RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCESCO MAISANO

Sull'integrale generale di un sistema lineare del primo ordine ai differenziali totali a coefficienti costanti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 401-410

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__401_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULL'INTEGRALE GENERALE DI UN SISTEMA LINEARE DEL PRIMO ORDINE AI DIFFERENZIALI TOTALI A COEFFICIENTI COSTANTI

Nota *) *di* FRANCESCO MAISANO (*a Palermo*) **)

1. - Riportiamo in questo numero i risultati dovuti a G. Trevisan relativi alla esplicitazione dell'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti e alla applicazione di tale espressione esplicita allo studio di un sistema lineare ai differenziali totali [1]).

A tali risultati si riallacciano le considerazioni che seguono e che consentono di precisare la forma dell'integrale generale di un sistema lineare ai differenziali totali di due variabili a coefficienti costanti

$$dY = (Adu + Bdv)Y \ ,$$

nell'ipotesi che gli autovalori associati alle matrici A e B abbiano tutti indice pari alla loro molteplicità.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinario

---

*) Pervenuta in redazione il 5 marzo 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Palermo.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

[1]) G. TREVISAN: *Un'espressione esplicita per l'integrale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Applicazioni.* Rend. del Seminario Matem. dell'Università di Padova. 1961 Vol. XXXI.

omogeneo ad n incognite, a coefficienti costanti

$$Y' = AY \,. \tag{1}$$

Il vettore Y sarà ovviamente ad n componenti che si supporranno funzioni derivabili della variabile u.

Supponiamo che l'equazione caratteristica della matrice quadrata di tipo (n, n) A

$$| \lambda I - A | = 0 \text{ [2]}$$

ammetta come radici (distinte) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ con molteplicità rispettivamente $r_1, r_2, \ldots, r_t$ e quindi con $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = n$.

Allora l'integrale generale del sistema (1) è

$$Y = \sum_{i=1}^{t} \left[I + \sum_{s=1}^{r_i - 1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s \right] P_i e^{\alpha_i u} \tag{2}$$

dove P_i è la soluzione generale del sistema algebrico lineare

$$(\alpha_i I - A)^{r_i} P_i = 0 \,, \tag{3}$$

esprimibile, ove si tenga conto della circostanza che la matrice

$$(\alpha_i I - A)^{r_i} \,,$$

ha rango $(n - r_i)$, mediante combinazione lineare a parametri arbitrari di r_i soluzioni particolari indipendenti del sistema (3) stesso.

Il risultato espresso dalla (2) consente una immediata applicazione allo studio del sistema lineare ai differenziali totali

$$dY = (A\, du + B\, dv) Y \,, \tag{4}$$

dove A e B sono matrici di tipo (n, n) a elementi costanti dati nel campo complesso e Y il vettore $\| y_i(u, v) \|$ ad n componenti.

Il sistema (4) è equivalente al sistema alle derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial u} Y = AY \,, \tag{5}$$

---

[2]) I rappresenta ora ed avanti una matrice unitaria di rango opportuno.

$$\frac{\partial}{\partial v} Y = BY \,, \tag{5'}$$

e la condizione necessaria e sufficiente di completa integrabilità di tale sistema è data dalla permutabilità delle due matrici A e B (i prodotti essendo effettuati righe per colonne).

La soluzione del sistema (5) sarà data dalla (2) sotto la condizione (3) e dove si pensino i parametri da cui dipendono le P_i funzioni di v che dovranno determinarsi in modo che le (2) soddisfino anche al sistema (5').

