

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

TOMASO MILLEVOI

**Immersione di un anello in uno « minimale
» dotato di unità**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 33 (1963), p. 85-90

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__85_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IMMERSIONE DI UN ANELLO IN UNO « MINIMALE » DOTATO DI UNITÀ

*Nota *) di TOMASO MILLEVOI (a Padova) **)*

È noto ¹⁾ che ogni anello A può essere immerso in uno A_1 dotato di unità; dirò che A_1 è « minimale » se soddisfa alla seguente condizione: ogniqualvolta A sia immerso in un anello R_1 con unità, R_1 contenga un sottoanello con unità R_1^* contenente A , di cui A_1 sia immagine omomorfa.

$$(R_1 \supset A) \Rightarrow \{ \exists R_1^* : (R_1 \supset R_1^* \supset A) , \quad (R_1^* \rightarrow A_1 \rightarrow O) \} .$$

Mi propongo di trovare condizioni per l'esistenza di un siffatto A_1 e di indicarne, sotto tali condizioni, una costruzione canonica.

1. - Sia dato un anello A ; atteggiamo ²⁾ ad anello l'insieme $A \times Z$ (Z essendo l'anello degli interi) con le:

$$\begin{aligned} (\alpha, n) + (\beta, m) &= (\alpha + \beta, n + m) \\ (\alpha, n) \cdot (\beta, m) &= (\alpha\beta + m\alpha + n\beta, nm) \end{aligned}$$

*) Pervenuta in redazione il 30 giugno 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

¹⁾ Cfr. ad es. U. MORIN, *Algebra Astratta*; CEDAM, 1955; pag. 185; oppure N. JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*. Vol. I^o, 1951; pag. 84; oppure N. BOURBAKI IV, Livre II, *Algèbre*. Ch. 1: « Structures algébriques » 3^e éd. pag. 132.

²⁾ Idem.

$(\alpha, \beta \in A; m, n \in Z; m\alpha = \alpha + \dots + \alpha$, somma di m addendi uguali ad α).

$A \times Z$ risulta quindi un anello dotato di unità e contenente un sottoanello isomorfo ad A , precisamente l'insieme delle coppie $(\alpha, 0)$.

2. - Consideriamo l'insieme Σ degli elementi di Z così definito:

$$n \in \Sigma = \exists v \in A : n\alpha = v\alpha = \alpha v \quad \text{per ogni} \quad \alpha \in A.$$

Σ non è vuoto poichè contiene almeno lo zero; esso risulta inoltre un ideale di Z , infatti:

$$\begin{aligned} n, m \in \Sigma &\Rightarrow \exists v, \mu : \\ n\alpha &= v\alpha = \alpha v \\ m\alpha &= \mu\alpha = \alpha\mu \\ (m - n)\alpha &= (\mu - v)\alpha = \alpha(\mu - v) \Rightarrow m - n \in \Sigma; \\ r \in Z &\Rightarrow (rn)\alpha = r(n\alpha) = r(v\alpha) = r(\alpha v) = \\ &= (rv)\alpha = \alpha(rv) \Rightarrow rn \in \Sigma. \end{aligned}$$

Essendo Z anello ad ideali principali, Σ è generato da un elemento $s \geq 0$:

$$\Sigma = (s).$$

$$(i) \quad s \in \Sigma \Rightarrow \exists \sigma : s\alpha = \sigma\alpha = \alpha\sigma.$$

Se $s = 0$, prendiamo $\sigma = 0$.

3. - Consideriamo, in $A \times Z$ l'ideale principale sinistro generato dall'elemento $(\sigma, -s)$. Essendo σ commutabile con ogni elemento di A , tale ideale coincide con l'ideale destro generato dall'elemento stesso.

Nell'omomorfismo φ di $A \times Z$ sull'anello dei residui $(A \times Z)/[(\sigma, -s)]$ il sottoanello di $A \times Z$ isomorfo ad A è trasformato in un sottoanello di $(A \times Z)/[(\sigma, -s)]$ ancora isomorfo ad A . Infatti

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, 0) = 0 &\Rightarrow (\alpha, 0) = (\beta, m) \cdot (\sigma, -s) \Rightarrow \\ &(-ms = 0), (\beta\sigma - s\beta + m\sigma = \alpha) \Rightarrow [(m = 0) \vee (s = 0)]; \end{aligned}$$

$$(m = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta\sigma - s\beta + m\sigma = m\sigma = 0)$$

$$(s = 0) \Rightarrow (\sigma = 0) \Rightarrow (\alpha = m\sigma = 0).$$

Quindi in ogni caso $[\varphi(\alpha, 0) = 0] \Rightarrow \alpha = 0$.

