

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

**Sulla propagazione delle onde ordinarie di
discontinuità nei sistemi a trasformazioni reversibili**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 33 (1963), p. 99-139

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__99_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA PROPAGAZIONE DELLE ONDE ORDINARIE DI DISCONTINUITÀ NEI SISTEMI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI

*Memoria *) di ALDO BRESSAN a Padova **)*

1. Introduzione.

La propagazione delle onde ordinarie di discontinuità in un punto P , ad un istante t e secondo una direzione di versore N , è un fenomeno locale. Nel generico sistema S a trasformazioni reversibili tale fenomeno è caratterizzato dalla quadrica di polarizzazione $Q(\varepsilon, N)$ la quale si esprime mediante N , l'omografia di deformazione ε e le derivate prima e seconda del potenziale elastico W rispetto ad ε .

Secondo N e sotto la deformazione ε può propagarsi una qualsiasi discontinuità λ d'accelerazione se e solo se la quadrica $Q(\varepsilon, N)$ è un ellissoide reale. Questo caso si verifica appena sia stabile, in senso opportuno, l'equilibrio (eventualmente forzato) sotto la deformazione ε dell'elemento di S che si considera.

In base a certi postulati generali ammessi da alcuni autori — v. [2] —, nel caso di sistemi a trasformazioni reversibili la suddetta stabilità ha sempre luogo. I suddetti postulati non sono però ammessi da altri autori, per esempio da A. Signorini. È stato anzi dimostrato — v. [4] — che per taluni sistemi la

*) Pervenuto in Redazione il 12 luglio 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R.

quadrica $Q = Q(\varepsilon, N)$ può essere un iperboloide a due falde o anche un cilindro o un ellissoide immaginario, nel quale ultimo caso non può propagarsi alcuna discontinuità.

Specialmente a causa del detto risultato, è sembrato interessante considerare in generale condizioni sull'energia potenziale elastica W , sufficienti o necessarie e sufficienti affinché, sotto ogni deformazione ε e lungo ogni direzione N , possa propagarsi con velocità eventualmente nulla (onde stazionarie) almeno una discontinuità effettiva λ d'accelerazione.

Tale condizione di propagabilità equivale all'essere la quadrica Q reale ma non necessariamente ellissoidica.

Nella prima parte della presente nota, dapprima considero condizioni del tipo suddetto per un generico sistema S a trasformazioni reversibili, poi mostro che se S è isotropo, quelle condizioni prendono forma più semplice e anche più espressiva. Fra l'altro, nel caso isotropo si può fare qualche considerazione involgente le velocità principali di propagazione — v. n. 6 dopo formula (54') —.

Mi è sembrato che, per svolgere le suddette considerazioni, la forma più opportuna delle equazioni di compatibilità dinamica delle discontinuità si ottenga pensando il potenziale elastico isoterma¹⁾ per unità di massa come funzione del gradiente di deformazione α . Mi è sembrato conveniente indicare anche come si trasformano i risultati suddetti quando si pensi W come funzione dell'omografia di deformazione ε .

Nella seconda parte considero anche certi sistemi a trasformazioni reversibili con quadrica di polarizzazione sempre reale

¹⁾ Per fissare le idee, nel presente lavoro mi riferisco al caso isoterma; ma tutte le considerazioni ivi svolte si trasportano immediatamente al caso adiabatico (ossia isoentropico).

Detta μ^* la densità nella configurazione di riferimento, nel primo caso μ^*W va inteso come coincidente col potenziale elastico specifico isoterma — v. [3] pg. 214 —. Per passare al secondo basta identificare μ^*W col potenziale elastico specifico adiabatico — v. [3] pg. 214 — e riferire all'entropia s anziché alla temperatura τ le poche proposizioni che in questo lavoro riguardano τ .

e rotonda attorno alla direzione di propagazione, già studiati da Tolotti in [4].

Caratterizzo dapprima [Teor. III] i casi compatibili con la suddetta condizione di propagabilità (Q reale ²⁾). Mostro poi che imponendo la validità di certe poco restrittive proprietà statiche e di regolarità (caratterizzate mediante i teoremi IV e V), si ricade nel caso che la quadrica $Q(\epsilon, N)$ sia un ellissoide reale [Teor. VI].

Studio pure i sistemi suddetti in relazione a varie altre proprietà statiche, del tipo di quelle considerate da Tolotti e meno restrittive [Teor. VII]. Anche queste proprietà sono sufficienti, mi sembra, a giustificare la speranza che qualche sistema qui definito mediante esse o parte di esse, sia approssimativamente realizzabile in natura.

Mi è sembrato interessante, specialmente in relazione a certe proprietà statiche, considerare certi esempi di corpi del tipo suaccennato, uno dei quali ha comportamento parzialmente simile a quello di un gas.

Maggiori dettagli sulle proprietà statiche e di propagazione dei sistemi studiati nella seconda parte della presente nota, son dati nel n. 7, dopo aver richiamato alcuni risultati già noti.

²⁾ Dicendo che la quadrica Q è reale intendo che (oltre a coincidere con la sua coniugata) Q possiede almeno un punto reale eventualmente improprio.

PARTE I

CONDIZIONI DI PROPAGABILITÀ DI DISCONTINUITÀ ORDINARIE NEI SISTEMI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI GENERICI. CASO ISOTROPO.

2. Preliminari matematici.

Potrei richiamare le equazioni dinamiche di Hadamard per le onde ordinarie di discontinuità, per esempio nella forma considerata in [4] pg. 40. Dopo, però, per svolgere le considerazioni prefissemi in questa nota dovrei trasformarle opportunamente. Mi è sembrato non meno breve e quindi più conveniente dedurre ex novo le suddette equazioni nelle forme cercate ³⁾. In una di queste l'energia potenziale elastica W per unità di massa e competente all'elemento η che nella configurazione di riferimento occupa P^* è espressa come funzione $\hat{W}(\alpha, P^*)$ dell'omografia α detta talvolta gradiente di deformazione. Sembrandomi che, trattando il caso generale, i risultati basati sulle sopra menzionate equazioni sian più semplici quando siano espressi me-

³⁾ La suddetta deduzione, qualora si usi un'espressione $w(\varepsilon)$ dell'energia elastica nelle caratteristiche di deformazione ε_j , è simile a quella esposta in [1]. In [1] si parte da una forma delle equazioni indefinite di Cauchy valida per piccoli moti attorno ad una configurazione C^* di equilibrio stabile ed eventualmente forzato. Le conseguenti equazioni di compatibilità dinamica per le discontinuità ordinarie valgono esattamente solo in C^* .

Dal punto di vista formale tali equazioni di compatibilità costituiscono un caso particolare di quelle considerate in [4] o quelle ricavate rigorosamente nella presente nota, a titolo di preliminare.

Queste ultime potrebbero ottenersi, come caso particolare, da quelle stabilite in [5] in relazione a materiali che presentano sì una relazione fra deformazione e sforzi, ma potrebbero esser privi di energia elastica.

dianete la funzione $\widehat{W}(\alpha, P^*)$ piuttosto della $w(\varepsilon, P^*)$, di conseguenza, in questi preliminari uso prevalentemente la funzione $\widehat{W}(\alpha, P^*)$ e poi indico brevemente come trasformare i risultati ottenuti esprimendoli nel modo voluto.

Premetto ora qualche convenzione e qualche proprietà inerente ad un procedimento di calcolo di cui farò largo uso in seguito.

Indico con $\overline{T}_{ik}$ o $T_{\underline{ik}}$ la parte simmetrica del generico tensore doppio T_{ik} , ossia pongo

$$(1) \quad \overline{T}_{ik} = T_{\underline{ik}} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) \quad (i, k = 1, 2, 3) .$$

Si noti in particolare che risulta

$$(2) \quad T_{i\underline{r}T_{ks}} = \frac{1}{2} (T_{ir}T_{ks} + T_{is}T_{kr}) = T_{i\underline{r}T_{ks}} = \underbrace{T_{ir}T_{ks}}_{\text{simmetrico}} \quad (i, r, k, s = 1, 2, 3) .$$

Allora si riconosce facilmente la validità del seguente

LEMMA I: Se $f(T_{ik}) = f(T_{11}, T_{12}, \dots)$ è una funzione derivabile del tensore T_{ik} , si ha

$$(3) \quad U_{ik} = \frac{\partial f(\overline{T})}{\partial T_{ik}} = \frac{\partial}{\partial T_{ik}} f\left(T_{11}, \frac{T_{12} + T_{21}}{2}, \dots\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f(T)}{\partial T_{ik}} + \frac{\partial f(T)}{\partial T_{ki}} \right] \quad (i, k = 1, 2, 3) .$$

cosicchè U_{ik} è simmetrico; inoltre U_{ik} vale $\partial f(T)/\partial T_{ik}$ se anche quest'ultimo tensore è simmetrico

In relazione al generico tensore doppio T_{ik} sottintenderò le posizioni

$$(4) \quad T'_r = T_r = T_{rr} , \quad 2T'_{r+3} = T_{r+3} = T_{r+1, r+2} + T_{r+2, r+1} \quad (r = 1, 2, 3) .$$

e chiamerò $T_1, \dots, T_6$ le componenti significative della parte simmetrica di T_{ik} ($T'_1, \dots, T'_6$ le componenti strette di questa).

Nell'eventualità $T_{ik} = \varepsilon_{ik}$ ove ε_{ik} è il tensore di deformazione, le $T_1, \dots, T_6$ divengono le caratteristiche di deformazione.

Incidentalmente noto che qualunque sia il tensore Y_{ik} , essendo ε_{ik} simmetrico, mediante il considerato simbolismo si può scrivere

$$(5) \quad \sum_{j=1}^6 Y_j \varepsilon_j = \sum_{ik=1}^3 Y_{ik} \varepsilon_{ik}.$$

È immediato dimostrare il seguente

LEMMA II: Sia $f(T_{ik}) = f(T_{11}, T_{12}, \dots)$ una funzione derivabile del generico tensore T_{ik} ; inoltre, stanti le convenzioni (1) e (4), si ponga

$$(6) \quad f^*(T_1, \dots, T_6) = f(T_{ik}) = f(\bar{T}_1, T_6/2, \dots).$$

Allora, per opportuni valori di i, k e $j = \text{v. (4)} -$, è

$$(7) \quad \frac{\partial f^*}{\partial T_j} = U_{ik} = \frac{\partial f(\bar{T}_{im})}{\partial T_{ik}}.$$

Le convenzioni e i lemmi precedenti suggeriscono di applicare le regole di derivazione rispetto ad un tensore doppio, anche alle funzioni derivabili, definite solo per dilatazioni, come segue:

Supponiamo che il numero reale W , dipendente dalla dilatazione ε_{ik} , sia espresso come funzione $w(\varepsilon) = w(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$ delle componenti significative di questa. A $w(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$ associamo la funzione $W(T_{11}, T_{12}, \dots)$ del generico tensore T_{ik} , definita mediante

$$(8) \quad W = W(T_{11}, T_{12}, \dots) = w(T_1, \dots, T_6) = w(T_{11}, \dots, T_{21} + T_{12}).$$

Allora, in primo luogo, (8) implica $W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots) = w(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$.

