RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Caratterizzazione di una classe di anelli generalizzati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, n° 1 (1965), p. 116-127

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_116_0>

CARATTERIZZAZIONE DI UNA CLASSE DI ANELLI GENERALIZZATI

Nota *) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*) **)

Alla base di questo lavoro sta il concetto di n-gruppo, introdotto da W. Dörnte nel 1929 ([2] [1])) e poi estesamente studiato da E. L. Post ([4]), cui è dovuto l'importante « teorema del laterale » (n. 4), secondo il quale ogni n-gruppo G_n è immergibile in un certo gruppo, $C(G_n)$, (individuato da G_n a meno di isomorfismi) in modo da risultare un laterale di un certo sottogruppo normale di $C(G_n)$.

Un n-gruppo, G_n, è un insieme dotato di un'operazione n-aria associativa: $(a_1, \ldots, a_n) \to f(a_1, \ldots, a_n)$, nel quale ogni equazione del tipo $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_{n+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ è univocamente risolubile. Un 2-gruppo è quindi un ordinario gruppo.

Nella prima parte di questa nota, si considera l'insieme, $E(G_n)$, degli endomorfismi di un n-gruppo additivo commutativo G_n, e si definiscono in esso una addizione n-aria ed una moltiplicazione (binaria) nello stesso modo che è consueto per

---

*) Pervenuto in redazione il 23 luglio 1964.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dall'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

$n = 2$, (n. 2). Rispetto a queste due operazioni, $E(G_n)$ risulta un n-gruppo additivo commutativo e un semigruppo moltiplicativo con la moltiplicazione distributiva rispetto all'addizione n-aria (teor. 1). Per $n = 2$, $E(G_n)$ si riduce al ben noto anello degli endomorfismi del gruppo commutativo G_2.

È quindi naturale chiamare n-anello una struttura algebrica (astratta) del tipo di $E(G_n)$, come è stato fatto nel n. 1. Un 2-anello è un ordinario anello.

Nella seconda parte di questo lavoro si dimostra che per gli n-anelli sussiste un teorema (n. 7, teor. 2) perfettamente analogo al « teorema del laterale » di Post per gli n-gruppi.

In base a questo teorema, ogni n-anello A_n è immergibile in un certo anello A (il cui gruppo additivo coincide con $C(A_n^+)$, dove A_n^+ denota l'n-gruppo additivo di A_n) in modo che le operazione dell'anello A subordinino in A_n le due omonime operazioni ivi date. Inoltre, gli elementi del dato n-anello A_n costituiscono in A un laterale di un certo idale dell'anello A. L'anello quoziente di A per questo ideale risulta isomorfo all'anello degli interi modulo $n - 1$, e questo anello quoziente ha per elemento unità proprio A_n.

Ad esempio, se A_n è l'n-anello degli interi $\equiv 1 \pmod{n-1}$, con addizione (n-aria) e moltiplicazione ordinarie, l'anello A è l'anello degli interi.

1. – Diremo che un insieme non vuoto, A_n, è un *n-anello* (n intero $\geqslant 2$), se in esso sono ovunque definite due operazioni univoche: un'addizione n-aria,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to a_1 + a_2 + \ldots + a_n \in A_n \qquad (a_i \in A_n)\,,$$

rispetto alla quale A_n è un n-gruppo commutativo ([2], [4], cfr. [1], n. 1 e 2), e una moltiplicazione (binaria) associativa, soddisfacenti alle due seguenti *proprietà distributive* (qualunque siano $a, a_i, b, b_i \in A_n$):

$$(1) \qquad a(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = (ab_1) + (ab_2) + \ldots + (ab_n)\,,$$

$$(1') \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b = (a_1b) + (a_2b) + \ldots + (a_nb)\,;$$

(nei secondi membri delle (1), (1'), le parentesi possono essere sottintese, secondo l'uso corrente, al quale ci atterremo nel seguito).

Un 2-anello è quindi un ordinario anello.

L'n-gruppo commutativo costituito dagli elementi di un n-anello e dalla sua addizione n-aria verrà detto l'*n-gruppo additivo* dell'n-anello. Il semigruppo costituito dagli elementi di un n-anello e dalla sua moltiplicazione verrà detto il *semigruppo moltiplicativo* dell'n-anello.

