Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Adalberto Orsatti

Alcuni gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è locale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 107-115

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_107_0>

ALCUNI GRUPPI ABELIANI IL CUI ANELLO DEGLI ENDOMORFISMI È LOCALE

Nota *) *di* ADALBERTO ORSATTI (*a Padova*)**)

INTRODUZIONE. – In questa nota si studiano alcuni aspetti del problema seguente: caratterizzare quei gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è un anello locale; cioè un anello con unità, non necessariamente commutativo, in cui gli elementi non unitari costituiscono un ideale bilatero, il quale, di conseguenza, contiene ogni altro ideale proprio dell'anello [1].

Si prova facilmente che se un gruppo abeliano G possiede qualche elemento periodico non nullo, l'anello $E(G)$ dei suoi endomorfismi è locale e se e solo se G, per il quale usiamo la notazione additiva, è indecomponibile in somma diretta.

Si verifica poi che, se G è libero da torsione e di rango 1, $E(G)$ è locale se e solo se G è isomorfo al gruppo additivo di un sottoanello locale del corpo dei razionali.

Si prende quindi in esame l'anello degli endomorfismi di un sottogruppo (additivo) puro, S, dell'anello Z_p^* degli interi p-adici. Osservato che $E(S)$ è isomorfo ad un sottoanello di Z_p^*, si prova che, se S ha rango finito, $E(S)$ è un anello locale, mentre se il rango di S non è finito quest'ultima proprietà non è più neces-

---

*) Pervenuta in redazione il 7 luglio 1964.

Indirizzo dell'A: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

sariamente vera; però esistono sottogruppi puri di Z_p^* per i quali la proprietà vale ed il cui rango può essere prefissato. Di conseguenza, per ogni numero cardinale μ, non superiore alla potenza del continuo, esiste un gruppo abeliano libero da torsione e di rango μ il cui anello degli endomorfismi è un dominio d'integrità locale.

1. – Siano G un gruppo abeliano non nullo ed $E(G)$ l'anello dei suoi endomorfismi. Cominciamo con l'osservare che:

Condizione necessaria affinchè $E(G)$ sia un anello locale è che G sia indecomponibile in somma diretta.

Supponiamo $G = H \oplus K$ con H e K sottogruppi propri di G e consideriamo le proiezioni canoniche di G sopra H e K. Si ottengono due endomorfismi di G, non invertibili, la cui somma è l'automorfismo identico. L'ideale da essi generato in $E(G)$ coincide con $E(G)$, il quale pertanto non può essere un anello locale.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

Se G possiede elementi periodici non nulli, $E(G)$ è un anello locale se e solo se G è un p-gruppo ciclico o quasi ciclico.

In questa ipotesi, infatti, per un teorema di KULIKOV [3], G è indecomponibile solo se o è ciclico di ordine p^k (p numero primo, k intero positivo), oppure è un p-gruppo quasi ciclico. Nel primo caso $E(G)$ è isomorfo a Z/p^kZ, dove Z indica l'anello degli interi, nel secondo caso all'anello Z_p^* degli interi p-adici. In entrambi i casi $E(G)$ è un anello locale.

2. – Supponiamo ora che G sia libero da torsione e di rango 1. G è allora, a meno di isomorfismi, un sottogruppo del gruppo additivo Q^+ del corpo Q dei razionali. Pensiamo gli elementi di G come elementi di Q. Non è restrittivo supporre che l'unità di Q appartenga a G, poichè è ben noto che gruppi abeliani isomorfi hanno anelli degli andomorfismi isomorfi. Allora un endomorfismo φ di G si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di G per il numero razionale $r = \varphi(1)$. Pertanto $E(G)$ è isomorfo ad un sotto-anello di Q ed il gruppo additivo di $E(G)$ è isomorfo ad un sottogruppo G' di G. Indicando con $T(G')$ e $T(G)$ i tipi,

