

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Condizioni indipendenti ed equivalenti a quelle di mutua distributività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 33 (1963), p. 91-98

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__91_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__91_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CONDIZIONI INDIPENDENTI ED EQUIVALENTI A QUELLE DI MUTUA DISTRIBUTIVITÀ

*Nota ** di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)

Gli studi eseguiti precedentemente sull'interdipendenza delle $4\nu^2$ condizioni di mutua distributività (1), (2), (3), (4) (si veda il n.º 1) di un insieme B avente ν (≥ 2) elementi ([2] ¹⁾; [6], n.º 9) hanno permesso di determinare per ogni valore (non necessariamente finito) di $\nu \neq 3$, sottinsiemi di condizioni indipendenti ed equivalenti all'insieme delle $4\nu^2$ condizioni di mutua distributività di B . Nessuno di tali sottinsiemi era invece ancora noto nel caso $\nu = 3$, che presentava notevoli difficoltà, nonostante già si sapesse ([3]) che le 108 ($= 4 \cdot 3^3$) condizioni di mutua distributività dell'insieme $B = \{a, b, c\}$ non sono indipendenti.

Nel presente lavoro vengono appunto determinati sottinsiemi costituiti da condizioni indipendenti ed equivalenti alle 108 condizioni di mutua distributività dell'insieme $B = \{a, b, c\}$. Ciascuno dei sottinsiemi trovati (n.º 5) consta di 84 condizioni.

I. – Denotiamo con

M

^{*}) Pervenuta in Redazione il 30 giugno 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

¹⁾ I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

l'insieme delle 4^3 condizioni di mutua distributività ([2], n.º 1):

$$(1) \quad x(y + z) = (xy) + (xz),$$

$$(2) \quad (x + y)z = (xz) + (yz),$$

$$(3) \quad x + (yz) = (x + y)(x + z),$$

$$(4) \quad (xy) + z = (x + z)(y + z)$$

di un insieme B avente numero cardinale v ($x, y, z \in B$). Le quattro eguaglianze (1), (2), (3), (4) verranno (per brevità) denotate rispettivamente con i simboli

$$(5) \quad 1(x, y, z), \quad 2(x, y, z), \quad 3(x, y, z), \quad 4(x, y, z).$$

Supporremo costantemente nel seguito $v = 3$, e denoteremo con a, b, c i tre elementi di B :

$$B = \{a, b, c\}.$$

Lo scopo del presente lavoro è quello di determinare almeno un sottinsieme di M (insieme delle 108 condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$) che sia indipendente ([4], n.º 1) ed equivalente ([4], n.º 1) ed M .

Se R_0 è il sottinsieme di M definito all'inizio del n.º 2 di [6], poniamo:

$$M_0 = R_0 \cup 1[a, b, c] \cup 2[a, b, c] \cup 4[a, b, c] \cup 3[a, b, c],$$

ricordando il significato del simbolo $i[x', y', z']$, detto nel n.º 1 di [6]. Il sottinsieme M_0 di M , così definito, consta di 60 condizioni.

Salvo avviso in contrario, conserviamo nel seguito tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1] e in [2].

2. - Dimostriamo anzitutto che:

I) *La terna (a, b, c) è (1)-isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (2, 3, 4)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* $B = \{a, b, c\}$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

$$(6) \quad \begin{array}{c|ccc} \div & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & b \\ c & a & b & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$$

E invero, qualunque siano $x, y, z \in B = \{a, b, c\}$, (1):

