

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Condizioni di mutua distributività con ripetizioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 33 (1963), p. 60-84

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__60_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__60_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CONDIZIONI DI MUTUA DISTRIBUTIVITÀ CON RIPETIZIONI

*Nota *) di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)*

Se per tre elementi x, y, z di un insieme B , avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geq 2$, vale almeno una delle eguaglianze $x = y, y = z, z = x$, la terna (ordinata) (x, y, z) viene detta una terna con ripetizioni.

Le eguaglianze che si ottengono dalle seguenti quattro:

$$\begin{aligned}x(y + z) &= (xy) + (xz), & (x + y)z &= (xz) + (yz), \\x + (yz) &= (x + y)(x + z), & (xy) + z &= (x + z)(y + z),\end{aligned}$$

in corrispondenza a tutte le terne con ripetizioni (x, y, z) di elementi di B , vengono dette condizioni di mutua distributività con ripetizioni di B , e il loro insieme viene denotato con R .

Era già noto da precedenti lavori ([1]¹⁾ e [2]) che le condizioni di R non sono indipendenti (si veda, ad es., l'introduzione di [5]) se $\nu = 2$, e che sono indipendenti se $\nu \geq 4$.

Nel presente lavoro si dimostra che le condizioni di R non sono indipendenti neanche per $\nu = 3$, e si determinano, in entrambi i casi $\nu = 2$ e $\nu = 3$, tutti i sottoinsiemi di R indipendenti ed equivalenti ad R .

*) Pervenuta in Redazione il 25 giugno 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

¹⁾ I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

La situazione incontra nel caso $\nu = 3$ è notevolmente complessa: i sottinsiemi indipendenti ed equivalenti ad R (che consta di 84 condizioni) sono 64000, e ciascuno di essi è formato da 72 condizioni (n.º 8, teor. 1).

Se $\nu = 2$, R coincide con l'insieme delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività di B ([2]), ed ogni sottinsieme indipendente ed equivalente ad R è formato da 12 condizioni (n.º 9, teor. 2).

1. - Denotiamo con

M

l'insieme delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività ([2], n.º 1):

- (1) $x(y + z) = (xy) + (xz)$,
- (2) $(x + y)z = (xz) + (yz)$,
- (3) $x + (yz) = (x + y)(x + z)$,
- (4) $(xy) + z = (x + z)(y + z)$

di un insieme B avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geq 2$ ($x, y, z \in B$). Le quattro eguaglianze (1), (2), (3), (4) verranno (per brevità) denotate rispettivamente con i simboli

$$(5) \quad 1(x, y, z), \quad 2(x, y, z), \quad 3(x, y, z), \quad 4(x, y, z).$$

e si diranno *relative* alla terna (ordinata) (x, y, z) di elementi di B .

Se vale una almeno delle tre eguaglianze $x = y$, $y = z$, $z = x$, la terna (x, y, z) si dirà una terna *con ripetizioni*. Denoteremo con

R

l'insieme costituito dalle eguaglianze (1), (2), (3), (4) relative a tutte le terne con ripetizioni di elementi di B . L'insieme R è dunque un sottinsieme di M , e coincide con M se, e solo se, $\nu = 2$.

Le eguaglianze costituenti R si diranno *condizioni di mutua distributività con ripetizioni* di B .

Lo scopo del presente lavoro è di determinare tutti quei sottoinsiemi, R' , di R che sono indipendenti ([4], n.º 1) ed equivalenti ([4], n.º 1) ad R . Restano, a tal fine, da esaminare soltanto i due casi $\nu = 2$, $\nu = 3$, poiché già sappiamo ([2], n.º 1, teor. 1) che:

I) *Se il numero cardinale ν di un insieme B è ≥ 4 , l'insieme R , delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni di B , è indipendente* ([4], n.º 1).

Fissiamo tre elementi distinti a, b, c dell'insieme B , l'ultimo dei quali, c , presentandosi soltanto se $\nu > 2$. Con B^3 denotiamo l'insieme di tutte le ν^3 terne (ordinate) di elementi di B .

Pensiamo B^3 suddiviso nelle classi, a due a due disgiunte, delle quali si parla nel n.º 2 di [1]. Ognuna di queste classi verrà chiamata un *tipo* (di B^3), ed il simbolo

$$[x, y, z]$$

denoterà il tipo contenente la terna (x, y, z) . I tipi sono cinque se $\nu > 2$, quattro se $\nu = 2$.

Inoltre, se x', y', z' sono elementi di B , il simbolo

$$i[x', y', z']$$

denoterà l'insieme di tutte le eguaglianze $i(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in [x', y', z']$. ($i = 1, 2, 3, 4$.)

Salvo avviso in contrario, conserviamo nel seguito tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1] e in [2].