[3], rispettivamente di G' e di G, si avrà $T(G') \leqslant T(G)$, l'uguaglianza verificandosi se e solo se G' e G sono isomorfi. Inoltre, a norma di un teorema di REDEI e SZELE [3], un sottogruppo di Q^+ è il gruppo additivo di un sottoanello di Q se e solo se il suo tipo si rappresenta con una sequenza $(h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots)$, dove h_n è 0 oppure ∞ per ogni n. Perciò, se $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ è una sequenza che rappresenta $T(G)$, $T(G')$ potrà rappresentarsi con la sequenza ottenuta dalla precedente sostituendo con lo zero ogni numero naturale che vi compare. Segue che l'anello degli endomorfismi del gruppo additivo di un sotto-anello A, con unità, di Q è isomorfo ad A. Ciò premesso possiamo dimostrare la seguente proposizione:

Se G è un gruppo abeliano libero da torsione e di rango 1, *$E(G)$ è un anello locale se e solo se G è isomorfo al gruppo additivo di un sotto-anello locale del corpo dei razionali. A ed $E(G)$ sono allora isomorfi.*

La sufficienza della condizione e l'ultima parte dell'enunciato sono implicite nelle considerazioni precedenti. Per quanto riguarda la necessità se $E(G)$ è isomorfo a Q allora G è isomorfo a Q^+ e viceversa. Escluso questo caso si verifica che $E(G)$ è isomorfo all'anello Z_p dei razionali, scritti in forma ridotta, il cui denominatore non è divisibile per p, dove p è un certo numero primo. Perciò il tipo $T(G')$ del gruppo additivo G' di $E(G)$ si rappresenterà con la sequenza $(\infty, \infty, \ldots, \infty, 0, \infty, \ldots)$ dove lo zero occupa il posto di p nella successione crescente dei numeri primi. Dev'essere $T(G') \leqslant T(G)$ e non può essere $T(G') < T(G)$ poichè G non è isomorfo a Q^+; quindi $T(G') = T(G)$ e G è isomorfo a G'.

3. – Siano Z_p^* l'anello degli interi p-adici, P il suo gruppo additivo ed S un sottogruppo puro non nullo di P. Ci proponiamo di studiare l'anello degli endomorfismi di (un gruppo abeliano isomorfo ad) S. Nel seguito supporremo a volte P dotato anche della moltiplicazione che vige in Z_p^* e penseremo S sia come sottogruppo di P, sia come sottoinsieme additivamente chiuso e simmetrizzato di Z_p^*. L'insieme Z dei numeri interi sarà considerato, a seconda dei casi, un sottoanello di Z_p^* oppure un sottogruppo di P. Ricordiamo che $E(\mathrm{P})$ è isomorfo a Z_p^*: moltiplicando tutti gli elementi di Z_p^* per un suo elemento si ottiene un endomorfismo di P, ed ogni endomorfismo di P si ottiene in questo modo, [3]. P è libero da torsione e Z_p^* è integro, commutativo e locale. Il suo ideale massimale è pZ_p^*.

Il sottogruppo puro S di P contiene certamente elementi che, pensati in Z_p^*, risultano invertibili cioè non divisibili per p, [3]. Infatti scegliamo un elemento non nullo di S e scriviamolo nella forma $p^k\pi$, dove k è un numero intero non negativo e π è invertibile in Z_p^*; π inoltre, poichè S è puro in P, appartiene ad S. Moltiplicando tutti gli elementi di Z_p^* per π^{-1} si ottiene un automorfismo di P che muta S nel sottogruppo S' di P; S' è isomorfo ad S, è puro in P e contiene l'unità 1 di Z_p^*. Possiamo quindi supporre che $1 \in S$; allora $Z \subset S$.