È intanto ovvio che condizione necessaria e sufficiente perchè la (2), intesa nel senso sopra precisato, sia soluzione del sistema (5'), è che soluzione della (5') sia il generico addendo

$$\left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s\right] P_i e^{\alpha_i u} \,. \tag{6}$$

Ora perchè ciò accada occorre e basta scegliere

$$P_i = \varrho_1 S_{1/i} + \varrho_2 S_{2/i} + \ldots + \varrho_{r_i} S_{r_i/i} \,,$$

dove $S_{1/i}$, $S_{2/i}$, ..., $S_{r_i/i}$ sono r_i soluzioni particolari ed indipendenti del sistema algebrico (3) e ϱ_1, ϱ_2, ..., ϱ_{r_i} (funzioni di v) è l'integrale generale del sistema differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\varrho_j' = \varrho_1 h_{j,1} + \varrho_2 h_{j,2} + \ldots + \varrho_{r_i} h_{j,r_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r_i) \tag{7}$$

i cui coefficienti $h_{j,s}$ $(s = 1, 2, \ldots, r_i)$ sono univocamente determinati quali soluzioni del sistema di nr_i equazioni

$$BS_{j/i} = h_{1,j} S_{1/i} + h_{2,j} S_{2/i} + \ldots + h_{r_i,j} S_{r_i/i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r_i)$$

delle quali solo r_i^2 sono indipendenti.

Per la determinazione dell'integrale generale del sistema (5) e (5') bisognerà ovviamente trattare più sistemi del tipo (7), uno per ogni radice distinta dell'equazione caratteristica della matrice A.

2. - Con rispondenza alle nomenclature usate al n. 1, si ponga:

$$S_{1/i} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{1n} \end{pmatrix}, \quad S_{2,i} = \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{2n} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad S_{r_i/i} = \begin{pmatrix} s_{r_i 1} \\ s_{r_i 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{r_i n} \end{pmatrix}$$

ed

$$S_i = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \ldots & s_{r_i 1} \\ s_{12} & s_{22} & \ldots & s_{r_i 2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{1n} & s_{2n} & \ldots & s_{r_i n} \end{pmatrix}$$

si denoti poi con H_{α_i} la matrice di tipo (r_i, r_i) dei coefficienti del sistema (7), matrice che diremo associata allo zero α_i dell'equazione caratteristica della matrice A o semplicemente matrice associata allo zero α_i.

Siano poi $\gamma_{1/i}, \gamma_{2/i}, \ldots, \gamma_{\tau_i/i}$ gli zeri distinti dell'equazione caratteristica di H_{α_i}

$$| \lambda I - H_{\alpha_i} | = 0 ,$$

e abbiano rispettivamente molteplicità $\varrho_{1/i}, \varrho_{2/i}, \ldots, \varrho_{\tau_i/i}$ e quindi con

$$\varrho_{1/i} + \varrho_{2/i} + \ldots + \varrho_{\tau_i/i} = r_i . \tag{8}$$

L'integrale generale del sistema (7) sarà allora, in conformità alla (2)

$$\sum_{j=1}^{\tau_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{e_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma !} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma \right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i} v}$$

dove $Q_{j/i}$ è la soluzione generale del sistema algebrico

$$(\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^{e_{j/i}} Q_{j/i} = 0$$

e quindi risulterà:

$$P_i = S_i \sum_{j=1}^{r_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{e_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma !} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma \right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i} v} .$$

Sostituendo tale espressione nella (6) si ottiene per il sistema (5) e (5') la soluzione:

$$\left[I + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s\right] \cdot$$

$$\cdot S_i \sum_{j=1}^{\tau_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma\right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i} v} e^{\alpha_i u} .$$

L'integrale generale del sistema (5) e (5') è dunque:

$$(9) \qquad Y = \sum_{i=1}^{l} \left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s\right] \cdot$$

$$\cdot S_i \sum_{j=1}^{\tau_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma\right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i} v} e^{\alpha_i u} .$$

Ma l'integrale del sistema (5) e (5') può ottenersi scambiando il ruolo delle matrici A e B con procedimento analogo a quello ora seguito.

Si denotino con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\bar{l}}$ gli zeri distinti dell'equazione caratteristica:

$$| \lambda I - B | = 0 ,$$

della matrice B e siano $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_{\bar{l}}$ le relative molteplicità e quindi con $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \ldots + \bar{r}_{\bar{l}} = n$.