Gli elementi di un anello A costituiscono evidentemente un n-anello (per ogni dato n) rispetto alla consueta addizione di n elementi di A ed alla moltiplicazione di A (cfr. [1], n. 2). In questo senso alluderemo ad A come ad un n-anello.

Esistono n-anelli, con $n > 2$, che non si possono ottenere da anelli (aventi i loro stessi elementi) nel modo detto nel precedente capoverso. Uno di questi è, ad esempio, l'n-anello costituito dagli interi che sono congrui ad 1 modulo $n - 1$, con addizione (di n addendi) e moltiplicazione ordinarie. È noto infatti ([2], p. 5) che l'n-gruppo additivo di questo n-anello non si può ottenere da un gruppo (additivo) avente i suoi stessi elementi, considerando la consueta addizione di n elementi del gruppo.

Per un *sotto-n-anello* di un n-anello A_n, intenderemo un sottinsieme non vuoto di A_n che sia contemporaneamente un sotto-n-gruppo dell'n-gruppo additivo ([1], n. 2) e un sotto-semigruppo del semigruppo moltiplicativo di A_n. Parlando di un sotto-n-anello di un anello, penseremo naturalmente quest'ultimo come n-anello (nel senso sopra chiarito).

2. – Un omomorfismo di un n-gruppo G_n in sè stesso (cfr [1], n. 1) si dirà un *endomorfismo* di G_n. L'insieme degli endomorfismi di G_n verrà denotato con

$$E(G_n) .$$

Un endomorfismo di un n-gruppo additivo G_n è dunque una

applicazione, $\omega : a \to a\omega$ di G_n in G_n tale che

$$(2) \qquad (a_1 + \ldots + a_n)\,\omega = a_1\omega + \ldots + a_n\omega,$$

qualunque siano $a_1, \ldots, a_n \in G_n$. Si noti che $E(G_n)$ non è vuoto, poichè contiene l'applicazione identica.

TEOREMA 1: *Supponiamo che un n-gruppo additivo G_n sia commutativo, e definiamo, nell'insieme $E(G_n)$ dei suoi endomorfismi, un'addizione n-aria ed una moltiplicazione (binaria) mediante le seguenti posizioni* ($a \in G_n$, $\omega_i \in E(G_n)$):

$$(3) \qquad a(\omega_1 + \ldots + \omega_n) = a\omega_1 + \ldots + a\omega_n\,,$$

$$(4) \qquad a(\omega_1\omega_2) = (a\omega_1)\omega_2\,.$$

Allora, rispetto a queste due operazioni, $E(G_n)$ è un n-anello.

Per $n = 2$ questo teor. 1 è ben noto, riducendosi ad un classico risultato sugli endomorfismi di un gruppo commutativo.

Dimostrazione per $n > 2$: È perfettamente analoga a quella del caso $n = 2$ (cfr., ad es., [3], p. 79), tranne in un punto, sul quale soltanto ci soffermeremo.

Anzitutto si verifica facilmente (ricordando le proprietà associativa e commutativa generalizzate di G_n — cfr. [1], n. 1 —) che $E(G_n)$ è chiuso rispetto alle due operazioni in discorso, cioè che da $\omega_1, \ldots, \omega_n \in E(G_n)$ segue $\omega_1 + \ldots + \omega_n$, $\omega_1\omega_2 \in E(G_n)$, che l'addizione n-aria definita dalla (3) è associativa ([1], (1)) e commutativa, e che valgono le due proprietà distributive (1) e (1′), la moltiplicazione definita dalla (4) essendo notoriamente associativa.

Ciò fatto (e questo è il punto a cui alludevamo), rimane soltanto da verificare (cfr. [1], n. 2, 2° capov.) che è risolubile in $E(G_n)$ l'equazione nell'incognita ξ_1:

$$(5) \qquad \xi_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = \omega \qquad (\omega_i, \omega \in E(G_n))\,.$$

Infatti, se esiste in $E(G_n)$ una soluzione ω_1 della (5), di conseguenza (v. (3)) $a\omega_1$ è la soluzione nell'n-gruppo G_n dell'equa-

zione:

$$x_1 + a\omega_2 + \ldots + a\omega_n = a\omega \qquad (a \in G_n)\,. \tag{6}$$

Data l'equazione (5), definiamo allora un'applicazione, $\omega_1 : a \to a\omega_1$, di G_n in G_n, ponendo $a\omega_1$ uguale all'unica soluzione in G_n dell'equazione (6), di modo che per definizione risulta

$$a\omega_1 + a\omega_2 + \ldots + a\omega_n = a\omega \qquad \text{per ogni } a \in G_n\,. \tag{7}$$