L'anello $(A \times Z)/[(\sigma, -s)]$, ovviamente dotato di unità, contiene quindi un sottoanello isomorfo ad A .

4. - Supponiamo che si verifichi uno dei due casi

a) $s = 0$

b) $s \neq 0$, ma esista un solo σ associato ad s nella (i).

In queste ipotesi l'anello $A_1 = (A \times Z)/[(\sigma, -s)]$ è minimale. Infatti

$$a) \text{ se } s = 0, \quad \sigma = 0 \quad \text{ed} \quad A_1 \cong A \times Z.$$

Sia $R_1 \supset A$, consideriamo il sottogruppo additivo generato (per somma) in R_1 dal sistema i cui elementi sono quelli di A e l'unità. Tale sottogruppo risulta ovviamente un sottoanello R_1^* contenente A . Ogni elemento di R_1^* può esprimersi (in R_1) come somma di un elemento di A e di un multiplo intero dell'unità.

$$t \in R_1^* \Leftrightarrow t = \alpha + n.$$

D'altra parte questa rappresentazione è unica, infatti

$$\begin{aligned} (\alpha + n = \beta + m) &\Leftrightarrow (\alpha - \beta = m - n) \Rightarrow (m - n \in \Sigma) \Rightarrow \\ (m - n = 0) &\Rightarrow (\alpha - \beta = 0) \Leftrightarrow (\alpha = \beta, m = n). \end{aligned}$$

Si verifica quindi immediatamente che R_1^* è isomorfo (canonicamente) ad $A \times Z$.

b) L'unicità di σ equivale, in questo caso, alla non esistenza in A di elementi che siano simultaneamente annichilatori destri e sinistri; sia infatti ε un siffatto elemento, allora evidentemente

$$s\alpha = \sigma\alpha = \alpha\sigma = (\sigma + \varepsilon)\alpha = \alpha(\sigma + \varepsilon).$$

Viceversa se ad s sono associati entrambi gli elementi σ' e σ'' , $(\sigma' - \sigma'')$ è annichilatore sia destro che sinistro di A .

Sia $R_1 \supset A$, consideriamo, come nel caso precedente il sottoanello $R_1^* \supset A$.

$$t \in R_1^* \Leftrightarrow t = \alpha + n.$$

Consideriamo l'applicazione φ (canonica): $(A \times Z) \rightarrow R_1^*$ così definita $\varphi(\alpha, n) = \alpha + n$. φ risulta di più un omomorfismo suriettivo. Il nucleo di φ risulta composto da quegli elementi $(\varrho, -r)$ tali che $\varrho = r$ in R_1^* . r appartiene quindi a Σ ed è multiplo di s : $r = qs$; ϱ , per l'assenza di annichilatori, è uguale quindi a $q\sigma$ e si ha $(\varrho, -r) = q(\sigma, -s) \in [(\sigma, -s)]$. Il nucleo di φ è quindi contenuto in $[(\sigma, -s)]$.

Si ha allora che

$$R_1^*/\varphi[(\sigma, -s)] \cong (A \times Z)/[(\sigma, -s)] = A_1.$$

5. - Nelle ipotesi *a)* o *b)* del n. 4 l'anello A_1 ha la stessa caratteristica k di A .

Se $s = 0$ la cosa è evidente.

Osserviamo che $k \in \Sigma$ in quanto $k\alpha = 0\alpha = \alpha 0$. Quindi k è multiplo di s : $k = rs$. D'altra parte al numero rs è associato $r\sigma$ e (nell'ipotesi *b)*) $r\sigma$ soltanto, per l'assenza di annichilatori. Ne consegue che $r\sigma = 0$. All'ideale $[(\sigma, -s)]$ appartiene anche l'elemento $(0, -r) \cdot (\sigma, -s) = (-r\sigma, rs) = (0, k)$, la qual cosa assicura che la caratteristica di A_1 non è superiore a k . D'altra parte A_1 , contenendo un sottoanello isomorfo ad A non può avere caratteristica inferiore ad A , il che prova l'asserto.

6. - Pur non essendo verificate nè l'ipotesi *a)* nè la *b)*, se tra gli associati di s c'è lo 0, convenendo di scegliere $\sigma = 0$, otteniamo, col procedimento del n. 3, un anello della medesima caratteristica di A . Ciò risulta evidente non appena si osservi che in questo caso la caratteristica è uguale ad s .

7. - Nel caso che A sia finito, se esiste un anello minimale A_1 , esso è, ovviamente, individuato (a meno di isomorfismi). Altrettanto non si può dire in generale.