Sappiamo che P è il completamento topologico di Z nella topologia p-adica ,definita assumendo come base di intorni dello zero in Z i sottogruppi p^kZ $(k = 0, 1, 2, ...)$, e che la topologia di cui P è dotato come completamento topologico di Z, atteggiato nel modo suddetto a gruppo topologico di Hausdorff, coincide con la topologia p-adica di P, fornita dalla base di intorni dello zero $p^k\mathrm{P}$. Per cui una successione di elementi di Z è di Cauchy nella topologia p-adica di Z se e solo se converge nella topologia p-adica di P. Sappiamo pure che anche P, con la sua topologia p-adica, è di Hausdorff, [2].

Sia φ un endomorfismo di S. Posto $\varphi(1) = a \in S$, si ha $\varphi(m) = m\varphi(1) = ma$ per ogni $m \in Z$. Sia x un elemento qualunque di S. Risulta $x = \lim x_i$ $(i = 1, 2, ...)$ $x_i \in Z$. Prefissato quindi un numero naturale k e ricordando che $Z \subset S$ si avrà: $x - x_i \in p^k\mathrm{P} \cap S$ non appena i superi un conveniente numero maturale i_0.

Poichè S è puro in P, $p^k\mathrm{P} \cap S = p^kS$. Quindi, se $i > i_0$. $x - x_i \in p^kS$, da cui:
$\varphi(x - x_i) = \varphi(x) - \varphi(x_i) \in \varphi(p^kS) = p^k\varphi(S) \subseteq p^kS \subseteq p^k\mathrm{P}$.
Perciò $\varphi(x) = \lim \varphi(x_i) = \lim ax_i$, poichè $x_i \in Z$. Tenendo presente che i sottogruppi $p^k\mathrm{P}$ sono ideali Z_p^* e che P è di Hausdorff, si conclude $\varphi(x) = ax$.

Possiamo così enunciare la proposizione seguente:

Un endomorfismo φ di S è completamente individuato dall'immagine $\varphi(1) = a$ dell'elemento $1 \in S$ e si ottiene moltiplicando in Z_p^* ogni elemento di S per a. Se non è nullo φ è iniettivo atteso che Z_p^* è un dominio d'integrità. Al variare di φ in $E(S)$, a descrive un sottoanello A di Z_p^*. A ed $E(S)$ sono isomorfi.

Pensando S come sottoinsieme di Z_p^*, gli elementi di Z_p^* che appartengono ad A si caratterizzano così:

$$[a \in A] \leftrightarrows [a \in Z_p^* \; \& \; aS \subseteq S] \tag{1}$$

Se $1 \notin S$ si verifica facilmente che $E(S)$ è ancora isomorfo al sottoanello A di Z_p^* individuato dalla (1) e che i diversi endomorfismi di S sono dati dalle moltiplicazioni per i diversi elementi di A. Diremo che A *rappresenta* $E(S)$. Sia A^+ il gruppo additivo di A. Allora:

A^+ è un sottogruppo puro di P. *L'anello degli endomorfismi di A^+ è rappresentato da A.*

Basta dimostrare che:

$$[n \in Z,\ n \neq 0,\ x \in Z_p^*,\ nx \in A] \Rightarrow [x \in A] \,.$$

Ed infatti:

$$nx \in A \Rightarrow nxS \subseteq S \Rightarrow nxs \in S\,,\ \forall s \in S \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xs \in S\,,\ \forall s \in S \Rightarrow xS \subseteq S \Rightarrow x \in A\,.$$

OSSERVAZIONE. – Considerazioni del tutto analoghe alle precedenti valgono per un sottogruppo T di P, non necessariamente puro, soddisfacente alla condizione:

$$p^k \mathrm{P} \cap T = p^k T \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

$E(T)$ si rappresenta con un sottoanello B di Z_p^*. Il gruppo additivo di B verifica la condizione (2).

4. – Dato un sottoanello R di Z_p^*, indichiamo con R^+ il suo gruppo additivo. Diciamo che R è puro in Z_p^* se R^+ è puro in P; intendiamo per rango di R il rango di R^+. Ovviamente, se R ha rango finito tutti i suoi elementi sono, in Z_p^*, algebrici sopra

Z. Se R è puro in Z_p^* e contiene l'unità 1 di Z_p^* allora, in virtù delle considerazioni del n. 3, l'anello degli endomorfismi di R^+ è isomorfo ad R, anzi R rappresenta $E(R^+)$.