La (7) dice già (v. (3)) che l'applicazione ω_1 così definita risolve la (5), onde resta solo da dimostrare che $\omega_1 \in E(G_n)$, ossia che vale la (2) con ω_1 in luogo di ω. E invero, se $a_1, \ldots, a_n \in G_n$, per la definizione (7) si ha:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\omega_1 + (a_1+\ldots+a_n)\omega_2+\ldots+(a_1+\ldots+a_n)\omega_n = \\ = (a_1 + \ldots + a_n)\omega\,, \tag{8}$$

$$a_i\omega_1 + a_i\omega_2 + \ldots + a_i\omega_n = a_i\omega \qquad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{9}$$

Sommando allora (nell'n-gruppo commutativo G_n) membro a membro le (9), si ha, per la (2), poichè $\omega_2, \ldots, \omega_n, \omega \in E(G_n)$:

$$(a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_1) + (a_1 + \ldots + a_n)\omega_2 + \ldots \\ + (a_1 + \ldots + a_n)\omega_n = (a_1 + \ldots + a_n)\omega. \tag{10}$$

Le (8), (10) dicono che i due elementi di G_n:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\omega_1\,, \quad a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_1$$

risolvono la medesima equazione nell'n-gruppo G_n, dunque sono eguali (per l'unicità della soluzione), cioè appunto vale la (2) con ω_1 in luogo di ω. Ed il teorema 1 è dimostrato.

Il teorema 1 (oltre a fornire un mezzo per la costruzione di n-anelli a partire da n-gruppi commutativi) mostra che la nozione di n-anello, introdotta nel n. 1, si presenta spontaneamente nella teoria degli n-gruppi, nello stesso modo in cui la nozione di anello si presenta in teoria dei gruppi.

3. – Ricordiamo (cfr. [1], n. 1) che in ogni n-anello A_n (in quanto n-gruppo additivo) è definita la somma (generalizzata) di $k(n-1)+1$ addendi $a_1, \ldots, a_{k(n-1)+1} \in A_n$ $(k = 0, 1, 1, \ldots)$, denotata col simbolo

$$a_1 + \ldots + a_{k(n-1)+1}\,, \tag{11}$$

e che, in relazione a questa somma, valgono le cosidette proprietà associativa e commutativa generalizzate.

Dalle (1), (1′), per induzione su k, seguono allora rispettivamente le seguenti eguaglianze:

$$a(b_1 + \ldots + b_{k(n-1)+1}) = ab_1 + \ldots + ab_{k(n-1)+1}, \tag{12}$$

$$(a_1 + \ldots + a_{k(n-1)+1})b = a_1b + \ldots + a_{k(n-1)+1}b, \tag{12′}$$

che valgono dunque in ogni n-anello A_n $(a, a_i, b, b_i \in A_n;\ k$ intero $\geqslant 0)$.

Dalle (12), (12′) si trae poi immediatamente la seguente regola di moltiplicazione di due somme del tipo (11) (*proprietà distributiva generalizzata*):

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_r)(b_1+b_2+\ldots+b_s) = {} & a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots + a_1b_s \\ & + a_2b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_2b_s \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_rb_1 + a_rb_2 + \ldots + a_rb_s\end{aligned} \tag{13}$$

che vale dunque in ogni n-anello A_n, se

$$r = h(n-1)+1\,,\quad s = k(n-1)+1\ \ (h, k \text{ interi} \geqslant 0), \tag{13′}$$

qualunque siano $a_i, b_j \in A_n$.

4. – Vedremo nel seguito che un n- anello si può sempre immergere (come sotto-n-anello) in un anello, e che per gli n-anelli vale un teorema analogo al « teorema del laterale » di Post per gli n-gruppi ([4], cfr. [1], n. 2).