Premesso poi che in relazione ad una qualunque dilatazione ε scriverò $\partial W / \partial \varepsilon_{ik}$ intendendo $[\partial W / \partial T_{ik}]_{T-\varepsilon}$, per il lemma II, (8) implica pure che $\partial W / \partial \varepsilon_{rs} = \partial w / \partial \varepsilon_j$ per opportuni valori degli indici r, s e j .

Dunque le derivate $\partial w / \partial \varepsilon_j$; di W rispetto alle caratteristiche di deformazione sono le componenti strette del tensore $\partial W / \partial T_{ik}$ calcolate per $T_{ik} = \varepsilon_{ik}$.

Supponiamo che $F(\varepsilon_{is}) = F(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}, \dots)$ sia un'espressione di $W = w(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$ data mediante le nove componenti ε_{ik} della dilatazione ε . Allora in base al lemma I e a cose già dette si può calcolare la derivata di W rispetto ad ε mediante l'eguaglianza

$$(9) \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = \left[\frac{\partial F(\overline{T}_{rs})}{\partial T_{ik}} \right]_{T_{rs} = \varepsilon_{rs}}$$

valida per opportuni valori di i, k e j v. (4).

Se in $F(T_{rs})$ si può trasporre T_{ik} , ossia è $F(T_{11}, T_{12}, \dots) \equiv F(T_{11}, T_{21}, \dots)$, allora (9) diviene

$$(9') \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = \left[\frac{\partial F(T_{rs})}{\partial T_{ik}} \right]_{T_{rs} = \varepsilon_{rs}}.$$

Facciamo per es. $F(T_{rs}) \equiv T_{12}T_{21}$. Allora, nonostante T_{ik} sia trasponibile in $F(T_{rs})$, si ha $\partial^2 F / \partial T_{12}^2 = 0 \neq 1/2 = \partial^2 W / \partial \varepsilon_6^2$.

Però, come è facile riconoscere, se r, s e j stanno nella precedente opportuna relazione e ciò vale anche per q, σ e k , allora

$$(9'') \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{rs} \partial \varepsilon_{\sigma\delta}} = \left[\frac{\partial^2 F(\overline{T}_{ik})}{\partial T_{rs} \partial T_{\sigma\delta}} \right]_{T_{ik} = \varepsilon_{ik}}$$

Incidentalmente si può anche osservare che l'analogo vale anche per le derivate successive.

3. Equazioni dinamiche delle onde ordinarie di discontinuità in forme involgenti le espressioni dell'energia elastica mediante l'omografia di deformazione e mediante il gradiente di deformazione.

Sia ora S un sistema a trasformazioni reversibili, C^* sia una configurazione di riferimento, C quella attuale. P^* e P costituiscano una qualunque coppia di punti corrispondenti, x_r e y_r ($r = 1, 2, 3$) siano le coordinate di P e P^* rispetto alla terna cartesiana trirettangolare T , e inoltre μ e $\mu^* = \mu D$ siano le densità di S in P e P^* quando S si trovi in C e rispettivamente in C^* .

L'omografia ⁴⁾ $\alpha = \|\alpha_{ik}\|$ è notoriamente definita da

$$(10) \quad \alpha = \|\alpha_{ik}\| = \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial y_k} \right\|.$$

Sia $\alpha' = K\alpha$ la sua coniugata ($\alpha'_{ik} = \alpha_{ki}$). Sia poi $\varepsilon = \|\varepsilon_{ik}\|$ l'omografia di deformazione inerente allo spostamento $C^* \rightarrow C$, definita dalla relazione $1 + 2\varepsilon = K\alpha\alpha$ cosicchè è

$$(11) \quad \delta_{rs} + 2\varepsilon_{rs} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial y_r} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jr} \alpha_{js},$$

ove δ_{rs} è il simbolo di Kronecker.

Com'è ben noto — v. [3] pp. 91 e 96 — l'omografia lagrangiana $\beta^* = \|Y_{rs}\|$ di tensione è legata a quella $\kappa = \|K_{rs}\|$ di Kirchhoff-Piola e all'omografia euleriana β di tensione dalle relazioni

$$(12) \quad \beta^* = \alpha^{-1}\kappa, \quad \kappa = \frac{\mu^*}{\mu} \beta K \alpha^{-1}.$$

Sia $W = w(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$ l'energia elastica isoterma specifica dell'elemento η di S (individuato da P^*), relativa alla configurazione di riferimento C^* . Allora, com'è ben noto — v. [3], p. 109 — è $Y'_j = -\mu^* \partial W / \partial \varepsilon_j$ ($j = 1, \dots, 6$); allora, posto

$$(13) \quad \begin{aligned} W(T_{ik}) &= W(T_{11}, T_{12}, \dots) = w(T_1, \dots, T_6) = \\ &= w(T_{11}, \dots, T_{12} + T_{21}), \end{aligned}$$

in base alle convenzioni e alle considerazioni svolte al n. 1 — v. (7) —, si ha

$$(14) \quad Y_{rs} = -\mu^* \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{rs}} \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

Pongo ora, in base a (10) e (11),

$$(15) \quad \widehat{W}(\alpha) = W[(k\alpha\alpha - 1)/2] = W\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \alpha_{j1} \alpha_{j1} - \delta_{11}/2, \dots\right).$$

⁴⁾ Uso le locuzioni « omografia » e « tensore (doppio) » indifferentemente.

Per (10) e (11) è

$$(16) \quad 2 \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial \alpha_{iq}} = \delta_{rq} \alpha_{is} - \delta_{sq} \alpha_{ir} \quad (r, s, i = 1, 2, 3),$$

inoltre per (13) è $\partial W / \partial T_{qs} = \partial W / \partial T_{sq}$. Allora da (15) e (16) segue

$$(17) \quad -\frac{1}{\mu^*} K_{iq} = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \alpha_{iq}} = \sum_{r,s=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{rs}} \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial \alpha_{iq}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{qs}} \alpha_{is} + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{rq}} \alpha_{ir} \right) = \sum_{r=1}^3 \alpha_{ir} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{rq}} \quad (i, q = 1, 2, 3).$$

Mediante (14) e (12), si può verificare che le quantità K_{iq} ($i, q = 1, 2, 3$) sono le componenti dell'omografia α .

Nel seguito sarà utile, accanto alla relazione (17) fra le derivate prime delle funzioni $\widehat{W}(\alpha_{ik})$ e $W(\varepsilon_{ik})$, la seguente relazione fra le loro derivate seconde

$$(17') \quad p_{ikq\sigma} = \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \alpha_{iq} \partial \alpha_{k\sigma}} = \sum_{r,s=1}^3 \alpha_{ir} \alpha_{ks} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{rq} \partial \varepsilon_{s\sigma}} + \delta_{ik} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{q\sigma}} \\ (i, k, q, \sigma = 1, 2, 3).$$

Supponiamo ora che S sia soggetto ad una forza specifica di massa g^* funzione continua delle $y_i, x_i, \dot{x}_i, t$ e, se si vuole, anche delle $\partial x^i / \partial y_j$ e $\partial x_i / \partial t$ ($i, j = 1, 2, 3$) e che gli sforzi derivino secondo (17)₁ da un'energia elastica $\widehat{W}(\alpha, P^*)$ continua assieme a tutte le sue derivate prime e seconde che figureranno nei calcoli. Tenuto conto di (9) e (17)₁ le equazioni indefinite del moto, possono scriversi

$$(18) \quad \mu^* \left(g_i^* - \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right) = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial K_{iq}}{\partial y_q} = \\ = -\mu^* \sum_{q,k\sigma=1}^3 \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \alpha_{iq} \partial \alpha_{k\sigma}} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_q \partial y_\sigma} - \sum_{q=1}^3 \frac{\partial^2 (\mu^* \widehat{W})}{\partial \alpha_{iq} \partial y_q} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ove per eseguire le derivazioni indicate nell'ultimo termine, nel prodotto $\mu^*(P^*)\widehat{W}(\alpha, P^*)$, α_{ik} e y_r vanno considerate come variabili indipendenti.

Supponiamo che N sia il versore normale in P ad una superficie σ attraverso cui si propagano effettive onde ordinarie di discontinuità. Sia σ^* l'immagine di σ in C^* e N^* il versore normale a σ^* in P^* orientato concordemente ad N . Esiste allora un vettore $\lambda \neq 0$ soddisfacente le condizioni di Hugoniot Hadamard

$$(19) \quad \Delta \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \lambda_i a_*^2, \quad \Delta \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\sigma \partial y_\sigma} = \lambda_i N_\sigma^* N_\sigma^* \quad (i, \sigma = 1, 2, 3),$$

ove Δ serve a denotare discontinuità e a_* è la velocità di avanzamento della superficie σ^* in P^* ⁵⁾.

Preliminarmente pongo

$$(20) \quad p_{ik} = \sum_{\sigma=1}^3 p_{ik\sigma} N_\sigma^* N_\sigma^* = p_k, \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ora mediante (19) ricavo da (18) le condizioni dinamiche sulle discontinuità

$$(21) \quad a_*^2 \lambda_i = \sum_{k=1}^3 p_{ik} \lambda_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Intendendo $x = a_*^2$, il determinante dei coefficienti dell'equazione omogenea (21) in λ è

$$(22) \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(x) = \begin{vmatrix} p_{11} - x & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - x & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - x \end{vmatrix} = \\ = -x^3 + J_1 x^2 - J_2 x + J_3.$$

Incidentalmente osservo anche che in base a (20), per $x = a_*^2 = 0$ (22) diviene la seguente forma di sesto ordine nelle

⁵⁾ a_* è detta pure velocità di propagazione relativa alla configurazione C^* di riferimento. Se C^* coincide con C , a_* è detta velocità di propagazione locale — v. [6] pg. 508 —.

componenti N_1^* , N_2^* , N_3^* del versore normale a σ^* in P^*

$$(23) \quad J_3 = J_3(N^*) = \mathfrak{D}(0) = \\ = \sum_{i,k,r,s,q,\delta=1}^3 \begin{matrix} p_{11ik} & p_{12ik} & p_{13ik} \\ p_{21rs} & p_{22rs} & p_{23rs} \\ p_{31q\delta} & p_{32q\delta} & p_{33q\delta} \end{matrix} N_i^* N_k^* N_r^* N_s^* N_q^* N_\delta^* .$$

Tramite (17') i suoi coefficienti si possono esprimere, sia mediante le sole derivate seconde di $\widehat{W}(\alpha, P^*)$ rispetto alle α_{ik} , sia mediante le α_{ik} e le derivate prime e seconde di w rispetto alle ε_j ($i = 1, \dots, 6$). La dipendenza di W da P^* non verrà più considerata cosicchè si potrà scrivere $\widehat{W}(\alpha)$ e $w(\varepsilon)$ in luogo di $\widehat{W}(\alpha, P^*)$ e $w(\varepsilon, P^*)$.

4. Condizioni di propagabilità di discontinuità ordinarie nei corpi elastici sotto deformazioni finite.

Per quanto è stato detto sull'equazione (21) e in particolare pel significato fisico di λ *condizione necessaria e sufficiente affinchè nella direzione N (e sotto la deformazione ε) possa propagarsi un'effettiva discontinuità di accelerazione è che l'equazione*

$$(24) \quad \mathfrak{D}(x) = 0$$

ammetta almeno una radice positiva o nulla.