Fissata la radice β_h si denoti con $\bar{S}_h$ la matrice di tipo $(n, \bar{r}_h)$ le cui colonne rappresentino $\bar{r}_h$ soluzioni indipendenti del sistema lineare

$$(\beta_h I - B)^{\bar{r}_h} \bar{P}_h = 0 .$$

Siano poi $\bar{\gamma}_{1/h}, \bar{\gamma}_{2/h}, \ldots \bar{\gamma}_{\bar{\tau}_h/h}$ gli zeri distinti dell'equazione caratteristica

$$| \lambda I - \bar{H}_{\beta_h} | = 0 ,$$

della matrice $\bar{H}_{\beta_h}$ associata allo zero $\bar{\beta}_h$ e $\bar{\varrho}_{1/h}, \bar{\varrho}_{2/h}, \ldots \bar{\varrho}_{\bar{\tau}_h h}$ le relative molteplicità e quindi con:

$$(10) \qquad \bar{\varrho}_{1/h} + \bar{\varrho}_{2/h} + \ldots + \bar{\varrho}_{\bar{\tau}_h/h} = \bar{r}_h .$$

L'integrale generale del sistema (5) e (5') può allora scriversi:

$$(11)\qquad Y = \sum_{h=1}^{\bar{t}} \left[I + \sum^{\bar{r}_h - 1} \frac{(-1)^k}{k!} v^k (\beta_h I - B)^k \right] \cdot$$

$$\cdot \bar{S}_h \sum_{\mu=1}^{\bar{r}_h} \left[I + \sum^{\bar{\varrho}_{\mu/h} - 1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} u^\nu (\bar{\gamma}_{\mu/h} I - \bar{H}_{\beta_h})^\nu \right] \bar{Q}_{\mu/h} e^{\bar{\gamma}_{\mu/h} u} e^{\beta_h v}$$

essendo $\bar{Q}_{\mu/h}$ la soluzione più generale del sistema algebrico:

$$\left(\bar{\gamma}_{\mu/h} I - \bar{H}_{\beta_h}\right)^{\bar{\varrho}_{\mu/h}} \bar{Q}_{\mu/h} = 0 \,.$$

Si fissi ora, a partire dalla (9), un integrale particolare del sistema (5) e (5'): ciò si otterrà in corrispondenza ad una particolare scelta dei parametri che intervengono nelle $Q_{j/i}$; è chiaro che, con una opportuna scelta dei valori dei parametri che intervengono nelle $\bar{Q}_{\mu/h}$, la (11) si riduce alla fissata soluzione.

Denotando ancora con la (9) e con la (11) le due determinazioni degli integrali particolari così ottenuti, dal diretto loro confronto si deduce che ciascuna delle $\gamma_{j/i}$ coincide con una β e ciascuna delle $\bar{\gamma}_{\mu/h}$ con una α ma « a priori » non è detto che $i \neq i'$ implici $\gamma_{j/i} \neq \gamma_{j'/i'}$, come non è detto che $h \neq h'$ implichi $\bar{\gamma}_{\mu/h} \neq \bar{\gamma}_{\mu'/h'}$.

Si consideri ora un generico α_i e un generico $\gamma_{j/i} = \beta_{h'}$ e poi l'unico addendo della (9)

$$(12)\qquad \left[I + \sum_{s=1}^{r_i - 1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s \right] \cdot$$

$$\cdot S_i \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i} - 1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma \right] Q_{j/i} e^{\alpha_i u} e^{\gamma_{j/i} v} \,.$$

Esiste nella (11) un solo addendo e sia

$$\left[I + \sum^{\bar{r}_{h'} - 1}_{K=1} \frac{(-1)^K}{k!} v^K (\beta_{h'} I - B)^K \right] \cdot$$

$$\cdot \bar{S}_{h'} \left[I + \sum^{\bar{\varrho}_{\mu h'} - 1}_{\gamma=1} \frac{(-1)^\gamma}{\gamma!} u^\gamma (\bar{\gamma}_{\mu/h'} I - \bar{H}_{\beta_h})^\gamma \right] \bar{Q}_{\mu/h'} e^{\bar{\gamma}_{\mu/h'} u} e^{\beta_{h'} v}$$

(con $\bar{\gamma}_{\mu/h'} = \alpha_i$) identicamente eguale alla (12).