$$\begin{aligned} a(b \div c) &= ab = a, \quad (ab) \div (ac) = a \div c = c; \quad a(y + y) = ay, \\ (ay) \div (ay) &= ay; \quad a(a + b) = ab = a, \quad (aa) + (ab) = a + a = a; \\ a(a \div c) &= ac = c, \quad (aa) + (ac) = a + c = c; \quad a(b + a) = ab = a, \\ (ab) \div (aa) &= a + a = a; \quad a(c + a) = aa = a, \quad (ac) + (aa) = \\ &= c + a = a; \quad a(c + b) = ab = a, \quad (ac) + (ab) = c + a = a; \\ b(y \div z) &= b, \quad (by) + (bz) = b + b = b; \quad c(y + z) = c, \quad (cy) + (cz) = \\ &= c + c = c; \quad (2): \quad (x + y)a = x + y, \quad (xa) + (ya) = x + y; \\ (x \div y)b &= x + y, \quad (xb) + (yb) = x + y; \quad (x + x)c = xc, \quad (xc) + \\ &+ (xc) = xc; \quad (a \div b)c = bc = b, \quad (ac) + (bc) = c + b = b; \quad (a \div c)c = \\ &= cc = c, \quad (ac) + (cc) = c + c = c; \quad (b + y)c = bc = b, \quad (bc) + (yc) = \\ &= b + (yc) = b; \quad (c + a)c = ac = c, \quad (cc) + (ac) = c + c = c; \\ (c + b)c &= bc = b, \quad (cc) + (bc) = c + b = b; \quad (3): \quad a + (yz) = yz, \\ (a + y)(a \div z) &= yz; \quad b \div (yz) = b, \quad (b + y)(b \div z) = bb = b; \\ c + (yz) &= yz, \quad (c + y)(c + z) = yz; \quad (4): \quad (xy) + b = b, \quad (x + b)(y + b) = \\ &= bb = b; \quad (by) + z = b + z = b, \quad (b + z)(y + z) = b(y + z) = b; \\ (xx) + z &= x + z, \quad (x + z)(x + z) = x + z; \quad (ac) + c = c + c = c, \\ (a + c)(c \div c) &= cc = c; \quad (ca) + a = c + a = a, \quad (c + a)(a + a) = \\ &= aa = a; \quad (ab) \div a = a + a = a, \quad (a + a)(b + a) = ab = a; \\ (ac) + a &= c + a = a, \quad (a + a)(c + a) = aa = a; \quad (ca) + c = \\ &= c + c = c, \quad (c + c)(a + c) = cc = c; \quad (cb) + c = c + c = c, \\ (c + c)(b + c) &= cb = c; \quad (ab) + c = a + c = c, \quad (a + c)(b + c) = \\ &= cb = c; \quad (cb) + a = c + a = a, \quad (c + a)(b + a) = ab = a. \end{aligned}$$

II) Fissata una qualunque condizione di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ appartenente ad M_0 (n.º 1), esiste un bisistema di sostegno B nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività di B vi sono invece soddisfatte.

Infatti, se la condizione fissata appartiene ad R_0 , la cosa è già nota ([6], n.º 2, II)). Esaminiamo dunque le condizioni di $M_0 - R_0$. E invero, vale la I); e dalla I) segue che la terna (c, b, a) è (2)-isolata nel bisistema, (1, 3, 4)-distributivo, opposto di quello definito dalle tabelle (6) (in virtù del lemma 13 di [1], pp. 22, e del lemma 2 di [2], p. 43). La terna (c, b, a) è allora (4)-isolata nel bisistema, (1, 2, 3)-distributivo, duale del precedente; mentre la terna (a, b, c) è (3)-isolata nel bisistema, (1, 2, 4)-distributivo, duale di quello definito dalle tabelle (6) (in virtù del lemma 2 di [5], n.º 2). Opportune immagini isomorfe dei quattro bisistemi sopra considerati sono gli ulteriori bisistemi la cui esistenza è affermata dalla II) (cfr. [1], n.º 2).

III) *Se un sottinsieme M' di M (insieme delle 108 condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$) è indipendente ed equivalente ([4], n.º 1) ad M , allora M' deve necessariamente contenere M_0 (n.º 1, penult. capov.):*

$$M' \supseteq M_0.$$

Infatti, se M' non contiene una condizione di M_0 , la II) implicherebbe che M' non è equivalente ad M , contro l'ipotesi.