Sia dunque A_n un n-anello qualsiasi, e denotiamo con A_n^+ l'n-gruppo additivo di A_n, (quindi i due insiemi A_n e A_n^+ coincidono — n. 1 —). Per il « teorema del laterale » di Post, esiste un gruppo (additivo), $C(A_n^+)$, circoscritto all'n-gruppo A_n^+ nel senso chiarito nel n. 2 di [1]. Questo gruppo $C(A_n^+)$ è individuato da A_n^+ a meno di isomorfismi, ed è commutativo (v., ad es., [5], Satz 9), perchè è commutativo l'n-gruppo A_n^+. Poniamo

$$A^+ = C(A_n^+)\,,$$

e ricordiamo che ogni elemento di questo gruppo commutativo A^+ è una somma finita di elementi (di A_n^+ ossia) di A_n:

$$(14) \qquad x \in A^+ \quad \text{se e solo se} \quad x = a_1 + \ldots + a_r \qquad (a_i \in A_n)\,.$$

A_n^+ è un sotto-n-gruppo di A^+, quindi l'addizione (generalizzata) di $k(n-1)+1$ elementi dell'n-anello A_n ($k = 0, 1, 2, \ldots$) è subordinata dalla consueta addizione di altrettanti elementi del gruppo A^+ (cioè il simbolo (11) rappresenta lo stesso elemento di A_n sia se interpretato come somma in A_n, sia come somma in A^+). Sappiamo che $(n-1)A_n$ (cioè l'insieme degli elementi di A^+ che sono somme di $n-1$ elementi di A_n) è un sottogruppo di A^+, e che la decomposizione del gruppo (additivo) commutativo A^+ nei laterali del suo sottogruppo $(n-1)A_n$ è la seguente:

$$(15) \qquad A^+ = A_n \cup 2A_n \cup \ldots \cup (n-2)A_n \cup (n-1)A_n\,,$$

dalla quale si vede che il gruppo quoziente $A^+/(n-1)A_n$ è ciclico di ordine $(n-1)$ con elemento generatore A_n. Gli elementi di A_n costituiscono dunque un laterale di $(n-1)A_n$ in A^+ (di qui il nome di « teorema del laterale »). Sappiamo infine che, se $a_1, \ldots, a_r \in A_n$ e se q è un intero, nel gruppo A^+ risulta

$$(16) \qquad a_1 + \ldots + a_r \in qA_n \quad \text{se e solo se} \quad r \equiv q \pmod{n-1}.$$

5. – Cerchiamo ora di definire nell'insieme degli elementi del gruppo (additivo) commutativo A^+ (v. n. preced.) una mol-

tiplicazione in modo che A^+ diventi il gruppo additivo di un anello A, e inoltre in modo (che A_n risulti un sotto-n-anello di questo anello A, cioè in modo) da subordinare in A_n la moltiplicazione ivi esistente.

Se una tale moltiplicazione esiste, essa è unica, perchè (A essendo un anello) essa deve soddisfare alla (13) del n. 3, con $a_i, b_j \in A_n$, le somme eseguite in A^+ ed r, s qualsiasi, e quindi rimane univocamente determinata (v. 2° membro della (13)) dalla moltiplicazione di A_n (si ricordi la (14)).

Assumiamo allora la (13) (ossia l'unica possibile, in relazione al nostro problema) come definizione di una moltiplicazione nel gruppo additivo commutativo A^+ (cioè nell'insieme dei suoi elementi). Cioè, in base alla (14), assumiamo come prodotto dei due elementi

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_r, \quad y = b_1 + b_2 + \ldots + b_s \qquad (a_i, b_j \in A_n) \tag{17}$$

di A^+ (r ed s essendo qualsiasi) la somma degli rs prodotti $a_i b_j$ (calcolati nell'n-anello A_n):

$$xy = \sum a_i b_j \,. \tag{17'}$$

Questa definizione (17), (17') ha senso ($a_i b_j \in A_n$, quindi $\sum a_i b_j \in A^+$), ma non è affatto chiaro a priori che il prodotto xy sia indipendente dalla particolare rappresentazione (17) dei due elementi x, y di A^+ come somme di elementi di A_n. Dimostreremo ora che questa indipendenza effettivamente sussiste, cioè che vale il

LEMMA: *Nel gruppo (additivo) commutativo A^+, circoscritto* ([1], n. 2) *all'n-gruppo additivo dell'n-anello A_n, dalle seguenti due eguaglianze*:

$$a_1 + \ldots + a_r = c_1 + \ldots + c_u \,, \tag{18}$$

$$b_1 + \ldots + b_s = d_1 + \ldots + d_v \,, \tag{19}$$

con a_i, b_j, c_h, $d_k \in A_n$ ed r, s, u, v numeri naturali qualsiasi, di-

scende la seguente altra:

$$(20) \qquad a_1b_1 + \ldots + a_1b_s + \ldots + a_rb_1 + \ldots + a_rb_s = \\ = c_1d_1 + \ldots + c_1d_v + \ldots + c_ud_1 + \ldots + c_ud_v \,.$$

questi prodotti a_ib_j, c_hd_k essendo naturalmente calcolati nell'n-anello A_n).