In particolare poi, se è $J_3 = \mathfrak{D}(0) = 0$, sono possibili onde stazionarie ($a_ = 0$).*

Si osservi poi che $\mathfrak{D}(x)$ è un polinomio di terzo grado per cui

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathfrak{D}(x) = -\infty .$$

Dunque *affinchè nella direzione N possa propagarsi una discontinuità effettiva è sufficiente che, stante (22), sia*

$$(26) \quad J_3 = J_3(N^*) = \mathfrak{D}(0) \geq 0 .$$

La condizione (25) non è però necessaria, cioè l'esser $\mathfrak{D}(0) < 0$ è compatibile con l'esistenza di una radice positiva di (24). Nel caso che tale radice esista e sia $\mathfrak{D}(0) < 0$, (24) ha per (25) due radici reali positive eventualmente coincidenti cosicchè anche l'equazione

$$(27) \quad \mathfrak{D}'(x) = -3x^2 + 2J_1x - J_2 = 0$$

ha positiva almeno una delle sue radici x_1, x_2 ($x_1 \geq x_2$). x_1 e x_2 sono reali in ogni caso perchè tali sono, in base alla simmetria (20) e a (22), le radici dell'equazione (24). Si può allora osservare che, stante (25), le condizioni $\mathfrak{D}(0) < 0$ e $x_1 > 0$ implicano che viceversa (24) abbia almeno una radice positiva.

È $x_1 \geq x_2$ e per (27) $3x_1x_2 = J_2$ e $3(x_1 + x_2) = 2J_1$, inoltre vale l'identità (22). Allora si ha $x_1 > 0$ se e solo se sussiste una almeno delle due condizioni:

$$(28) \quad J_1 = \sum_{\sigma=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 p_{ii\sigma} \right) N_{\sigma}^* N_{\sigma}^* > 0$$

$$(29) \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k,\sigma,\delta,r,s=1}^3 \frac{p_{iirs}}{p_{k\sigma\delta}} \frac{p_{ikrs}}{p_{k\sigma\delta}} N_r^* N_s^* N_{\sigma}^* N_{\delta}^* < 0.$$

Concludo che vale il seguente

TEOREMA I — *L'elemento η del considerato sistema S presenti la deformazione ε (e il gradiente di deformazione α). Allora affinché in seno ad η possa propagarsi attraverso la superficie σ (di versore N) almeno una discontinuità ordinaria λ (eventualmente con velocità di propagazione nulla), occorre e basta che stanti (17') e (23), valga almeno una delle tre condizioni (26), (28) e (29).*

COROLLARIO — *Affinchè nelle condizioni considerate nel teorema, in seno all'elemento η possa propagarsi almeno una discontinuità effettiva λ secondo ogni direzione N , basta che sia semidefinita positiva la forma di sest'ordine $J_3(N^*)$ in $N^* = v$. (23) — o definita negativa la forma di quart'ordine $J_2 = v$. (29)₁ — o definita positiva quella J_1 di secondo — v. (28) —.*

Osserviamo che l'esser J_1 definita positiva si sa esprimere mediante sette condizioni sui coefficienti; per (17') tali condi-

zioni riguardano direttamente le espressioni $\widehat{W}(\alpha_{ik})$ o $W(\varepsilon_{ik})$ del potenziale elastico. Usando per es. $\widehat{W}(\alpha)$ le dette condizioni si esplicitano, per (17'), nelle

$$(30) \quad \det \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \alpha_{ir} \partial \alpha_{is}} \right] > 0,$$

$$(31) \quad \sum_{i,k=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \alpha_{ir} \partial \alpha_{ir}} \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \alpha_{ks} \partial \alpha_{ks}} - \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \alpha_{ir} \partial \alpha_{is}} \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \alpha_{kr} \partial \alpha_{ks}} \right] > 0$$

($r < s$; $r, s = 1, 2, 3$),

$$(32) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_{ir}^2} > 0 \quad (r = 1, 2, 3)$$

(17)₂ permette l'immediata trasformazione di queste condizioni in condizioni sulla $W(\varepsilon)$.

5. Preliminari relativi al caso isotropo. Sulle derivate delle caratteristiche principali di deformazione rispetto a quelle ordinarie.

Mi propongo di esplicitare le precedenti condizioni di propagazione nel caso isotropo, e di mostrare come in esso qualcuna di tali condizioni divenga più espressiva.

Nel caso isotropo è utile calcolare gli invarianti J_1 , J_2 e J_3 del tensore p_{ik} determinati dall'identità (22), rispetto alla terna $Oi_1 i_2 i_3$ unita per lo spostamento in seno al considerato elemento η .

Per (9) e (10) se la terna T di riferimento coincide con la $Oi_1 i_2 i_3$ valgono le eguaglianze

$$(33) \quad \alpha_{ik} = \delta_{ik} r_i = \delta_{ik} \sqrt{1 + 2E_i} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

e le conseguenti

$$(34) \quad \varepsilon_{ik} = \delta_{ik} E_i \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

ove E_1, E_2, E_3 sono le caratteristiche principali di deformazione.

In vista del suddetto calcolo comincio col procurare implicitamente le espressioni nella terna T delle derivate delle carat-

teristiche principali E_h di deformazione rispetto a quelle ordinarie, espressioni che poi esplicito nel caso $T \equiv Oi_1 i_2 i_3$. A tale scopo, considerando generica la terna cartesiana ortogonale T , eguaglio le espressioni dei tre invarianti principali espressi mediante le E_h da un lato e mediante le ε_{ik} dall'altro.

Indico con ε_{ikr} la generica componente cartesiana del tensore di Ricci e uso notazioni tensoriali, in particolare sottintendo sommatorie su indici figuranti sia in basso che in alto. Tenendo conto della convenzione (1) scrivo tali eguaglianze, prescindendo da (33) e (34), nella forma

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = E_1 + E_2 + E_3 = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} \\ I_2 = E_1 E_2 + E_2 E_3 + E_3 E_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\delta} \\ I_3 = E_1 E_2 E_3 = \frac{1}{6} \varepsilon^{i\alpha\beta} \varepsilon^{m\gamma\delta} \varepsilon_{im} \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\delta} \end{array} \right.$$

Ricordo che per derivare rispetto ad ε_{rs} i terzi membri di (35) o altre espressioni analoghe, conviene introdurre un tensore variabile $T_{\alpha\beta}$ eventualmente asimmetrico; si sostituisce poi nelle dette espressioni la sua parte simmetrica $\bar{T}_{\alpha\beta}$, funzione di $T_{\alpha\beta}$ secondo (1), inoltre si deriva rispetto a T_{rs} e infine si sostituisce nel risultato T_{rs} con ε_{rs} (o $\bar{\varepsilon}_{rs}$).

Derivando una volta le (35) rispetto ad ε_{ik} ottengo

$$(36) \quad \sum_{h=1}^3 \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} (I_1 - E_h) = I_1 \delta_{ik} - \bar{\varepsilon}_{ik} \\ I_3 \sum_{h=1}^3 \frac{\partial \log E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{1}{2} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \varepsilon_k^{\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\delta} \end{array} \right. \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

ove vale la convenzione (1). Per (36) e (37)₁ è

$$(37')_1 \quad \sum_{h=1}^3 E_h \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = \bar{\varepsilon}_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3) .$$

Indicando con ε_{-1}^{ik} il reciproco di ε_{ik} nella matrice $\|\varepsilon_{ik}\|$, (37)₂ può scriversi

$$(37')_2 \quad \sum_{h=1}^3 \frac{1}{E_h} \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = \varepsilon_{-1}^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Fissati i e k , (36) e (37') costituiscono un sistema lineare nelle tre $\partial E_h / \partial \varepsilon_{ik}$ avente per determinante dei coefficienti

$$(38) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ \frac{1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1^2 & E_2^2 & E_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Δ è finito e $\neq 0$ per E_1, E_2, E_3 distinte (e tutte $> -1/2$), ossia per ε appartenente ad un determinato insieme J_A^* ovunque denso.

Per $T \equiv Oi_1 i_2 i_3$, cosicchè vale (34), il considerato sistema lineare prende la forma

$$(39) \quad \begin{cases} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = \delta_{ik} \\ \sum_{h=1}^3 E_h \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = E_i \delta_{ik} \\ \sum_{h=1}^3 \frac{1}{E_h} \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{1}{E_i} \delta_{ik} \end{cases}$$

Esso è soddisfatto in I_A^* (solo) da

$$(40) \quad \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} = \delta_{hi} \delta_{hk} \quad (h = 1, 2, 3).$$

È facile convincersi, tenuto conto dell'analiticità delle funzioni $E_h(\varepsilon)$, che le espressioni (40) forniscono l'unica soluzione di (39) per ε dilatazione qualsiasi avente $Oi_1 i_2 i_3$ per terna unita.

Derivando membro a membro le (36) e (37') rispetto a ε_r ,

si ottiene *) — v. (2) e il lemma II —

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} &= 0 \\ \sum_{h=1}^3 \left(E_h \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} + \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{rs}} \right) &= \delta_{ir} \delta_{ks} \\ \sum_{h=1}^3 \left(\frac{1}{E_h} \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} - \frac{1}{E_h^2} \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{rs}} \right) &= - \varepsilon_{-1}^{ir} \varepsilon_{-1}^{ks} \quad (i, k, r, s = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Osservo ora che, supposto $T \equiv Oi_1 i_2 i_3$, per (34) e (40) e per il lemma II e la convenzione (1) il sistema (41) diviene

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} &= 0 \\ \sum_{h=1}^3 E_h \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} &= \delta_{ir} \delta_{ks} - \sum_{h=1}^3 \delta_{hi} \delta_{hk} \delta_{hr} \delta_{hs} = \delta_{ir} \delta_{ks} (1 - \delta_{ik}) \\ \sum_{h=1}^3 \frac{1}{E_h} \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} &= - \frac{\delta_{ir} \delta_{ks}}{E_i E_k} + \sum_{h=1}^3 \frac{\delta_{hi} \delta_{hk} \delta_{hr} \delta_{hs}}{E_h^2} = \delta_{ir} \delta_{ks} \frac{\delta_{ik} - 1}{E_i E_k} \end{aligned} \right. \quad (i, k, r, s = 1, 2, 3).$$

Fissati i, k, r, s ($i, k, r, s = 1, 2, 3$), (42) è un sistema lineare nelle $\partial E_h / \partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}$, il cui determinante incompleto è ancora Δ

*) Quanto al secondo membro di (41) si osservi che da

$$\sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{-1}^{jk} = \delta_i^k$$

segue

$$\delta_{ir} \varepsilon_{-1}^{rk} + \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{-1}^{jk}}{\partial \varepsilon_{rs}} = 0$$

onde moltiplicando per ε_{-1}^{ri} otteniamo

$$\varepsilon_{-1}^{ri} \varepsilon_{-1}^{rk} + \delta_j^k \frac{\partial \varepsilon_{-1}^{jk}}{\partial \varepsilon_{rs}} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial \varepsilon_{-1}^{rk}}{\partial \varepsilon_{rs}} = - \varepsilon_{-1}^{rk} \varepsilon_{-1}^{rk}.$$

— v. (38) — cosicchè nel sopra considerato insieme J_A^* esso è univocamente risolubile.