Sia S un sottogruppo puro di P. Pensiamo S immerso in Z_p^* e supponiamo che $1 \in S$: il sottoanello A di Z_p^* che rappresenta $E(S)$ e contenuto in S. Vogliamo osservare che A non coincide necessariamente con S. Infatti, tenuto conto che un sottogruppo H di P si può immergere in un sottogruppo puro avente lo stesso rango di H, supponiamo che S abbia rango finito e che contenga qualche elemento il quale, in Z_p^*, risulti trascendente sopra Z. Allora A è contenuto propriamente in S e, poichè A è puro in S, il rango di A è minore di quello di S.

5. – Ci proponiamo ora di dimostrare che $E(S)$, dove S è un sottogruppo puro di P, è un anello locale se S ha rango finito, mentre può non esserlo se quest'ultima condizione non è verificata. Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. – *Sia R un sottoanello di Z_p^*. Il sottogruppo puro generato da R^+ in* P *è un sottoanello R^* di Z_p^*. Chiameremo R^* il sottoanello puro generato da R in Z_p^*.*

La verifica è immediata non appena si pensi che

$$[x \in R^*] \leftrightarrows [n \in Z,\ n \neq 0,\ x \in Z_p^*,\ nx \in R]$$

LEMMA 2. – *Se A è un sottoanello puro e locale di Z_p^*, ogni elemento di A invertibile in Z_p^* è invertibile in A.*

Osserviamo prima che pA è l'ideale massimale di A. Sia infatti x un qualunque elemento di A che scriviamo nella forma $x = s_0 + py$ dove s_0 è un intero soddisfacente alle limitazioni $0 \leqslant s_0 \leqslant p - 1$ ed y è un conveniente elemento di Z_p^*. Poichè A è puro e contiene Z, y appartiene ad A. Quindi A/pA è isomorfo al corpo Z/pZ. D'altra parte:

$$pA = pZ_p^* \cap A$$

quindi gli elementi di A non invertibili in A non sono invertibili in Z_p^*. Il lemma è così provato.

Sia S un sottogruppo puro di P. È implicito nelle considerazioni del n.3 che ogni endomorfismo di S si estende, ed in un solo modo, ad un endomorfismo di P. Ciò premesso dimostriamo il

TEOREMA 1. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'anello degli endomorfismi di un sottogruppo puro S di* P *sia un anello locale è che ogni endomorfismo di S subordinato da un automorfismo di* P *sia un automorfismo di S.*

Sia A il sottoanello puro di Z_p^* il quale rappresenta $E(S)$. Dobbiamo dimostrare che A è un anello locale se e solo se ogni elemento di A invertibile in Z_p^* è invertibile in A. La necessità della condizione segue immediatamente dal lemma 2. Quanto alla sufficienza notiamo che, poichè A è puro, abbiamo $A \cap pZ_p^* = pA$. Pertanto l'ideale pA di A è costituito dagli elementi di A non invertibili in A. Quindi A è un anello locale.

Siamo ora in grado di provare il

TEOREMA 2. – *Se S è un sottogruppo puro e di rango finito di* P, *$E(S)$ è un anello locale.*

Sia ψ un endomorfismo di S; ψ è indotto da un endomorfismo φ di P univocamente individuato da ψ; supponiamo che φ sia un automorfismo di P. $\varphi(S)$ è contenuto in S, è isomorfo ad S e perciò ha lo stesso rango (finito) di S. Dunque $S/\varphi(S)$ è periodico. D'altra parte $\varphi(S)$ è puro in P quindi in S. Pertanto $S = \varphi(S)$; allora φ subordina un automorfismo di S. Di conseguenza, per il teorema precedente, $E(S)$ è un anello locale.