Ricordando ora l'ipotesi circa l'indice degli autovalori α e β sarà, qualunque sia α_i e $\beta_{h'}$

$$(\alpha_i I - A)^{r_i - 1} \bar{S}_i \neq 0 \qquad (\alpha_h I - B)^{r_{h'} - 1} \bar{S}_{h'} \neq 0$$

e l'ultima identità implica:

$$r_i - 1 \leqslant \bar{\varrho}_{\mu/h'} - 1 \qquad \bar{r}_{h'} - 1 \leqslant \varrho_{j/i} - 1$$

$$\varrho_{j/i} \leqslant r_i \qquad \bar{\varrho}_{\mu/h'} = \bar{r}_{h'}$$

e quindi

$$r_i \leqslant \bar{\varrho}_{\mu/h'} \leqslant \bar{r}_{h'} \leqslant \varrho_{j/i} \leqslant r_i \ ,$$

cioè

$$r_i = \bar{\varrho}_{\mu/h'} = \varrho_{j/i} = \bar{r}_{h'} \ .$$

Si trova intanto il risultato: ad ogni zero α_i di molteplicità r_i dell'equazione $| \lambda I - A | = 0$ corrisponde un ben determinato zero $\beta_{h'}$ della $| \lambda I - B | = 0$ di eguale molteplicità.

Inoltre, ove si tenga conto delle (8) e (10), l'equazione caratteristica della matrice $H_{\alpha i}$ associata allo zero α_i ha un solo zero distinto e quindi di molteplicità r_i eguale allo zero $\beta_{h'}$ della $| \lambda I - B | = 0$ corrispondente alla α_i nel senso prima precisato.

Viceversa, l'equazione caratteristica della matrice $\overline{H}_{\beta h'}$ associata allo zero $\beta_{h'}$ ha un solo zero distinto e quindi di molteplicità r_i eguale alla α_i corrispondente alla $\beta_{h'}$.

Riassumendo: le due equazioni

$$| \lambda I - A | = 0 \qquad | \lambda I - B | = 0$$

hanno lo stesso numero di zeri distinti e gli zeri dell'una possono mettersi in una ed una sola maniera in corrispondenza biunivoca con gli zeri dell'altra in modo tale che coppie di zeri corrispondenti α, β abbiano eguale molteplicità e che le equazioni caratteristiche relative alle matrici $\overline{H}_\alpha$ e $\overline{H}_\beta$ ad essi corrispondenti abbiano l'una come unico zero β e l'altra come unico zero α.

D'ora in avanti se gli zeri di $| \lambda I - A | = 0$ sono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ denoteremo i corrispondenti zeri (nel senso sopra precisato) della $| \lambda I - B | = 0$ rispettivamente con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ e con $r_1, r_2, \ldots, r_t$ le relative molteplicità comuni.

In base ai risultati ora ottenuti l'integrale generale del sistema (5) e (5′) può scriversi a partire dalle (9) e (11) nelle due forme:

$$(15)\qquad Y = \sum_{i=1}^{t}\left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^s}{s!}u^s(\alpha_i I - A)^s\right]\cdot$$
$$\cdot S_i\left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}v^\sigma(\beta_i I - H_{\alpha i})^\sigma\right]Q_i e^{\alpha_i u}e^{\beta_i v}$$

$$(16)\qquad Y = \sum_{i=1}^{t}\left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^s}{s!}v^s(\beta_i I - B)^s\right]\cdot$$
$$\cdot \overline{S}_i\left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}u^\sigma(\alpha_i I - \overline{H}_{\beta_i})^\sigma\right]\overline{Q}_i e^{\alpha_i u}e^{\beta_i v}$$

dove Q_i e $\overline{Q}_i$ sono vettori a r_i componenti costanti arbitrarie.

Si fissino nella (15) le matrici $\overline{Q}_i$ e quindi un'integrale particolare e si scelgano le Q_i in modo che la (16) fornisca lo stesso integrale particolare.