2. — Esaminiamo dapprima il caso $\nu = 3$, lo studio del quale occuperà la maggior parte del seguito (n.º 2-8). Poniamo (n.º 1):

$$R_0 = 1[a, a, a] \cup 2[a, a, a] \cup 4[a, a, a] \cup 3[a, a, a] \cup \\ 1[b, a, a] \cup 2[a, a, b] \cup 4[a, a, b] \cup 3[b, a, a],$$

ed osserviamo che:

II) *Fissata una qualunque condizione di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ appartenente ad R_0 , esiste un bisistema di*

sostegno B nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività di B vi sono invece soddisfatte.

Infatti, esistono ([2], n.º 3, punti 1º e 3º) due bisistemi (2, 3, 4)-distributivi ([2], p. 42) di sostegno $B = \{a, b, c\}$ in cui risp. sono (1)-isolate ([2], p. 42) le terne (a, a, a) , (b, a, a) ; le terne (a, a, a) , (a, a, b) sono allora ([1], p. 22, lemma 13, [2], p. 43, lemma 2) (2)-isolate risp. nei due bisistemi, (1, 3, 4)-distributivi, opposti dei due precedenti; le terne (a, a, a) , (b, a, a) sono ([5], n.º 2, lemma 2) (3)-isolate risp. nei due bisistemi, (1, 2, 4)-distributivi, duali dei due considerati all'inizio; infine le terne (a, a, a) , (a, a, b) sono ([5], n.º 2, lemma 2) (4)-isolate risp. nei due bisistemi, (1, 2, 3)-distributivi, duali dei due considerati in secondo luogo. Opportune immagini isomorfe degli otto bisistemi ora considerati sono i residui bisistemi la cui esistenza è affermata dalla II) (cfr. [1], n.º 2).

III) $1(a, a, b)$ e $1(a, b, a)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

	+	a	b	c		·	a	b	c
(6)		a	b	a		a	b	a	b
		b	b	b		b	b	b	b
		c	c	b		c	b	b	b

IV) $1(a, a, b)$ e $2(a, b, a)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

	+	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		·	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	
(7)		<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>		<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
		<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>		<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
		<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>		<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>

come agevolmente si verifica (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

V) $1(a, a, b)$ e $4(a, b, a)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

(8)	$+$	a	b	c	$\cdot$	a	b	c
		a	b	c		a	b	c
		b	c	b		b	b	b
		c	c	b		c	c	c

VI) $1(a, a, b)$ e $3(a, b, a)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è, ad es., il μ -opposto del duale del bisistema definito dalle tabelle (8) (in virtù dei lemmi 2 e 3 di [5], n.º 2).

VII) $1(a, a, b)$ e $3(a, a, b)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

(9)	$+$	a	b	c	$\cdot$	a	b	c
		a	a	c		a	a	c
		b	b	b		b	b	b
		c	c	c		c	c	c

VIII) $1(a, a, b)$ e $4(a, b, b)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle tabelle (18) di [1], p. 27 (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

IX) $1(a, b, a)$ e $4(a, b, a)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è ad es. ([5], n.º 2, lemma 1) l' α -opposto di quello definito dalle precedenti tabelle (9).

X) $1(a, b, a)$ e $3(b, a, b)$ sono le uniche due condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B .

Infatti, un tale bisistema è ad es. ([5], n.º 2, lemma 1) l'α-opposto di quello definito dalle tabelle (18) di [1], p. 27.

3. – Pensiamo ripartite le condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non appartenenti ad R_0 (n.º 2), cioè le condizioni di $R - R_0$, in dodici classi ognuna costituita da quattro condizioni; precisamente poniamo (n.º 1):

$$P_{uv} = \{1(u, u, v), 2(v, u, u), 4(v, u, u), 3(u, u, v)\},$$

$$Q_{uv} = \{1(u, v, u), 2(u, v, u), 4(u, v, u), 3(u, v, u)\},$$

u, v essendo due qualsiasi elementi *distinti* di $B = \{a, b, c\}$.

XI) *Fissate comunque due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ appartenenti una alla classe P_{uv} e l'altra alla classe Q_{uv} , esiste un bisistema di sostegno B nel quale le due condizioni fissate non sono soddisfatte, mentre vi sono invece soddisfatte tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività con ripetizioni di B . ($u \neq v$; $u, v \in B$.)*

Infatti, se $(u, v) = (a, b)$, un tale bisistema è uno dei quattro forniti dalle III), IV), V), VI) (n.º 2), oppure ([1], p. 22, lemma 13, [2], p. 43, lemma 2) è uno degli opposti di questi quattro, oppure ([5], n.º 2, lemma 2) è uno dei duali dei precedenti otto; se $(u, v) \neq (a, b)$, un tale bisistema è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti sedici (cfr. [1], n.º 2) mediante la corrispondenza biunivoca di B su sé stesso in cui $a \longrightarrow u, b \longrightarrow v$.