Osserviamo che la condizione data nel teorema 1 non è banale. Infatti se essa fosse soddisfatta da un qualunque sottogruppo puro di P, ogni sottoanello puro e con unità di Z_p^* (rappresentando l'anello degli endomorfismi del proprio gruppo additivo) dovrebbe essere un anello locale. Questo non è vero, come ora dimostreremo.

Sia ξ un elemento di Z_p^* invertibile in Z_p^* e trascendente sopra Z. L'esistenza di ξ è garantita dal fatto che gli elementi invertibili di Z_p^* formano un insieme avente la potenza del continuo. Indichiamo con $Z[\xi]$ il sottoanello di Z_p^* generato da Z e da ξ, e con A il sottoanello puro generato da $Z[\xi]$ in Z_p^* (lemma 1). Supponiamo per assurdo che A sia un anello locale. Allora A, per il lemma 2, deve contenere ξ^{-1}. Esiste quindi un intero non nullo m tale che $m\xi^{-1} \in Z[\xi]$. Cioè:

$$m\xi^{-1} = a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n$$

con gli a numeri interi non tutti nulli. Moltiplicando per ξ^{-1} si ottiene:

$$m = a_0\xi + a_1\xi^2 + \dots + a_n\xi^{n+1}$$

il che è falso poichè ξ è trascendente sopra Z.

6. – Sia $\aleph$ un numero cardinale soddisfacente alle limitazioni $\aleph_0 \leqslant \aleph \leqslant \aleph_1$ dove $\aleph_0$ indica la potenza del numerabile e $\aleph_1$ quella del continuo. Ricordiamo che P ha rango $\aleph_1$. Siano poi N un insieme di $\aleph$ elementi linearmente indipendenti di P, R il sottoanello generato in Z_p^* da Z e da N, ed A il sottoanello puro generato da R in Z_p^* (lemma 1). Infine indichiamo con D la totalità degli elementi di A invertibili in Z_p^*. D è la porzione complementare, moltiplicativamente chiusa, di A rispetto al suo ideale primo $A \cap pZ_p^*$ (il quale coincide con pA poichè A è puro). Gli elementi del tipo ad^{-1} con $a \in A$ e $d \in D$ formano in Z_p^* un sottoanello A_D che contiene A, e A_D è un anello locale, per le ben note proprietà degli anelli di frazioni [4]. Osserviamo che A_D è puro in Z_p^*. Infatti:

$$\begin{aligned} &n \in Z,\ n \neq 0,\ x \in Z_p^*,\ nx \in A_D \Rightarrow nx = ad^{-1}, \\ &a \in A,\ d \in D \Rightarrow nxd = a \in A \Rightarrow xd \in A \Rightarrow x \in A_D\,. \end{aligned}$$

Ciò permette di affermare che A_D rappresenta l'anello degli endomorfismi del suo gruppo additivo. Inoltre A_D ha $\aleph$ elementi, al pari di R e di A, quindi ha rango $\aleph$. Tenuto conto del Teorema 2 e del fatto che in P esistono sottogruppi puri di qualunque rango finito, abbiamo il

TEOREMA 3. – *Per ogni numero cardinale μ non superiore alla potenza del continuo, esiste un gruppo abeliano libero da torsione e di rango μ in cui anello degli endomorfismi è integro, commutativo e locale.*

N.B. – Mentre questo lavoro era in corso di stampa, l'autore ha constatato che i risultati del n. 3 erano già stati ottenuti, con metodi diversi, da J. W. Armstrong: *On p-pure Subgronps of the p-Adic Integers*. Cfr.: *Topics on Abelian Groups*, edited by J. M. Irwin and E. A. Walker. Scott, Foresman and Company, 1963.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cartan H. and Filenberg S.: *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.
[2] Corner A.L.S.: *Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring*. Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 687-710.
[3] Fuchs L.: *Abelian Groups*. Pergamon Press, 1960.
[4] Northcott D.G.: *Ideal Theory*. Cambridge University Press, 1953.