3. — Ricordando alcune posizioni fatte, per comodità espositiva, nel n.º 1 del presente lavoro e nel n.º 3 di [6], dimostriamo adesso che:

IV) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(a, a, b)$ non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte $1(a, b, a)$ e tutte le condizioni della classe $M_0 \cup P''_{..} \cup Q'_{..}$ (n.º 1; [6], n.º 3).*

Infatti, supponiamo che un bisistema la cui esistenza è negata dalla IV) esista, chiamiamolo B^* ; e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Possiamo, fortunatamente, limitarci alla revisione della dimostrazione della XIII), fatta nel n.º 4 di [6], cambiando soltanto in quei punti in cui è sfruttata la validità di una delle due condizioni

$$3(a, b, a), \quad 4(a, b, a)$$

(che non appartengono alla classe $M_0 \cup P''_{1,1} \cup Q'_{1,1}$). Ebbene, rileggendo la suddetta dimostrazione della XIII), si vede che tutti i casi e sottocasi ivi considerati vanno bene anche attualmente, ad eccezione dei tre qui sotto modificati.

3_{2,1}) Va bene fino all'eguaglianza $ac = c$. Ma allora $1(a, c, b)$ implica $a = ab = a(c + b) = (ac) + (ab) = c + a = c$, il che è assurdo.

3₃) Va bene fino all'eguaglianza $b + a = a$. Allora $3(b, a, a)$, $4(b, b, a)$ implicano risp.

$$b + c = c, \quad bb = c,$$

quindi $2(a, b, c)$, $2(b, a, c)$, $1(b, c, a)$ comportano successivamente $bc \neq a$,

$$bc = b, \quad ba = b,$$

e perciò $1(b, a, b)$ implica $b = bc = b(a + b) = (ba) + (bb) = b + c = c$, il che è assurdo.

7) I due sottocasi 7₁) e 7₂) (v. [3], pp. 60-61) vanno bene, (tenuto conto dell'osservazione fatta in [6]).

7₃) (v. [3], p. 61). Va bene fino all'eguaglianza $a + b = a$. Allora $2(a, b, a)$, $3(a, b, b)$ implicano risp.

$$ba = b, \quad bb = b,$$

e perciò $2(b, b, b)$ comporta $b + b \neq a$. Quindi poichè $1(b, a, a)$ implica

$$bc = b + b,$$

risulta pure $bc \neq a$. Ne segue, per la $3(a, b, c)$, $bc = c$, quindi

$$b + b = c,$$

e perciò $1(b, a, b)$ comporta $b = ba = b(a + b) = (ba) + (bb) = b + b = c$, il che è assurdo.

V) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(a, b, a)$ non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte $1(a, a, b)$ e tutte le condizioni della classe $M_0 \cup Q''_{1,1} \cup P'_{1,1}$ (n.º 1; [6], n.º 3).*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, chiamiamolo B^0 , i suoi gruppoidi additivo e moltiplicativo non potrebbero essere opposti (v. [6], n.º 4, ult. capov.); dunque esisterebbe il bisistema α -opposto di questo B^0 , il quale (per il lemma 1 di [5], n.º 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla precedente IV).

4. – Se u, v sono due qualsiasi elementi *distinti* di $B = \{a, b, c\}$, con procedimento e ragionamenti perfettamente analoghi a quelli del n.º 5 di [6] (ove si partiva dalle proposizioni XIII) e XIV)), si ottengono dalle precedenti proposizioni IV) e V) le seguenti quattro altre.

VI) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(u, u, v)$ (risp. $2(u, v, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte $1(u, v, u)$ (risp. $2(v, u, v)$) e tutte le condizioni della classe $M_0 \cup P''_{uv} \cup Q'_{uv}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v; u, v \in B$.)*

VII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $3(u, u, v)$ (risp. $4(u, v, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte $3(u, v, u)$ (risp. $4(v, u, v)$) e tutte le condizioni della classe $M_0 \cup P'_{uv} \cup Q''_{uv}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v; u, v \in B$.)*

VIII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(u, v, u)$ (risp. $2(v, u, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte $1(u, u, v)$ (risp. $2(u, v, v)$) e tutte le condizioni della classe $M_0 \cup Q''_{uv} \cup P'_{uv}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v; u, v \in B$.)*