In corrispondenza a questa scelta risulterà:

$$S_i Q_i = \overline{S}_i \overline{Q}_i\,. \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t)$$

Ma il vettore $S_i Q_i$ rappresenta una generica soluzione del sistema algebrico lineare

$$(17)\qquad (\alpha_i I - A)^{r_i} P_i = 0$$

e il vettore $\overline{S}_i\overline{Q}_i$ una soluzione del sistema algebrico lineare

$$(18)\qquad (\beta_i I - B)^{r_i}\overline{P}_i = 0$$

e, potendo ragionare sulle $\overline{Q}_i$ come si è fatto sulle Q_i, concludiamo che i due sistemi algebrici (17) e (18) sono equivalenti e quindi, ricordando il significato delle matrici S_i e $\overline{S}_i$, si potrà scegliere nella (16)

$$\overline{S}_i = S_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t)$$

e in tal caso la (15) e la (16) forniranno integrali particolari eguali allora e solo quando si scelgano le Q_i eguali alle $\overline{Q}_i$.

Si deduce allora dal confronto della (15) e della (16) che

$$(\beta_i I - B)^\sigma S_i = S_i(\beta_i I - H_{\alpha_i})^\sigma$$

e quindi l'integrale generale del sistema (5) e (5') si scrive (utilizzando, per esempio, la (15))

$$(19) \qquad Y = \sum_{i=1}^{t} \left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s \right] \cdot$$

$$\cdot \left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\beta_i I - B)^\sigma \right] P_i e^{\alpha_i u} e^{\beta_i v}$$

ove P_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ rappresenta la soluzione generale del sistema algebrico lineare (17) o, ciò che è lo stesso, del sistema algebrico (18) a questo equivalente.

3. - Il procedimento svolto al n. 2 che ha consentito di determinare l'integrale del sistema lineare ai differenziali totali

$$dY = (A\,du + B\,dv)Y$$

nell'ipotesi che gli autovalori di A e B siano tutti di indice $i = r$, può ovviamente essere generalizzato al caso dell'integrazione del sistema lineare ai differenziali totali del tipo

$$(20) \qquad dY = (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_m dx_m)Y$$

con $A_1, A_2, \ldots, A_m$ matrici di ordine n, date nel campo complesso, i cui autovalori siano di indice $i = r$, e Y il vettore $\| y_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \|$ ad n componenti.

Il sistema (20) è equivalente al sistema alle derivate parziali

$$(21) \qquad \frac{\partial Y}{\partial x_i} = A_i Y \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ed è noto che la condizione di completa integrabilità per tale sistema è data dalla permutabilità delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Da quanto è stato detto nel numero precedente, le equazioni caratteristiche associate alle matrici A_i hanno eguale numero di zeri.

Inoltre se

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1t}$$

sono gli zeri relativi all'equazione caratteristica associata alla matrice A_1, rispettivamente di molteplicità

$$r_1, r_2, \ldots, r_t$$

gli zeri relativi all'equazione caratteristica associata alla generica matrice A_i si possono disporre nell'ordine

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{it} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in modo che gli zeri α_{ij} abbiano molteplicità r_j e i sistemi lineari

$$(\alpha_{ij}I - A_i)^{r_j}P_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{22}$$

risultino equivalenti.

Iterando opportunamente il procedimento svolto al n. 2 si determina l'integrale generale del sistema (21) che si presenta nella forma:

$$Y = \sum_{i=1}^{t}\left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^s}{s!}x_1^s(\alpha_{1i}I - A_1)^s\right]\cdot$$

$$\cdot\left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}x_2^\sigma(\alpha_{2i}I - A_2)^\sigma\right]\ldots$$

$$\ldots\left[I + \sum_{\tau=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^\tau}{\tau!}x_m^\tau(\alpha_{mi}I - A_m)^\tau\right]P_i e^{\alpha_{1i}x_1}e^{\alpha_{2i}x_2}\ldots e^{\alpha_{mi}x_m}\Bigg]$$

essendo P_i la soluzione generale di uno dei sistemi algebrici lineari (22).