Per $i = k$ i termini noti sono nulli onde

$$(43) \quad \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ii} \partial \varepsilon_{rs}} = 0 \quad (h, i, r, s = 1, 2, 3) ..$$

Tenuto conto dell'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, resta solo il caso $i \neq k$ e $r \neq s$. In questo i termini noti sono nulli eccetto il sotto-caso in cui sia

$$(44) \quad \delta_{ir} \delta_{ks} = \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{is} \delta_{kr}) = 1/2$$

cioè, o $i = r$ e $k = s$ o $i = s$ e $k = r$. Essendo $r \neq s$ queste alternative si escludono a vicenda. È allora facile verificare usando (42), che sotto l'ipotesi (34) le sole derivate seconde non nulle son date dalle formule

$$(45) \quad \frac{\partial^2 E_i}{\partial \varepsilon_{ik}^2} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{ki}} = - \frac{\partial E_k}{\partial \varepsilon_{ik}^2} = - \frac{\partial^2 E_k}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{ki}} = \frac{1}{2(E_i - E_k)} \\ (i \neq k; i, k = 1, 2, 3) ..$$

Incidentalmente noto che per il lemma II, riferendosi alla terna $Oi_1 i_2 i_3$ e pensando le E_h come funzioni delle $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_3$, stanti (9) le uniche derivate seconde non nulle per ε appartenente a J_A^* , sono

$$(46) \quad \frac{\partial^2 E_{h+1}}{\partial \varepsilon_{h+\frac{1}{2}}^2} = - \frac{\partial^2 E_{h+2}}{\partial \varepsilon_{h+\frac{1}{2}}^2} = \frac{1}{2(E_{h+1} - E_{h+2})} \quad (h = 1, 2, 3) ..$$

Usando le notazioni a due indici, (33)₂ e la convenzione (1), si posson riassumere (43) e (45) nell'unica formula

$$(47) \quad \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} = \delta_{ir} \delta_{ks} \frac{\delta_{hi} - \delta_{hk}}{E_i - E_k} \\ (h, i, k, r, s = 1, 2, 3) ..$$

che dunque vale per $T \equiv O i_1 i_2 i_3$, ossia sotto la condizione (34), con la convenzione di intendere il secondo membro di (47) come nullo per $i = k$ (nel qual caso esso assume la forma indeterminata $0/0$).

6. Forma delle precedenti condizioni di propagabilità nel caso isotropo.

Suppongo che l'elemento η del considerato corpo S sia isotropo. L'energia elastica W è allora una funzione simmetrica $W(E_1, E_2, E_3)$ delle caratteristiche principali di deformazione e anche una $\widehat{W}(v_1, v_2, v_3)$ dei rapporti principali di allungamento — v. (33) — ⁷⁾. Suppongo tali funzioni continue. Dapprima considero le E_1, E_2, E_3 come variabili indipendenti. Infine accenno brevemente alle espressioni assunte dai risultati assumendo come variabili indipendenti le v_1, v_2 e v_3 . Preliminarmente pongo ⁸⁾

$$(48) \Delta_{ik} = \begin{cases} (W'_{E_i} - W'_{E_k})/(E_i - E_k) & \text{per } E_i \neq E_k \quad \text{e } i \neq k \\ W''_{E_i E_i} - W''_{E_i E_k} & \text{per } E_i = E_k \quad \text{e } i \neq k \\ 0 & \text{per } i = k \quad (i, k = 1, 2, 3) . \end{cases}$$

Allora omettendo, per brevità di scrivere E_3 e tenendo conto che per la simmetria di $W(E_1, E_2, E_3)$ è $W'_{E_1}(E_1, E_1) = W'_{E_2}(E_1, E_1)$, si ha, per $E_1 \neq E_2$,

$$(E_1 - E_2) \Delta_{12} = W'_{E_1}(E_1, E_2) - W'_{E_1}(E_1, E_1) + \\ + W'_{E_2}(E_1, E_1) - W'_{E_2}(E_1, E_2)$$

onde, essendo pure $W''_{E_1 E_1}(E_1, E_1) = W''_{E_2 E_2}(E_1, E_1)$, risulta

$$(49) \quad \lim_{E_2 \rightarrow E_1} \Delta_{12} = -W''_{E_1 E_2}(E_1, E_1) + W''_{E_2 E_2}(E_1, E_1) = \\ = -W''_{E_1 E_2}(E_1, E_1) + W''_{E_1 E_1}(E_1, E_1) .$$

⁷⁾ Spesso l'energia elastica di un corpo isotropo vien data in funzione dei tre invarianti principali di deformazione I_1, I_2, I_3 — v. (35) — (35) permette di ottenere immediatamente W come funzione delle caratteristiche principali E_1, E_2, E_3 . Ponendo in quest'ultima $E_i = (v_i^2 - 1)/2$ ($i = 1, 2, 3$), W resta espressa come funzione $\widehat{W}(v_1, v_2, v_3)$ degli allungamenti principali. Una tale espressione di W è usata per es. in [2].

⁸⁾ L'apice denota derivazione.

Da (48) e (49) segue che Δ_{12} è continua per E_1, E_2, E_3 qualsiasi (purchè $> -1/2$). È ora ovvio che l'analogo vale per $\Delta_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Da (48) e (49)₂ segue pure $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Mi riferisco alla considerata terna $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ rispetto a cui vale (33) e quindi anche (34). Rispetto ad essa, in base a (40), è

$$(50) \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{\partial W}{\partial E_i} \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Inoltre, siccome Δ_{ik} e le funzioni figuranti nell'identità

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} = \sum_{h,j=1}^3 \frac{\partial W}{\partial E_h \partial E_j} \frac{\partial E_h}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial E_j}{\partial \varepsilon_{rs}} + \sum_{h=1}^3 \frac{\partial W}{\partial E_h} \frac{\partial^2 E_h}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} \quad (i, k, r, s = 1, 2, 3)$$

sono continue, per (40), (47), (48)₁ e la convenzione (1), (34) implica che nella chiusura dell'insieme J_A^* è

$$(51) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_i \partial E_r} \delta_{ik} \delta_{rs} + (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{is} \delta_{kr}) \frac{\Delta_{ik}}{2} \quad (i, k, r, s = 1, 2, 3).$$

Dapprima per (20), (17') e (33), poi per (51) e (50), rispetto alla terna $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ risulta

$$\begin{aligned} p_{ir} &= \sum_{k,s=1}^3 \left[v_i v_r \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{rs}} + \delta_{ir} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ks}} \right] N_k^* N_s^* = \\ &= v_i v_r \frac{\partial^2 W}{\partial E_i \partial E_r} N_i^* N_r^* + v_i v_r \delta_{ir} \sum_{s=1}^3 \frac{\Delta_{is}}{2} N_i^{*2} + \\ &+ v_i v_r \frac{\Delta_{ir}}{2} N_i^* N_r^* + \delta_{ir} \sum_{s=1}^3 \frac{\partial W}{\partial E_s} N_i^{*2} \quad (i, r = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Dunque, stanti (48) e (33)₂, un'espressione di p_{ik} mediante le E_k e $W(E_1, E_2, E_3)$ è la seguente

$$(52) \quad p_{ik} = v_i v_k \left(W_{\mathbf{i}\mathbf{i}\mathbf{k}}'' + \frac{\Delta_{ik}}{2} \right) N_i^* N_k^* + \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \left(W_{\mathbf{i}\mathbf{l}}' + v_i^2 \frac{\Delta_{il}}{2} \right) N_i^{*2} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

che permette un'immediata esplicitazione nel presente caso isotropo degli invarianti J_1 , J_2 e J_3 determinati dall'identità (22). In particolare noto

$$J_1 = \sum_{i=1}^3 p_{ii} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 \frac{\partial^2 W}{\partial E_i^2} N_i^{*2} + \sum_{i,l=1}^3 \left(W'_{il} + v_i^2 \frac{\Delta_{il}}{2} \right) N_i^{*2},$$

ossia

$$(53) \quad J_1 = \sum_{i=1}^3 \left[v_i^2 \frac{\partial^2 W}{\partial E_i^2} + 3 W'_{ii} + \sum_{l=1}^3 v_i^2 \frac{\Delta_{il}}{2} \right] N_i^{*2}.$$

Osservo che nel caso isotropo, fissati E_1 , E_2 ed E_3 , per (33)₂ e (53), la condizione necessaria e sufficiente affinché sia $J_1 > 0$ per ogni versore N^* , è che, stante (48), sia

$$(54) \quad (1 + 2E_l) \frac{\partial^2 W}{\partial E_l^2} + 3 \frac{\partial W}{\partial E_l} + \sum_{i=1}^3 (1 + 2E_i) \frac{\Delta_{il}}{2} > 0$$

($l = 1, 2, 3$).

Dunque a queste tre disequaglianze si riducono nel caso isotropo le sette disequaglianze (30), (31) e (32) equivalenti nel caso generale all'essere $J_1 > 0$ per ogni versore N^* .

Per $N^* = i_r$, ossia per $N_i^* = \delta_{ri}$ ($i = 1, 2, 3$), in base a (52) e (33)₂ p_{ik} assume la forma ortogonale $p_{ik}^{(r)} = \delta_{ik} p_{kk}^{(r)}$ ove

$$(55) \quad p_{kk}^{(r)} = (1 + 2E_r) W''_{rr} \delta_{rk} + W'_{rr} + (1 + 2E_r) \frac{\Delta_{kr}}{2}$$

($k, r = 1, 2, 3$).

Così, fra l'altro si ritrova — cfr. [5] p. 275 — che in corrispondenza ai considerati valori di N^* (onde principali) gli assi principali di deformazione sono di simmetria anche per l'ellissoide di polarizzazione.

Osserviamo pure che per (21) la quantità $p_{kk}^{(r)}$ data esplicitamente da (55) e (48), si identifica col quadrato della velocità

di propagazione U_{rk} secondo $\mathbf{i}_r$, di una discontinuità ordinaria parallela ad $\mathbf{i}_k$. Dal confronto di (55) con (54) segue allora che le tre condizioni (54) possono porsi nella seguente forma meccanicamente più interessante

$$(54') \quad \sum_{k=1}^3 U_{rk}^2 = \sum_{k=1}^3 p_{kk}^{(r)} > 0 \quad (r = 1, 2, 3).$$

Naturalmente la precedente eguaglianza ha senso solo se le corrispondenti $p_{kk}^{(r)}$ sono ≥ 0 . Volendo si può enunciare il precedente risultato come segue:

In corrispondenza al generico asse di una terna principale di deformazione sia positiva la somma dei quadrati delle tre velocità eventualmente immaginarie con cui si propagano lungo il detto asse le discontinuità ordinarie parallele agli assi della suddetta terna (in particolare ciò si verifica se lungo ogni asse principale di deformazione può propagarsi una discontinuità effettiva parallela ad uno qualsiasi di tali assi ed una almeno di queste tre discontinuità non è stazionaria).

Allora, nel caso isotropo, lungo ogni direzione N può propagarsi almeno una discontinuità effettiva.