IX) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $3(u, v, u)$ (risp. $4(v, u, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte $3(u, u, v)$ (risp. $4(u, v, v)$) e tutte le condizioni delle classe $M_0 \cup Q'_{uv} \cup P''_{uv}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v; u, v \in B$.)*

5. – Se u, v sono due qualsiasi elementi *distinti* di $B = \{a, b, c\}$, denotiamo con

$$K_{uv}$$

uno qualunque dei due insiemi seguenti (costituiti, ciascuno, da

otto condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$:

$$(7) \quad P'_{ur} \cup P'_{ru} \cup Q''_{ur} \cup Q''_{ru},$$

$$(8) \quad P''_{ur} \cup P''_{ru} \cup Q'_{ur} \cup Q'_{ru}$$

([6], n.º 3).

Si osservi che

$$K_{ur} \subset R_{ur},$$

dove R_{uv} è il sottinsieme di $M - M_0$ (n.º 1) definito nel n.º 7 di [6] (1º capov.). R_{uv} non è poi altro che la riunione dei due insiemi (disgiunti) (7) e (8).

X) *Fissata una qualsiasi delle (otto) condizioni costituenti l'insieme K_{uv} (questo n.º, 1º capov.), esiste un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre vi sono invece soddisfatte sia le (sette) condizioni di K_{uv} diverse da quella fissata, sia tutte le condizioni di $M - R_{uv}$ (questo n.º, 2º capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)*

Infatti, se $(u, v) = (a, b)$, un tale bisistema è quello fornito dalla IV) di [6] (n.º 2), oppure è l'opposto di questo ([1], pp. 22, lemma 13, [2], p. 43, lemma 2), oppure è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti due mediante $a \longrightarrow b, b \longrightarrow a, c \longrightarrow c$ (cfr. [1], n.º 2), oppure è uno dei duali dei precedenti quattro ([5], n.º 2, lemma 2). Se $(u, v) \neq (a, b)$, un tale bisistema è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti otto mediante la corrispondenza biunivoca di B su sé stesso in cui $a \longrightarrow u, b \longrightarrow v$.

XI) *Se in un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ sono soddisfatte sia le condizioni costituenti l'insieme M_0 (n.º 1), sia le (otto) condizioni costituenti l'insieme K_{uv} (questo n.º, 1º capov.), allora, in questo bisistema, sono pure soddisfatte le (otto) condizioni di $R_{uv} - K_{uv}$ (questo n.º, 2º capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)*

Infatti, questa proposizione XI) è conseguenza delle proposizioni del n.º 4.

TEOREMA: *Sia M l'insieme delle 108 condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ (n.º 1). Si scelgano uno qualsiasi dei due insiemi K_{uv} (si veda il 1º capoverso di questo n.º 5), uno*

qualsiasi dei due insiemi K_{ac} ed uno qualsiasi dei due insiemi K_{bc} . Le (ventiquattro) condizioni costituenti i tre insiemi così scelti e le (sessanta) condizioni costituenti l'insieme M_0 (n.º 1) formano, complessivamente, un sottinsieme, M' , di M indipendente ed equivalente ([4], n.º 1) ad M .

Dimostrazione: L'indipendenza di M' è provata dalle due proposizioni II), X) (n.º 2, 5); l'equivalenza di M' ad M è provata dalla proposizione XI) (n.º 5).

I sottinsiemi M' di M determinati mediante il teorema precedente sono evidentemente otto, e ciascuno di essi è formato da 84 condizioni.

Uno di questi otto sottinsiemi M' di M è, ad es., il seguente ([6], n.º 1, 2): $1[a, b, a] \cup 2[a, b, a] \cup 4[b, a, a] \cup 3[a, a, b] \cup M_0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.
- [2] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.
- [3] BOCCIONI D.: *Dipendenza delle condizioni di mutua distributività nei bisistemi di ordine 3*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 50-67.
- [4] BOCCIONI D.: *Condizioni di distributività ed associatività unilaterali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 30 (1960), pp. 178-193.
- [5] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di doppia e di tripla distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 33 (1963).
- [6] BOCCIONI D.: *Condizioni di mutua distributività con ripetizioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 33 (1963).