6. – Infatti, i due membri della (18) (risp. (19)) appartengono ad un medesimo laterale, pA_n (risp. qA_n), fra quelli che figurano a 2° membro della (15), quindi (v. (16)):

$$(21) \qquad r \equiv p \pmod{n-1}\,, \qquad u \equiv p \pmod{n-1}\,,$$

$$(22) \qquad s \equiv q \pmod{n-1}\,, \qquad v \equiv q \pmod{n-1}\,,$$

dove

$$(23) \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1\,, \qquad 1 \leqslant q \leqslant n-1\,.$$

Dalle (21), (22) risulta rispettivamente

$$(24) \qquad r + (n-p) \equiv 1 \pmod{n-1}\,, \\ u + (n-p) \equiv 1 \pmod{n-1}\,,$$

$$(25) \qquad s + (n-q) \equiv 1 \pmod{n-1}\,, \\ v + (n-q) \equiv 1 \pmod{n-1}\,.$$

Se m è un qualsiasi numero naturale, useremo nel seguito (per comodità espositiva) la prima di queste due scritte:

$$[m]a\,, \qquad \underbrace{a + \ldots + a}_{m}$$

come sostituta della seconda.

Sia a un qualsiasi elelemento di A_n. Sommando (in A^+) ad ambo i membri della (18) l'elemento $(n-p)a$ e ad ambo i membri della (19) $(n-q)a$, otteniamo due nuove eguaglianze che possiamo scrivere (proprietà associativa generalizzata in A^+):

$$(26) \qquad a_1 + \ldots + a_r + [n-p]a = c_1 + \ldots + c_u + [n-p]a\,,$$

$$(27) \qquad b_1 + \ldots + b_s + [n-q]a = d_1 + \ldots + d_v + [n-q]a\,.$$

Per le (24), (25), il numero degli addendi è tale che si possono interpretare queste (26), (27) come eguaglianze valide nell'n-anello A_n (cfr. n. 4). Moltiplicandole in A_n, si ha in A_n l'eguaglianza

$$(28) \qquad \begin{aligned}(a_1 + \ldots + a_r + [n-p]a)(b_1 + \ldots + b_s + [n-q]a) = \\ = (c_1 + \ldots + c_u + [n-p]a)(d_1 + \ldots + d_v + [n-q]a)\,.\end{aligned}$$

Operando ancora in A_n, poichè delle (26), (27) si trae

$$\begin{aligned}(a_1 + \ldots + a_r + [n-p]a)a = (c_1 + \ldots + c_u + [n-p]a)a\,,\\ a(b + \ldots + b_s + [n-q]a) = a(d_1 + \ldots + d_v + [n-q]a)\,,\end{aligned}$$

da queste, per le (12), (12′), si ottiene

$$(29) \qquad a_1a + \ldots + a_ra + [n-p]a^2 = c_1a + \ldots + c_ua + [n-p]a^2\,,$$

$$(30) \qquad ab_1 + \ldots + ab_s + [n-q]a^2 = ad_1 + \ldots + ad_v + [n-q]a^2\,.$$

Le (29), (30) valgono pure nel gruppo A^+ (cfr. n. 4), quindi (semplificando) in A^+ risulta:

$$(31) \qquad a_1a + \ldots + a_ra = c_1a + \ldots + c_ua\,,$$

$$(32) \qquad ab_1 + \ldots + ab_s = ad_1 + \ldots + ad_v\,.$$

Ritorniamo allora alla (28), e (ricordate le (24), (25)) eseguiamo in A_n i due prodotti che in essa figurano secondo la proprietà distributiva generalizzata (13), (13′). Otteniamo così

l'eguaglianza di due somme (i cui addendi sono prodotti di elementi di A_n, quindi sono elementi di A_n), eguaglianza che è valida anche in A^+ (cfr. n. 4), e che in A^+ si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
&(a_1b_1 + \ldots + a_1b_s + \ldots + a_rb_1 + \ldots + a_rb_s) + \\
&+ (n - q)(a_1a + \ldots + a_ra) + (n - p)(ab_1 + \ldots + ab_s) + \\
&+ ((n - p)(n - q))a^2 = \\
&= (c_1d_1 + \ldots + c_1d_v + \ldots + c_ud_1 + \ldots + c_ud_v) + \\
&+ (n - q)(c_1a + \ldots + c_ua) + (n - p)(ad_1 + \ldots + ad_v) + \\
&+ ((n - p)(n - q))a^2 .
\end{aligned}$$

