1})$ è favorevole, essendo sempre $0 < \beta_{k+1} - \alpha_{k+1} < 2\delta < \alpha_{k+1}$ e valendo la (6).

Resta dunque accertata l'esistenza della desiderata successione di terne favorevoli.

Posto $J_k = \{x\colon\ \alpha_k < x < \beta_k\}$, l'essere $\bar{J}_{k+1} \subset J_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ implica l'esistenza di un punto x^* comune a tutti gl'intervalli J_k. E poichè da $x^* \in J_k$ si deduce, come già si è detto, che per ogni intero m è $|\, mx^* - c_{s_k} \,| \geqslant \delta$, se ne trae che l'intorno $I^{\delta}_{x^*}$ di 0 esclude gl'infiniti punti c_{s_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ della nostra successione. Come già si è notato, ciò implica la nostra tesi.

Dal teorema ora dimostrato discende che: *la topologia di* $\tilde{R}$ *non è definibile mediante convergenza di successioni* [13]); e infatti, l'ordinaria topologia $\mathfrak{T}$ e la nostra $\tilde{\mathfrak{T}}$ dànno luogo, beninteso

---

[13]) Nel senso precisato in M. Dolcher [7].

limitatamente alle successioni, alla medesima struttura di convergenza sicchè essendo che una tale struttura di convergenza individua, com'è noto, la $\mathfrak{T}$, essa non può individuare la $\tilde{\mathfrak{T}}$.

Ricordando poi che ogni topologia con base locale numerabile è definibile mediante convergenza di successioni, resta anche dimostrato che: *la topologia di $\tilde{R}$ non ammette base locale numerabile* [14]); in particolare, ciò implica che *lo spazio R non è metrizzabile.*

Quanto alla struttura uniforme $\tilde{\mathfrak{U}}$, è evidente che essa *non è completa* (dal supporla completa seguirebbe, attesa la precompattezza, la compattezza di $\tilde{R}$). È da notare peraltro che *nella struttura uniforme $\tilde{\mathfrak{U}}$ ogni successione di Cauchy è convergente*: e infatti, l'essere $\{a_n\}$ una successione di Cauchy nella $\tilde{\mathfrak{U}}$ implica che per $\{r_n\} \to \infty$, $\{s_n\} \to \infty$ si ha $\widetilde{\lim_{n\to\infty}} (a_{r_n} - a_{s_n}) = 0$, dunque anche (in virtù del teorema sopra dimostrato), $\lim_{n\to\infty} (a_{r_n} - a_{s_n}) =$ $= 0$ (limite nel senso ordinario), il che implica che la nostra successione è di Cauchy anche nel senso ordinario, dunque convergente nel senso ordinario, epperò $\tilde{\mathfrak{T}}$-convergente.

---

[14]) Il ragionamento seguito nella dimostrazione precedente potrebbe essere direttamente impiegato per dimostrare che data un'infinità numerabile d'intorni di 0 esiste un intorno di 0 non contenuto in alcuno di quelli; dunque, la non esistenza di base locale numerabile in $\tilde{R}$. Si noti però che la tesi da noi dimostrata è più forte, stante che la non esistenza di base locale numerabile per uno spazio topologico non implica la non definibilità della sua topologia mediante convergenza di successioni (cfr. M. DOLCHER [7], p. 92).

BIBLIOGRAFIA

[1] ALFSEN E. M., FENSTAD J. E.: *A note on completion and compactification.* Math. Scandinavica, *8* (1960), 97-104.

[2] ALFSEN E. M., HOLM P.: *A note on compact representations and almost periodicity in topological groups.* Math. Scandinavica, *10* (1962), 127-136.

[3] AMERIO L.: *Sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi-periodiche.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, serie VIII, *34* (1963), 97-104.

[4] BOCHNER S.: *Abstrakte fastperiodische Funktionen.* Acta Math. *61* (1933), 149-184.

[5] BOURBAKI N.: *Topologie générale, Chap. I, II.* Hermann, Paris (1958).

[6] BOURBAKI N.: *Topologie générale, Chap. III, IV.* Hermann, Paris (1951).

[7] DOLCHER M.: *Topologie e strutture di convergenza.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie III, vol. XIV (1960), 65-92.

[8] DOLCHER M.: *Su un criterio di convergenza uniforme per le successioni monotone di funzioni quasi-periodiche.* Rend. Sem. Matem. Univ. Padova *34* (1964).

[9] FAVARD J.: *Leçons sur les fonctions presque-périodiques.* Gauthier-Villars, Paris (1933).

[10] HARDY G. H., WRIGHT E. M.: *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon press, Oxford. Third edition (1954).

[11] KOKSMA J. F.: *Diophantische Approximationen.* Springer, Berlin (1936).

[12] LOOMIS L. H.: *Abstract harmonic analysis.* Van Nostrand Co. Princeton N. J. (1953).

[13] MORITA K.: *Star-finite coverings and the star-finite property.* Math. Japonicae *1* (1948), 60-68.

[14] WEIL A.: *L'intégration dans les groupes topologiques.* Hermann (Paris). 2e édition (1953).