* * *

Volendo usare v_1, v_2, v_3 come variabili indipendenti si osservi che da (33)₂, ossia $1 + 2E_h = v_h^2$ si ha

$$\frac{\partial E_h}{\partial v_i} = v_h \delta_{hi} \quad \frac{\partial^2 E_h}{\partial v_i \partial v_k} = \delta_{hi} \delta_{hk} \quad (h, i, k = 1, 2, 3),$$

onde

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{W}'_{v_i} = v_i W''_{\mathbf{E}_i}; \quad \widehat{W}''_{v_i v_k} = W''_{\mathbf{E}_i \mathbf{E}_k} v_i v_k + \delta_{ik} W'_{\mathbf{E}_i}, \\ W''_{\mathbf{E}_i \mathbf{E}_k} = \frac{1}{v_i v_k} \widehat{W}''_{v_i v_k} - \frac{\delta_{ik}}{v_i^3} \widehat{W}'_{v_i} \end{array} \right. \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Per (56)_{1,3} e (33)₂ si può esprimere Δ_{ik} data da (48) mediante

$\widehat{W}(v_1, v_2, v_3)$ come segue

$$(57) \quad \Delta_{ik} = \begin{cases} 2 \frac{1}{v_i} \frac{\widehat{W}'_{v_i}}{v_i^2} - \frac{1}{v_k} \frac{\widehat{W}'_{v_k}}{v_k^2} & v_i \neq v_k, \quad i \neq k \\ \frac{1}{v_i^2} \widehat{W}''_{v_i v_i} - \frac{\widehat{W}_{v_i}}{v_i^3} - \frac{1}{v_i v_k} \widehat{W}''_{v_i v_k} & v_i = v_k, \quad i \neq k \\ 0 & i = k \quad (i, k = 1, 2, 3) . \end{cases}$$

Stante (57), per (56)₂ e (52) p_{ik} assume l'espressione

$$(58) \quad p_{ik} = \left(W''_{v_i v_k} + \frac{\Delta_{ik}}{2} \right) N_i^* N_k^* + \delta_{ik} \sum_{l \neq i; l=1}^3 \left(\frac{W'_{v_l}}{v_l} + v_l^2 \frac{\Delta_{il}}{2} \right) N_l^{**} \\ (l = 1, 2, 3) .$$

Per (58), oppure (53), (56)₂ e (56)₁, è

$$J_1 = \sum_{i=1}^3 p_{ii} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial v_i^2} + \frac{2}{v_i} W'_{v_i} + \sum_{l=1}^3 v_l^2 \frac{\Delta_{il}}{2} \right] N_i^{**} .$$

Dunque è $J_1 > 0$ per ogni versore N^* se e solo se, stante (57) è

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v_l^2} + \frac{2}{v_l} W'_{v_l} + v_{l+1}^2 \frac{\Delta_{l+1,l}}{2} + v_{l+2}^2 \frac{\Delta_{l+2,l}}{2} > 0 \\ (l = 1, 2, 3) .$$

PARTE II

SUI SISTEMI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI E A QUADRICI DI POLARIZZAZIONE SEMPRE ROTONDA ATTORNO ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

7. Richiami e teorema sulla propagazione delle discontinuità.

D'ora in poi considero sistemi particolari. In [4] vengono fra l'altro considerati quelli dei sistemi menzionati nel titolo, pei

quali la quadrica di polarizzazione è sempre un ellissoide reale, cosicchè secondo ogni direzione N e sotto ogni deformazione ε può propagarsi una discontinuità λ nelle accelerazioni, in (almeno) una qualunque di tre direzioni indipendenti.

In questo numero considero anche i casi in cui per λ ($\lambda \neq 0$) sian possibili solo una oppure due direzioni indipendenti.

Nei prossimi numeri studierò tali sistemi generali in relazione a proprietà statiche del tipo di quelle considerate in [4]. In [4] pg. 52 riga 7 d.b. è sostanzialmente dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA II — *Il sistema (omogeneo) S a trasformazioni reversibili ha la quadrica di polarizzazione sempre rotonda attorno alla direzione di propagazione se e solo se S ha energia elastica isoterma W del tipo*

$$(59) \quad W = W(D) = F(D) + aI_1$$

ove

$$(60) \quad I = E_1 + E_2 + E_3, \quad D = \sqrt{(1+2E_1)(1+2E_2)(1+2E_3)}.$$

Inoltre le equazioni delle velocità di propagazione delle discontinuità trasversali e longitudinali riferite alla considerata terna $Oi_1i_2i_3$ — v. [4], formule (34) e (35') —, sono

$$(61) \quad \mu^* a_{\bullet}^2 = a$$

per le trasversali e

$$(61') \quad \mu^* a_{\bullet}^2 = a + D^2 \frac{d^2 F}{dD^2} \sum_{r=1}^3 \frac{N^{*2}}{1 + 2E_r}$$

per le longitudinali.

Tolotti osserva che *le considerate velocità sono sempre entrambe reali ossia la quadrica di polarizzazione è un ellissoide reale, se e solo se è*

$$(62) \quad a > 0, \quad \frac{d^2 F}{dD^2} \geq 0 \quad \text{per } 0 < D < +\infty.$$

Conformemente a quanto si è detto, interessa qui vedere se le velocità espresse da (61) e (61') possono essere reali separatamente e, in caso affermativo, caratterizzare matematicamente tali casi.

TEOREMA III - *L'elemento η del sistema S a trasformazioni reversibili abbia quadrica Q di polarizzazione sempre rotonda attorno alla direzione di propagazione cosicchè esso ha potenziale isoterma W dato da (59).*

Inoltre sotto qualsiasi deformazione ε e lungo qualsiasi direzione possa propagarsi in seno ad η almeno una discontinuità effettiva λ d'accelerazione, ossia Q sia reale. Valgono allora le seguenti tesi:

a) *È $a \geq 0$, cosicchè secondo l'equazione (61) onde trasversali possono propagarsi in direzioni e sotto deformazioni qualsiasi.*

b) *Se $a = 0$ (cosicchè son possibili onde trasversali stazionarie) e $\frac{d^2 F}{dD^2} < 0$ per $D = D_1$, allora per $D = D_1$ non possono propagarsi onde longitudinali.*

c) *Se $a > 0$ e $\left[\frac{d^2 F}{dD^2} \right]_{D=D_1} < 0$ ($D_1 > 0$) allora per $D = D_1$, in qualche direzione, la propagazione delle onde longitudinali è possibile sotto certe deformazioni e impossibile sotto altre.*

Infatti valgono le ipotesi del teorema e supponiamo per assurda ipotesi che sia $a < 0$. Allora per (61) non possono propagarsi discontinuità trasversali.

Di conseguenza deve risultare ≥ 0 il secondo membro di (61') per E_1 , E_2 ed E_3 , qualsiasi purchè $> -1/2$. Segue $\frac{d^2 F}{dD^2} > 0$.

Per $E_2 = E_3$, (60)₂ implica $E_2 = E_3 = -1/2 + D/\sqrt{1+2E_1}$, cosicchè facendo pure $N^* = i_1$ ($N_2^* = N_3^* = 0$) il secondo membro di (61') diviene

$$(63) \quad a + \frac{d^2 F}{dD^2} \frac{D^2}{1 + 2E_1}.$$

Fissato $D > 0$, esso tende ad a per E_1 tendente a $+\infty$. Dunque essendo $a < 0$, fissato comunque D , per E_1 abbastanza grande e $E_2 = E_3$ non possono propagarsi nemmeno discontinuità

longitudinali, in contrasto con una ipotesi. È dunque $a \geq 0$. È ormai immediato riconoscere in base all'equazione (61) la completa validità della tesi a).

La tesi b) è immediata conseguenza dell'equazione (61') nella velocità a_* di propagazione delle onde longitudinali.

Sia ora $a > 0$ e $\frac{d^2 F}{dD^2} < 0$ per $D = D_1$ ($D_1 > 0$). Si è visto che per E_1 tendente a $+\infty$ l'espressione (63) tende ad a che ora è positivo. Dunque per $D = D_1$, $N^* = i_1$ e $E_2 = E_3$ il secondo membro di (61') coincide con (63) ed è positivo. Di conseguenza per E_1 abbastanza grande e $E_2 = E_3$ le discontinuità longitudinali possono propagarsi nella direzione N con $N^* = i_1$.

Fatto $D = D_1$, per E_1 tendente a $-1/2$ (da destra) l'espressione (63) tende a $-\infty$. Dunque per $D = D_1$, $E_1 > -1/2$, $E_1 \simeq -1/2$ ed $E_2 = E_3$ il secondo membro di (61') è negativo, cosicchè per i considerati valori delle E_k non possono propagarsi onde longitudinali nella direzione N con $N^* = i_1$.

Con ciò anche la tesi c) è stata dimostrata.

c. d. d.

8. Introduzione allo studio dei sistemi precedenti in relazione a proprietà statiche e di propagazione.

In [4] Tolotti, dopo aver dimostrato fra l'altro il Teor. II, esamina se le proprietà dei sistemi a trasformazioni reversibili dotati di potenziale isoterma caratterizzato da (59) e (60) possano essere rese conformi a quelle dei solidi perfettamente elastici, associando alle (59) qualche altra condizione restrittiva. L'Autore si riferisce ai sistemi omogenei, il che non è restrittivo dato che la propagabilità di discontinuità è una proprietà locale ed istantanea, e considera le seguenti tre proprietà statiche dei corpi elastici:

α) *esistenza di uno stato naturale con cui identificare lo stato di riferimento C^* ;*

β) *nella trazione e pressione semplice di un cilindro la contrazione unitaria — δ' sia funzione crescente dell'allungamento unitario δ ;*

γ) il potenziale W diverga infinito positivo quando una almeno delle caratteristiche principali di deformazione tenda a $-1/2$ o $a + \infty$.

L'Autore dapprima dimostra che un sistema S avente il potenziale isoterma (59) gode delle dette proprietà α), β) e γ) appena il potenziale W soddisfi le seguenti condizioni matematiche a), b) e c):

a) sia $a > 0$

b) $F(D)$ tenda a $+\infty$ per $D \rightarrow 0$ e decresca sempre al crescere di D , annullandosi per $D = 1$ e tendendo ad una quantità finita per $D \rightarrow \infty$;

c) $D \frac{dF}{dD}$ tenda a $-\infty$ per $D \rightarrow 0$ e cresca sempre al crescere di D raggiungendo il valore $-a$ per $D = 1$ e tendendo a zero per $D \rightarrow \infty$.

In seguito — v. pg. 58 — l'Autore inverte parzialmente il detto risultato dimostrando che se il sistema S gode delle proprietà statiche α), β) e γ) ed ha potenziale isoterma W caratterizzato da (59) e anche da (62) — cosicchè la quadrica di polarizzazione Q è sempre un ellissoide rotondo attorno alla direzione di propagazione per ipotesi —, allora W soddisfa le condizioni a), b) e c).

Nella detta parziale inversione si fa una precisazione — v. [4] pg. 59 riga 4 — che equivale a presupporre che per ogni $D > 0$ S goda della seguente proprietà:

δ) È fisicamente possibile che S occupi un volume $V = DV^*$ e (contemporaneamente) due delle tensioni principali siano nulle.

Potendosi supporre S cilindrico in C^* (ove occupa il volume V^*) è chiaro che la proprietà δ) riguarda il problema della trazione di un cilindro dello stesso materiale di S .

Dalla caratterizzazione matematica della proprietà δ) fatta nel prossimo Teor. IV risulterà che la proprietà c) di Tolotti implica che la δ) valga per ogni $D > 0$.