Da quest'ultima eguaglianza, in virtù delle (31) e (32), risulta appunto (semplificando) l'eguaglianza (20). Quindi il lemma è dimostrato.

7. – In base al lemma ora dimostrato, le (17), (17′) definiscono effettivamente una moltiplicazione in A^+, la quale evidentemente subordina in A_n la moltiplicazione ivi esistente. Diciamo allora A il sistema algebrico i cui elementi sono quelli di A^+, la cui addizione (binaria) è quella del gruppo commutativo A^+, e la cui moltiplicazione è quella ora definita. Si verifica immediatamente che questa moltiplicazione è associativa e distributiva (sia a sinistra che a destra) rispetto all'addizione. Quindi A è un anello.

Dunque il problema enunciato all'inizio del n. 5 ammette una e (2° capov. del n. 5) una sola soluzione.

Consideriamo adesso (v. (15), n. 4) il sottogruppo $(n - 1)A_n$ di A^+. I prodotti

$$(a_1 + \ldots + a_r)(b_1 + \ldots + b_{n-1}) , \quad (b_1 + \ldots + b_{n-1})(a_1 + \ldots + a_r)$$

di un elemento $a_1 + \ldots + a_r$ di A per un elemento $b_1 + \ldots + b_{n-1}$ di $(n - 1)A_n$ constano di $r(n - 1)$ addendi, dunque ((16)) sono elementi di $(n - 1)A_n$, il quale è dunque un ideale (bilatero) dell'anello A.

Se $\bar{q}$ denota la classe degli interi $\equiv q \pmod{n-1}$, è chiaro (n. 4) che la corrispondenza

$$qA_n \to \bar{q} \qquad (q = 1, 2, \ldots, n-1)$$

è un isomorfismo dell'anello quoziente $A/(n-1)A_n$ sull'anello, $I/(n-1)$, degli interi modulo $n-1$. Dunque

$$A/(n-1)\,A_n \cong I/(n-1)\,.$$

In particolare A_n (i cui elementi costituiscono un laterale dell'ideale $(n-1)A_n$ in A) è l'identità dell'anello $A/(n-1)A_n$. Abbiamo così dimostrato il seguente

TEOREMA 2: (Teorema del laterale per gli n-anelli): *Se A_n è un qualsiasi n-anello* (n. 1), *nel gruppo additivo A^+, circoscritto* ([1], n. 2) *all'n-gruppo additivo A_n^+ di A_n, è possibile definire una ed una sola moltiplicazione in modo che A^+ diventi il gruppo additivo di un anello A e che A_n risulti un sotto-n-anello di questo anello A* (n. 1).

$(n-1)A_n$ (cioè l'insieme degli elementi di A che sono somme di $n-1$ elementi di A_n) *è un ideale dell'anello A, e l'anello quoziente $A/(n-1)A_n$ è isomorfo all'anello $I/(n-1)$ degli interi modulo $n-1$.*

Gli elementi del dato n-anello A_n costituiscono, nell'anello A, un laterale dell'ideale $(n-1)A_n$, e precisamente A_n è l'elemento unità dell'anello quoziente $A/(n-1)A_n$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI, D.: *Simmetrizzazione di una operazione n-aria*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 35.

[2] DÖRNTE, W.: *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff*, Math. Zeitschrift, vol. 29 (1929), pp. 1-19.

[3] JACOBSON, N.: *Lectures in abstract algebra, vol. I*, Van Nostrand (1951).

[4] POST, E. L.: *Polyadic groups*, Trans Amer. Math. Soc., vol. 48 (1940), pp. 208-350.

[5] TVERMOES, H.: *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs*, Math. Scandinavica, vol. 1 (1953), pp. 18-30.