Sia ad esempio $A = \bigtimes_{i=1}^{\infty} Z_i$, l'anello delle successioni di numeri

interi, dove gli elementi si sommano e si moltiplicano per colonna. A è dotato di unità ed è quindi un A_1 . Se consideriamo ora l'anello $B_1 = Z/(2) \oplus A$, B_1 contiene un sottoanello isomorfo ad A , ed è anche immagine omomorfa di A_1 nell'omomorfismo proprio φ che manda il primo fattore diretto Z di A_1 su $Z/(2)$ e l' n -esimo fattore Z nell'($n-1$)-esimo con l'identità.

B_1 è quindi anch'esso minimale per A , ma A_1 e B_1 non sono isomorfi.

3. - Verifichiamo che, se non sussiste alcuna delle condizioni *a*), *b*) del n. 4, può non esistere un anello minimale per A .

Nell'anello $Z/(12)$ delle classi modulo dodici consideriamo il sottoanello (ideale) dei pari. Esso è un anello A composto da sei elementi: $\bar{0} \ \bar{2} \ \bar{4} \ \bar{6} \ \bar{8} \ \bar{10}$, privo di unità e dotato di un annichilatore proprio, il $\bar{6}$. Con riferimento al n. 2, $\Sigma = (2)$. Al 2 però sono associati due elementi, il $\bar{2}$ e l' $\bar{8}$.

L'anello $(A \times Z)/[(\bar{2}, -2)]$ è isomorfo a $Z/(12)$, e nell'omomorfismo $\varrho: A \times Z \rightarrow Z/(12)$ l'immagine di A è proprio il sottoanello dei pari.

L'anello $B_1 = (A \times Z)/[(\bar{8}, -2)]$ è composto dagli elementi

$$\begin{array}{cccccc} \bar{0} & 1^* & 2^* = \bar{8} & 3^* = \bar{8} + 1^* & 4^* = \bar{4} & 5^* = \bar{4} + 1^* \\ \bar{2} & \bar{2} + 1^* & \bar{10} & \bar{10} + 1^* & \bar{6} & \bar{6} + 1^* \end{array}$$

dove n^* indica la classe dei resti modulo 6 cui n appartiene, $\bar{m}$ indica $\Psi(\bar{m}, 0)$ e $1^* = \Psi(0, 1)$, essendo Ψ l'omomorfismo naturale di

$$A \times Z \rightarrow (A \times Z)/[(\bar{8}, -2)];$$

dove inoltre somme e prodotti si eseguono tenendo conto della commutatività, delle relazioni già scritte e del fatto che 1^* è unità.

In $Z/(12)$, A ammette due sole unità locali, precisamente $\bar{1}$ e $\bar{7}$. Il sottoanello generato da A e $\bar{1}$ e quello generato da A e $\bar{7}$ (in $Z/(12)$) coincidono con $Z/(12)$.

In B_1 , A ammette pure due unità locali, 1^* e $1^* + \bar{6}$. Anche

qui i due sottoanelli generati da A e 1^* , e da A e $1^* + \bar{6}$ coincidono con B_1 .

Se esistesse un A_1 questo dovrebbe essere immagine omomorfa e di $Z/(12)$ e di B_1 . $Z/(12)$ è di caratteristica 12, B_1 di caratteristica 6, A di caratteristica 6. A_1 dovrebbe essere quindi di caratteristica 6. $Z/(12)$ e B_1 hanno lo stesso numero di elementi e quindi B_1 non può essere immagine omomorfa di $Z/(12)$, e quindi non è minimale. Un eventuale A_1 non è quindi isomorfo a B_1 . L'omomorfismo suriettivo $\varphi: B_1 \rightarrow A_1$ dovrebbe quindi esser proprio (con nucleo non nullo), ciò implica che A_1 dovrebbe avere al più 6 elementi, il che è palesemente assurdo in quanto A ha 6 elementi.

9. - Come del resto già mostra l'esempio del n. 8, non è detto che risulti spontaneo l'imporre ad un $R_1 \supset A$ la medesima caratteristica di A .

Se consideriamo, ad esempio, il sottoanello A dei pari nell'anello $Z/(8)$, A risulta di caratteristica 4. $\Sigma = (2)$, al 2 sono associati $\bar{2}$ e $\bar{6}$ essendo il $\bar{4}$ un annichilatore. $\bar{2}$ e $\bar{6}$ hanno entrambi (interpretando A come gruppo additivo) ordine 4 e quindi

$$(A \times Z)/[(\bar{2}, -2)] \quad \text{e} \quad (A \times Z)/[(\bar{6}, -2)]$$

sono di caratteristica 8, ed entrambi isomorfi a $Z/(8)$. Un anello R_1 di caratteristica 4 che contenga A contiene invece un sottoanello, quello generato da A e dall'unità, isomorfo a $(A \times Z)/[(\bar{0}, -4)]$, composto da 16 elementi.