Nell'accennata inversione dimostrata da Tolotti l'ipotesi (62) per cui la quadrica di polarizzazione è un ellissoide reale, può sostituirsi con quella meno restrittiva che tale quadrica sia reale, ossia *possessa qualche punto reale eventualmente improprio*. In altre parole non esistono sistemi a trasformazioni reversibili, dotati delle proprietà statiche α), β), γ) e δ), aventi quadrica

di polarizzazione Q reale e non ellissoidica. Anzi dal Teor. VI risulta che per dedurre che Q è un ellissoide basta supporre valide in luogo delle proprietà $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ e $\delta)$, solo la $\delta)$, una parte della $\gamma)$, e opportune poco restrittive proprietà di regolarità e sul comportamento del potenziale quando il volume vien ridotto a zero. Tali ipotesi faccio appunto nel Teor. VI. Esse costituiscono le condizioni 1), ..., 4) del Teor. V che in questo vengono caratterizzate in modo puramente matematico. Mostro che tutte le dette ipotesi sono verificate dai sistemi considerati in [4] n. 8, 9, 10, dopo il prossimo teorema V per quanto riguarda la proprietà $\delta)$, e alla fine del n. 8 specialmente per quanto riguarda le suaccennate condizioni di regolarità.

Mi è sembrato interessante dedurre la tesi I senza supporre la validità delle proprietà $\alpha)$ e $\beta)$ perchè, in primo luogo, per es. i gas perfetti non sono dotati della proprietà $\alpha)$; in secondo luogo la proprietà $\beta)$ esclude che il coefficiente di Poisson prenda valori negativi o nulli in un insieme di misura non nulla. Per questo la $\beta)$ non è posseduta da certi corpi reali, per es. dal caucciù. Allo scopo di conformare i sistemi teorici qui studiati ai corpi naturali, mi è sembrato interessante considerare anche la seguente proprietà $\beta')$ da usarsi magari in luogo della $\beta)$ — vedi i due esempi al n. 10 —:

$\beta')$ La pressione $p = p(D)$ occorrente per mantenere il corpo omogeneo S in un volume $V = DV^*$ a una data temperatura e in assenza di forze di massa diminuisce al crescere di V .

Sia $p^* = p^*(D) = D^{2/3}p(D)$ la pressione $p(D)$ (eventualmente negativa) resa relativa all'unità di area del contorno Σ^* di C^* — v. [4], pg. 56 —. Allora p^* è proporzionale al prodotto $p^*\Sigma^* = p\Sigma$ (ove Σ è il contorno di C) il quale dà una soddisfacente misura della pressione totale. Quindi, dal punto di vista fisico, la decrescenza della funzione $p^*(D)$ è forse più interessante di quella della $p(D)$ specialmente per $p(D) < 0$. $p^*(D)$ è funzione decrescente in relazione ai corpi considerati in [4] n. 8, 9, 10 — v. [4] pg. 56 — e, più generalmente, anche per i corpi soddisfacenti le condizioni 1), ..., 4) considerate nel prossimo Teor. V [Teor. VII, tesi II].

Però i corpi naturali almeno se non sono troppo dilatati

sembrano godere anche della proprietà β'). Ciò vale certo per i gas. Fra i corpi soddisfacenti le condizioni 1), ..., 4) del Teor. IV ve ne sono alcuni privi di configurazione $\bar{C}$ di equilibrio naturale (e in ciò simili appunto ai gas) che godono della proprietà β') in ogni configurazione ottenuta da C^* mediante uno spostamento omotetico — v. secondo esemp.o al n. 10 —; invece quelli dotati di una tale configurazione $\bar{C}$, e in particolare i corpi considerati in [4] n. 8, 9 e 10 non possono godere sempre della β') [Teor. VII tesi VI]. Possono però goderne per es. per piccole dilatazioni — v. primo esempio al n. 10 —.

Sembrandomi interessante anche considerare la proprietà β') in sostituzione della β) — come ho già detto —, mostro che per i sistemi considerati negli accennati esempi del n. 10, sotto la condizione di mantenere il loro volume totale entro certi limiti, vale la proprietà β') e non la β).

9. Su proprietà statiche e di propagazione dei sistemi a trasformazioni reversibili con quadrica di polarizzazione sempre rotonda attorno alla direzione di propagazione.

TEOREMA IV — *Riprendiamo il precedente sistema (omogeneo) di potenziale elastico W dato da (59). Allora*

a) la proprietà δ) vale per S in corrispondenza al valore V/V^ di D se e solo se*

$$(64) \quad \alpha F'(D) < 0 ;$$

b) la proprietà β') vale per S nell'intervallo $D_1 - D_2$ se e solo se, in corrispondenza, $\alpha D^{-1/3} + F'(D)$ cresce, ovvero se e solo se in un conveniente insieme I , denso su $D_1 - D_2$, è

$$(65) \quad 3F''(D) > \alpha D^{-4/3} .$$

Infatti per $V = DV^*$ valga per S la proprietà δ). Allora per $D = V/V^*$ si può considerare il problema della trazione di un cilindro omogeneo e dello stesso materiale di S . In base alla

formula (46) di [4], l'allungamento δ del detto cilindro è espresso da

$$(66) \quad \delta = -1 - \frac{\alpha}{F'(D)}.$$

Essendo $\delta > -1$, (66) implica (64).

Supponiamo ora (64), cosicchè la quantità δ definita da (66) ha il precedente significato di allungamento. Allora, dato D , la corrispondente contrazione laterale δ' è definita da

$$(67) \quad D = (1 + \delta)(1 + \delta')^2.$$

Partendo dalla configurazione C^* deformiamo S omogeneamente e in modo che per ogni elemento di S l'allungamento secondo un asse x sia δ , e quello secondo ogni direzione y normale a x sia δ' . La tensione principale secondo y — v. [4], formula (43)₂ — vale $B_2 = -\alpha(1 + \delta')^2/D - F'(D)$ cosicchè per (67) è $B_2 = 0$. Dunque per $D = V/V^*$ vale la proprietà δ). Con ciò la tesi a) risulta assodata.

Quanto alla tesi b) basta osservare che la pressione $p = p(D)$ di cui nella proprietà $\beta')$ è espressa — v. [4], formula (41) — da

$$(68) \quad p = p(D) = -\alpha D^{-1/3} - F'(D) \quad \text{c.d.d.}$$

Si osservi che le riportate condizioni a) e c) di Tolotti implicano che (64) valga per ogni $D > 0$. Allora per il Teor. IV le dette condizioni a) e c) implicano che il considerato sistema S goda della proprietà δ) per ogni $D > 0$.

TEOREMA V — *L'esistenza di una funzione $F(D)$ continua per ogni $D > 0$ assieme a F' ed F'' , e soddisfacente alle condizioni*

$$(69) \quad \alpha > 0, \quad F'(D) < 0, \quad F''(D) > 0 \quad (0 < D),$$

$$(70) \quad \lim_{D \rightarrow 0^+} F(D) = +\infty$$

e alla (59), è condizione necessaria e sufficiente affinché per un sistema S a trasformazioni reversibili e di potenziale elastico W valgano le seguenti quattro condizioni:

1) la quadrica Q di polarizzazione sia sempre reale e rotonda attorno alla direzione di propagazione.

2) W tenda a $+\infty$ quando anche una sola delle E_1, E_2, E_3 tende a $-1/2$.

3) $W = W(D)$ sia regolare nel senso che $W(D)$, $W'(D)$ e $W''(D)$ siano continue ($D > 0$) e nel problema della trazione di un cilindro omogeneo sia sempre finita la derivata $d - \delta'/d\delta$ della contrazione laterale $-\delta'$ rispetto all'allungamento δ :

4) la proprietà $\delta)$ valga in corrispondenza ad ogni $D > 0$.

Dimostrazione — Per S valgono le condizioni 1), ..., 4). Per la 1) e la 3), in base al Teor. II esiste una funzione F continua assieme a F' ed F'' , e verificante (59).

Per la condizione 4) in base al Teor. IV, tesi a) la diseuguaglianza (64) deve valere per ogni $D > 0$. Allora è $a \neq 0$. Inoltre la condizione 1) include la realtà della suddetta quadrica Q , cosicchè per il Teor. III tesi a), risulta $a > 0$ — ossia vale (69)₁, ovvero la citata condizione $a)$ di Tolotti —. Allora poichè (64) sussiste per ogni $D > 0$, l'analogo vale per (69)₂.

In un cilindro omogeneo soggetto a trazione — v. [4] pg. 58 — la contrazione laterale $-\delta'$ è legata all'allungamento δ dalla relazione

$$(71) \quad 2(1 + \delta) \frac{d\delta'}{d\delta} = - \frac{1}{aF''(D)} \left(\frac{dF}{dD} \right)^2 \frac{d}{dD} \left(D \frac{dF}{dD} \right).$$

Riscriviamola nella forma

$$(72) \quad -2a^2(1 + \delta) \frac{d\delta'}{d\delta} = D \left(\frac{dF}{dD} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dD} \right)^3 / F''(D).$$

In base alla condizione 3), $d\delta'/d\delta$ è sempre finita e per (69)₂ è $F''(D) \neq 0$ per ogni $D > 0$. Allora per (72) $F''(D)$ non può mai annullarsi, cosicchè per la sua continuità ha segno costante.

Per (60)₂ quando D tende a zero, E_1, E_2, E_3 tendono a $-1/2$. Contemporaneamente $W(D)$ tende a $+\infty$ in base alla condizione 2). Allora per (59) e (60) vale (70). Ne segue che per qualche D positivo e piccolo è $F''(D) > 0$. Inoltre è sempre $F''(D) \neq 0$ e per la condizione 3) F'' è continua. Di conseguenza vale anche

(69)₁. Dunque valgono (59), (69) e (70) ove F , F' e F'' sono continue.

Ora, viceversa assumiamo il precedente asserto come ipotesi. Allora da (69)_{1,1} segue (62). Quindi, in base alla riportata osservazione di Tolotti involgente (62), *le condizioni (59) e (69)_{1,1} implicano che la quadrica Q di polarizzazione sia sempre un ellissoide reale* ed anzi [Teor. II] valga la condizione 1).

La condizione 2) segue da (59) e (70).

Per (59) e la continuità di F , F' e F'' anche W , W' e W'' sono continue. Inoltre per (72), (69)_{1,2} e la nota disuguaglianza $1 + \delta > 0$, $d - \delta'/d\delta$ è sempre finita. Dunque vale la condizione 3).

Infine per ogni $D > 0$ le disuguaglianze (69)_{1,2} implicano (64). Allora, in base al Teor. IV, tesi a), vale la condizione 4).

c. d. d.

La deduzione concernente la quadrica Q fatta nella seconda parte della precedente dimostrazione, permette di affermare come corollario del precedente teorema il seguente

TEOREMA VI – *Per il sistema S di potenziale elastico W , valgano le condizioni 1), ..., 4) considerate nel Teor. V, in particolare, sotto la generica deformazione (omogenea) ε , secondo la generica direzione z possa propagarsi almeno una effettiva discontinuità di accelerazione. Allora sotto ε e secondo z posson propagarsi almeno tre indipendenti di tali discontinuità.*

Nella seconda parte della dimostrazione del Teor. V, dalle condizioni 1), ..., 4) si sono dedotte le (62), considerate in [4] e meno restrittive.

Ora, fra l'altro, mostro che, stanti le altre condizioni supposte in [4], l'uso di (62) in luogo di (69)_{1,1} è meno restrittivo solo apparentemente. Precisamente osservo che per i corpi verificanti le condizioni a), b), c) di Tolotti e considerati in [4] vale, oltre $F''(D) \geq 0$, (69)₁. Infatti per c) è

$$\frac{d}{dD} \left(D \frac{dF}{dD} \right) = F'(D) + DF''(D) \geq 0.$$

Allora siccome per c) è pure $F'(D) < 0$, risulta appunto $F''(D) > 0$.

Si osservi pure che, di conseguenza, (72) e la condizione α) mostrano che la finitezza di $d\delta'/d\delta$, supposta nel teorema precedente, vale anche per i suddetti sistemi considerati in [4].

10. Su proprietà statiche dei sistemi precedenti.

Nel seguente teorema fra l'altro caratterizzo separatamente, in relazione ai sistemi a trasformazioni reversibili soddisfacenti le condizioni 1), ..., 4) del Teor. V, varie proprietà statiche, quali l'esistenza di una configurazione di equilibrio naturale [tesi III], l'esser elastico secondo Signorini [tesi IV e V], la proprietà γ) [tesi VII] e il complesso delle proprietà α), β), γ) e δ) [tesi VIII]. Deduco pure la validità per i suddetti sistemi, di alcune proprietà statiche di un certo interesse [tesi I e II] e qualche limitazione della validità per essi di una certa proprietà statica concernente la pressione [tesi VI].

TEOREMA VII — *Per il sistema (omogeneo) S di potenziale elastico W , valgano le condizioni 1), ..., 4) considerate nel Teor. V. Allora valgono pure le seguenti tesi:*

I) *Se a partire da una qualunque configurazione si allunga S lungo una direzione principale di deformazione z senza lasciarlo contrarre, allora lo sforzo corrispondente (positivo se ha carattere di pressione) decresce.*

II) *La pressione $p^*(D) = D^{2/3}p(D)$ riferita a C^* , capace di mantenere S in equilibrio in assenza di forze di massa (ed eventualmente negativa) decresce al crescere di D — cfr. [4] pg. 56 —.*

III) *Una configurazione $\bar{C}$ ottenuta da C^* con uno spostamento omogeneo, e in cui sia $D = D_0 = \text{cost}$ è d'equilibrio naturale per S se e solo se il detto spostamento è il prodotto di uno spostamento rigido per una omotetia e inoltre — v. [4] pg. 55 — risulta*

$$(73) \quad F'(D_0) = -\alpha D_0^{-1/3}.$$

In tal caso, convenuto che soprassegnando l'espressione di una grandezza riferita a C^ si esprima la corrispondente riferita a $\bar{C}$, si ha*

$$(74) \quad W = \bar{W}(\bar{D}) = F(D_0\bar{D}) + \alpha D_0^2 \bar{I}_1.$$

In particolare — cfr. [4] p. 55 — C^ è d'equilibrio naturale (necessariamente stabile) se e solo se è*

$$(75) \quad F'(1) = W'(1) = -a.$$

IV) *Assunto $W(1) = 0$, S è un corpo elastico secondo Signorini⁹⁾ se e solo se è*

$$(76) \quad F(1) = 0, \quad F(D) > \frac{3}{2}a(1 - D^{2/3})$$

$$\text{per } 0 < D < +\infty \text{ e } D \neq 1.$$

V) *Affinchè S sia elastico secondo Signorini e C^* sia d'equilibrio naturale basta che per qualsiasi $D > 0$ la considerata pressione $p = p(D)$ [v. β')] capace di mantenere in equilibrio S nel volume $V = DV^*$ sia ≥ 0 a seconda che $V \leq V^*$.*

VI) *S possenga una configurazione $\bar{C}$ di equilibrio naturale, di volume $\bar{V}$. La pressione $p(D)$ [v. β')] soddisfi la condizione $dp/dV \leq 0$ per ogni $V > \bar{V}$.*

Allora è $dp/dV \leq 0$ per ogni $V > \bar{V}$. Ciò significa che se nell'intervallo infinito $\bar{V} - +\infty$ vi è un intervallo $V_1 - V_2$ dove p decresce — ossia vale la proprietà β' —, allora in $\bar{V} - +\infty$ vi è pure un intervallo $V_3 - V_4$ dove p cresce — v. ciò che è detto in proposito al n. 10 e in particolare gli esempi ivi fatti —.

⁹⁾ *Un corpo S si dice elastico secondo Signorini — v. [3] pg. 212 — se per ogni temperatura τ appartenente ad un certo intervallo, S possiede una configurazione C^* di equilibrio libero (ossia in assenza di forze esterne) la quale è inoltre stabile nel senso che è negativo il lavoro fatto dalle forze interne in una qualunque trasformazione isoterma che porti S da C^* ad una configurazione C non ottenibile, a partire dalla C^* , mediante uno spostamento rigido.*

Si osservi che nel caso di sistemi omogenei, l'equilibrio libero equivale ad equilibrio naturale e la stabilità nel precedente senso (di Signorini) equivale all'avere l'energia elastica isoterma, un minimo assoluto in C^* .

Incidentalmente conviene osservare che, ovviamente, un materiale va ritenuto elastico secondo Signorini se è elastico nel senso precedente: un corpo S omogeneo e costituito di quel materiale.

VII) Affinchè W tenda a $+\infty$ quando anche una sola delle E_1, E_2, E_3 tende a $+\infty$ — ovvero il sistema S (che già soddisfa le condizioni 1), ..., 4) del Teor. V) goda completamente della proprietà γ) di Tolotti — occorre e basta che sia

$$(77) \quad \lim_{D \rightarrow +\infty} \left[F(D) + \frac{3a}{2} D^{3/2} \right] = +\infty.$$

VIII) Affinchè S possenga le precedenti proprietà statiche α), β), γ) e δ), occorre e basta che valgano le condizioni a), b) e c) di Tolotti — ossia che S sia del tipo considerato in [4], § 4, p. 54 —.

Infatti per il Teor. V valgono (59), (69) e (70). Quanto alla tesi I, applicando le formule dell'Almansi al considerato corpo S le tensioni principali B_r risultano espresse — cfr. formula (36') di [4] — da

$$(78) \quad B_r = -\frac{a}{D} (1 + 2E_r) - F'(D) = \\ = -a \sqrt{\frac{1 + 2E_r}{(1 + 2E_{r+1})(1 + E_{r+2})}} - F'(D) \quad (r = 1, 2, 3).$$

Ne segue

$$(79) \quad \frac{\partial B_r}{\partial E_r} = -\frac{a}{D} - \frac{D}{1 + 2E_r} F''(D) \quad (r = 1, 2, 3).$$

Allora, essendo $1 + 2E_r > 0$ e valendo (69)_{1,3}, è vera la tesi I.

La tesi II è una immediata conseguenza di (68) e (69)_{1,2} — cfr. [4] pg. 56 —.

Evidentemente la configurazione $\bar{C}$ in cui risulti $D = D_0$ è di equilibrio naturale (necessariamente stabile in quanto la quadrica di polarizzazione è un ellissoide reale) se e solo se in $\bar{C}$ — ossia per $E_r = E_r^0$ ($r = 1, 2, 3$) — risulta $B_r = 0$ ($r = 1, 2, 3$).

Per (78) e (60)₂ ciò equivale alle eguaglianze

$$(80) \quad 1 + 2E_r^0 = D_0^{2/3} \quad (r = 1, 2, 3).$$

e (73). (80) traduce la condizione che lo spostamento $C^* \rightarrow \bar{C}$

sia una omotetia a meno di uno spostamento rigido, quindi vale la prima parte della tesi III. D'altro canto per l'isotropia di S in C^* il suo potenziale W è invariante per ogni spostamento rigido di C^* , quindi (a causa dell'isotropia fisica dello spazio) per ogni spostamento rigido di $\bar{C}$. Dunque possiamo supporre omotetica la trasformazione $C^* \rightarrow \bar{C}$. Allora le omografie di deformazione inerenti alle trasformazioni $C^* \rightarrow \bar{C}$, $\bar{C} \rightarrow C$ e $C^* \rightarrow C$ hanno le terne principali coincidenti. Ne segue, per (80),

$$(81) \quad 1 + 2E_r = (1 + 2E_r^0)(1 + 2\bar{E}_r) = D_0^{2/3}(1 + 2\bar{E}_r) \\ (r = 1, 2, 3).$$

Allora per (60)₂ si ha $I_1 = D_0^{2/3}\bar{I}_1$. Avendosi inoltre $D = D_0\bar{D}$, (59) implica (74). Dopo ciò, è ovvia la completa validità della tesi III.

Oltre (59) valga (75), ossia C^* sia d'equilibrio. Si ponga poi $W(1) = 0$, cosicchè risulta $F(1) = 0$. Allora il corpo omogeneo S è elastico secondo Signorini — v. nota 7 — se e solo se W ha in C^* un minimo assoluto proprio, ossia — cfr. (59) — se e solo se, stante (60), è

$$(82) \quad F(D) > -aI_1 = -a \sum_{r=1}^3 E_r \quad \text{per } D > 0 \text{ e } D \neq 1.$$

Per un dato valore di D , I_1 è minimo quando lo è

$$(83) \quad J = \sum_{r=1}^3 (1 + 2E_r) = 3 + 2I_1$$

e ciò accade — v. (60) — per $1 + 2E_r = D^{2/3}$ ($r = 1, 2, 3$). Allora il cercato minimo di J è $3D^{2/3}$ onde quello di I_1 è $\frac{3}{2}(D^{2/3} - 1)$; dunque

$$(84) \quad I_1 \geq \frac{3}{2}(D^{2/3} - 1), \text{ il segno = valendo solo per } E_1 = E_2 = E_3.$$

Essendo poi $a > 0$, dato $D > 0$, la validità di (82) per ogni terna (E_1, E_2, E_3) verificante (60)₂ equivale a (76). Vale dunque la tesi IV.

Sia ora $p \geq 0$ rispettivamente per $D \geq 1$. Allora per (68) vale (75) cosicchè C^* è d'equilibrio. Inoltre

$$(85) \quad F''(D) \geq -aD^{-1/3} \quad \text{per } D \geq 1.$$

(85) e la condizione $F(1) = 0$ — equivalente alla $W(1) = 0$ — implicano (76). Allora in base alla tesi IV, S è elastico secondo Signorini. Dunque vale la tesi V.

Per dimostrare la tesi VI comincio con l'osservare che in base alla tesi III — v. (74) — senza ledere la generalità possiamo supporre che C^* sia di equilibrio naturale; allora per la tesi III vale (75). Suppongo poi che sia $dp/dD \leq 0$ per ogni $D > 1$ e, per assurda ipotesi, che sia dp/dD per $D = D_1$ ($D_1 > 1$). Di conseguenza, per (68) è $3F''(D) \geq aD^{-4/3}$ per ogni $D > 1$ e $3F''(D) > aD^{-4/3}$ per $D = D_1$. Allora, tenuto conto della continuità di F'' e F' si ha

$$F'(+\infty) = F'(1) + \int_1^{\infty} F''(D)dD > -a + a \int_1^{\infty} \frac{D^{-4/3}}{3} dD = 0.$$

Dunque per $D \gg 1$ è $F'(D) > 0$ contro (68)₂ la cui validità è già stata assodata. Dunque vale la tesi VI.

Si osservi ora che, dato $D > 0$, per (59) e (84) $F(D) + 3a(D^{2/3} - 1)/2$ è il minimo assoluto di W sotto la condizione (60)₂ (tale minimo è assunto per $E_1 = E_2 = E_3$). Da ciò segue senz'altro la tesi VII.

Infine si ricordi che per S valgono (59) e (69)_{1,2}. Allora in base ai teoremi dimostrati in [4] n. 8, 9 e 10, se per S valgono le condizioni $\alpha)$, $b)$ e $c)$ di Tolotti, allora S gode delle proprietà $\alpha)$, $\beta)$ e $\gamma)$; inoltre, in base a quel che si è detto dopo il Teor. IV, per S vale anche la proprietà $\delta)$.

Viceversa dal n. 11 di [4] risulta che le $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ e $\delta)$ implicano le suddette $a)$, $b)$ e $c)$. Vale dunque la tesi VIII.

c. d. d.

11. Alcuni esempi connessi con le proprietà β), β') e δ). Possibile assenza di configurazione di equilibrio libero.

Dapprima discuto la tesi VI del Teor. VII. A tale scopo considero due esempi di un corpo verificante le condizioni 1), ..., 4) considerate nel Teor. V. In un caso particolare del primo esempio faccio qualche osservazione connessa con la proprietà statica δ). In un secondo caso, mostro che per il sistema considerato nel detto primo esempio valgono anche le proprietà α) e γ) di Tolotti, cosicchè, fra l'altro, vi è una configurazione d'equilibrio naturale. Posso pure mostrare che in tal caso entro un certo intervallo di valori di $D = V/V^*$, vale la proprietà β') e non la β).

Nel secondo esempio, il sistema che si considera è un solido ma non ha alcuna configurazione di equilibrio naturale (assomiglia ad un gas) inoltre è sempre dotato della proprietà β') e non sempre della β).

Dal secondo esempio appare, fra l'altro, come le condizioni 1), ..., 4) considerate nel Teor. V siano poco restrittive.

La configurazione C^* sia d'equilibrio naturale per il considerato sistema S , di potenziale W espresso (59). Se S è conforme a qualche corpo elastico naturale, in un intorno destro $V^* - V_1$ di V^* è da ritenersi $dp/dV \leq 0$.

Sia V' l'estremo superiore dei valori possibili per V_1 . V' segna un limite oltre il quale lo schema S probabilmente perde valore. Per la tesi VI del Teor. VII, V' è finito.

Si noti che in $V^* - V'$ può valere la proprietà β') — ossia $dp/dV < 0$ — senza che valga sempre la β). Ciò risulta da uno dei seguenti esempi fatti anche in vista di qualche osservazione sulla proprietà δ).

Consideriamo una funzione continua e positiva $f(D)$, definita per $D > 0$. Vi siano due costanti α e D_1 ($\alpha > 0$, $D_1 > 1/2$) per cui

$$(86) \quad f(D) = \frac{\alpha}{2} D^{-1/3} \quad \text{per} \quad 1/2 < D < D_1 \quad (\alpha > 0, D_1 > 1/2),$$

$$(87) \quad \lim_{D \rightarrow 0} D^2 f(D) = +\infty, \quad f(D) \geq 0 \quad \text{per} \quad 0 < D < 27.$$

Si assuma ora

$$(88) \quad F(D) = -a(D-1) + \int_1^D (D-D')f(D')dD' \quad (D > 0).$$

Risulta

$$(89) \quad F(1) = 0, \quad F'(1) = -a, \quad F''(D) = f(D) \quad (D > 0),$$

$$(90) \quad F''(D_1) = F''(1) + \int_1^{D_1} \frac{a}{2} D^{-4/3} dD =$$

$$= -a - \frac{3}{2} a(D_1^{-1/3} - 1) = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{3}{\sqrt[3]{D_1}} \right).$$

Per (86), (87)₂ e (89)₂ valgono le condizioni (69)_{1,3}. Da (87)₁ e (89)₃ segue [regola dell'Hôpital] che per $D \rightarrow 0^+$ anche $-DF'(D)$ e $F(D)/-\lg D$ tendono a $+\infty$. Dunque vale (70).

Sia S un sistema (omogeneo) di energia elastica isoterma W data da (59) e (88). Per (89)₂ — ossia (75) — C^* è d'equilibrio naturale per S [Teor. VII, tesi III]. S gode cioè della proprietà α) di Tolotti.

Per $D_1 = 27$, da (90) risulta $F''(D_1) = 0$. È poi facile riconoscere che nel caso $D_1 \geq 27$ risulta $F''(27) = 0$, e che inoltre, essendo $a > 0$ e valendo (87)₂, nel detto caso risulta pure $F''(D) > 0$ per $27 < D < D_1$. Allora in base al Teor. IV, tesi a) se $D_1 \geq 27$, per $D \geq 27$ il problema della trazione di un cilindro non ha senso (ossia per nessuna scelta delle E_1, E_2, E_3 , soddisfacente (61)₂ con $D \geq 27$, possono annullarsi due tensioni principali).

Consideriamo ora, come è lecito, il sotto-caso (del caso $D_1 > 27$) in cui esista un $D_2 > D_1$ con $F''(D_2) = f(D_2) < 0$ ed sia $F''(D) > 0$ per ogni $D > D_1$ — cosicchè per $D > D_1$ non vale la formula (72) su cui si è basata la deduzione di (69)₃ dalle condizioni 1), ..., 4) considerate nel Teor. V —. Allora in base al Teor. III, tesi c), in S , sotto opportuna deformazione per cui $D = D_2$ e in qualche opportuna direzione, la propagazione delle onde longitudinali è impossibile; quella delle trasversali è invece sempre possibile.

Consideriamo ora, come è lecito; il caso

$$(91) \quad D_1 = 8, \quad f(D) \geq 0 \quad \text{per } D > 0,$$

$$(92) \quad \int_8^{\infty} f(D) dD = a/4, \quad \lim_{D \rightarrow \infty} D^{5/3} f(D) = 0.$$

Per (90) e (92)₁ è $F'(+\infty) = F'(D_1) + a/4 = 0$, cosicchè in base a (91)₂ vale (69)₂. Poichè per S valgono (59), (69) e (70), S soddisfa le condizioni 1), ..., 4) considerate nel Teor. V.

Sappiamo che è $F'(+\infty) = 0$ e valgono (89)₃ e (92)₂. Allora applicando due volte la regola dell'Hôpital risulta

$$\lim_{D \rightarrow \infty} D^{2/3} F'(D) = 0, \quad \lim_{D \rightarrow \infty} D^{-1/3} F(D) = 0,$$

onde esistono due costanti positive D_3 e K , tali che per ogni $D > D_3$ riesce $F(D) < KD^{1/3}$. Quindi vale (77), cosicchè, in base alla tesi VI del Teor. VII, per S vale completamente la proprietà γ) di Tolotti.

Si noti che in base alla tesi VI del Teor. VII, la proprietà $\beta')$ non può valere per ogni $D > 1$. Però in base a (91)₁, (89)₃ e (86), per $1/2 < D < 1/8$ è $3F''(D) > aD^{-4/3}$, cosicchè nell'intervallo $1/2-8$ per S vale la proprietà $\beta')$ [Teor. IV, b].

Si osservi ora che per (91)₁, (86) e (90) nel medesimo intervallo è

$$DF'(D) = -aD - \frac{3a}{2} [D^{-1/3} - 1] = \frac{a}{2} \left[1 - \frac{3}{\sqrt[3]{D}} \right] D,$$

$$\frac{d}{dD} \left(D \frac{dF}{dD} \right) = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt[3]{D}} \right) < 0 \quad \text{per } 1/2 < D < 8.$$

Dunque nell'intervallo $1/2-8$ non vale mai la proprietà $\beta)$ di Tolotti (ossia è $d(-\delta')/d\delta < 0$ per $1/2 < D < 8$).

* * *

Sia S_2 un sistema (omogeneo) di potenziale elastico

$$(93) \quad W_2 = F_2(D) + aI_1 = f(D) + \frac{3}{2} ha(1 - D^{2/3}) + aI_1,$$

ove

$$(94) \quad h > 1, \quad a > 0, \quad \lim_{D \rightarrow 0^+} \varphi(D) = +\infty, \quad \varphi''(D) \geq 0$$

per $D > 0$,

$$(95) \quad \lim_{D \rightarrow 0^+} \varphi(D) = +\infty, \quad \varphi(D) \equiv 0 \quad \text{per } D > 1/2.$$

Per $(94)_2$ vale $(69)_1$. Per (93) è $F'_2(D) = \varphi'(D) - haD^{-1/3}$. Inoltre per $(94)_4$ e $(95)_2$ è $\varphi'(D) \leq 0$ ($D > 0$). Dunque $F'_2(D) < 0$ ($D > 0$), ossia $(69)_2$ vale per $F = F_2$.

Essendo poi $F''_2(D) = \varphi''(D) + haD^{-1/3}/3$, per $(94)_4$ è $F''_2(D) > 0$ ($D > 0$), ossia anche $(69)_3$ vale per $F = F_2$. Per (93) e $(95)_1$, (70) vale per $F = F_1$.

Dunque (59) , (69) e (70) valgono per $W = W_2$ e $F = F_2$. Allora per il Teor. V, S_1 soddisfa le condizioni 1), ..., 4) ivi considerate.

Da (68) e (93) segue $p = (h - 1)aD^{-1/3} - \varphi'(D)$. Inoltre si è visto che $\varphi'(D) \leq 0$ ($D < 0$). Allora p è sempre positiva. Di conseguenza S non possiede alcuna configurazione $\bar{C}$ di equilibrio libero.

Inoltre per $(94)_{1,2,4}$ p è una funzione di D sempre decrescente, ossia per S_1 la proprietà $\beta')$ vale sempre.

Da (93) , $(94)_{1,2}$ e $(95)_1$ segue che

$$DF'_2(D) = -haD^{2/3} + D\varphi'(D)$$

è funzione decrescente di D per ogni $D > 1/2$, cosicchè S_1 non verifica la condizione c) di Tolotti. Si osservi anzi che risultando $d[DF'(D)]/dD = -2haD^{-1/3}/3 < 0$ per $D > 1/2$, da (71) segue $d(-\delta')/d\delta < 0$ per $D > 1/2$, ossia S_1 non gode della proprietà $\beta)$ di Tolotti per $D > 1/2$.

Osservo ora che sebbene per S_2 $p(D)$ sia sempre > 0 come nei gas, tuttavia S_2 non è un fluido. Infatti, in base a (93) e (84), mantenendo D costante, W assume un minimo effettivo proprio, per $E_1 = E_2 = E_3$; dunque le forze interne possono fare lavoro non nullo per spostamenti isocori.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CATTANEO C.: *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità*. Rend. della Acc. dei Lincei Serie VIII. Vol. I. Roma 1946.
- [2] COLEMAN B. E NOLL W.: *On the Thermostatics of Continuous Media*. Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 4, N. 2, p. 97-128. Springer-Verlag.
- [3] SIGNORINI A.: *Lezioni di fisica matematica*. Roma 1952-53.
- [4] TOLOTTI C.: *Deformazioni elastiche finite: onde ordinarie di discontinuità e caso tipico di solidi elastici isotropi*. Rend. Sem. di Roma. Vol. IV, 1943 p. 34-59.
- [5] TRUESDELL C.: *General and exact theory of waves in finite elastic strain*. Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 8, N. 4, 1961, p. 263-296. Springer-Verlag.
- [6] TRUESDELL C. AND TOUPIN A.: *The Classical Field Theories*. Handbuch der Physik. Vol. III/1 Springer-Verlag, 1960.