Pensiamo ora ripartite le condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non appartenenti ad R_0 (n.º 2) in ventiquattro classi, ognuna costituita da due condizioni; precisamente poniamo (n.º 1):

$$P'_{uv} = \{1(u, u, v), 2(u, v, v)\},$$

$$P''_{uv} = \{4(u, v, v), 3(u, u, v)\},$$

$$Q'_{uv} = \{1(u, v, u), 2(v, u, v)\},$$

$$Q''_{uv} = \{4(u, v, u), 3(v, u, v)\},$$

u, v essendo due qualsiasi elementi *distinti* di $B = \{a, b, c\}$.

XII) Fissate comunque due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ appartenenti una alla classe P'_{uv} (risp. Q'_{uv}) e l'altra alla classe P''_{uv} (risp. Q''_{uv}), esiste un bisistema di sostegno B nel quale le due condizioni fissate non sono soddisfatte, mentre vi sono invece soddisfatte tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività con ripetizioni di B . ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti, per quanto riguarda P'_{uv} , P''_{uv} (risp. Q'_{uv} , Q''_{uv}), se $(u, v) = (a, b)$, un tale bisistema è uno dei due forniti dalle VII), VIII) (risp. IX), X)) del n° 2, oppure è uno degli opposti delle immagini isomorfe di questi due mediante $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow a$, $c \longrightarrow c$; se $(u, v) \neq (a, b)$, un tale bisistema è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti quattro mediante la corrispondenza biunivoca di B su sé stesso in cui $a \longrightarrow u$, $b \longrightarrow v$.

4. - Dimostriamo ora che:

XIII) Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(a, a, b)$ non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe $R_a \cup P''_{ab} \cup Q_{ab}$ (n.° 2, 3).

Infatti, supponiamo che B^0 sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ in cui $1(a, a, b)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$(10) \quad a(a \div b) \neq (aa) \div (ab),$$

e nel quale siano invece soddisfatte le condizioni della classe $R_a \cup P''_{ab} \cup Q_{ab}$; e dimostriamo, in ciascuno dei possibili nove casi (1) di [3] (n.° 1), l'assurdità di questa ipotesi. Possiamo, fortunatamente, limitarci alla revisione della dimostrazione fatta in [3], cambiandola soltanto in quei punti in cui è sfruttata la validità di qualche condizione non appartenente alla classe $R_a \cup P''_{ab} \cup Q_{ab}$.

Leggiamo dunque il lavoro [3]:

1) I due sottocasi 1_1) e 1_2) vanno bene. Va pure bene il sottocaso 1_3), con l'unica variante di leggervi (com'è lecito) $3(a, a, b)$ invece di $3(a, a, c)$.

2) Va bene fino all'eguaglianza $bb = b$. Ma allora $4(a, b, b)$ implica $bb = c$, donde l'assurdo.

3) Va bene fino all'eguaglianza $cc = c$. Il sottocaso 3_1) va bene.

3.1) Sia inoltre

$$a + b = b .$$

Allora $4(c, c, b)$, $4(a, a, b)$ e la (10) implicano successivamente

$$c + b \neq a, \quad bb \neq c, \quad ab \neq c .$$

Distinguiamo i due sottocasi $bb = b, c$.

3.1.1) Sia inoltre

$$bb = b .$$

Allora $4(a, a, b)$ implica $c + b = b$, quindi la (10) comporta

$$ab = a .$$

Perciò $1(a, b, a)$, $4(b, b, a)$ implicano successivamente $b + a \neq b$,

$$b + a = c ,$$

quindi $1(a, b, a)$ comporta $ac = c$; ma allora $4(a, b, a)$ implica $a = a + a = (ab) + a = (a + a)(b + a) = ac = c$, il che è assurdo.

3.1.2) Sia inoltre

$$bb = c .$$

Allora $1(b, b, b)$ implica $b(b + b) = c$, quindi $4(a, b, b)$ comporta

$$ab = b, \quad b + b = c ,$$

e perciò $2(a, a, b)$ implica $b = ab = (a + a)b = (ab) + (ab) = b + b = c$, il che è assurdo.

3.) Sia inoltre

$$a + b = c .$$

Allora $3(a, a, b)$ implica $ac \neq b$; quindi $4(a, a, b)$, la (10), $3(a, a, b)$,

$1(a, b, a)$ implicano successivamente

$$c + b = c, \quad ac = a, \quad ab = a, \quad b + a = a,$$

e perciò $4(a, b, a)$ comporta $a = a + a = (ab) + a = (a + a)(b + a) = aa = c$, il che è assurdo.

4) Va bene, tranne il ricorso finale alla $4(a, c, b)$, che va così sostituito: $2(a, a, c)$ implica $c = bc = (a + a)c = (ac) + (ac) = b + b = b$, il che è assurdo.

5) Va bene, tranne il ricorso finale alla $3(b, a, b)$, che va così sostituito: $3(b, c, c)$ implica $b + c = (b + c)(b + c)$, il che (in entrambi i casi possibili $b + c = a, b$) è assurdo.

6) I due sottocasi 6_1) e 6_2) vanno bene.

6_3) Va bene fino alla diseguaglianza $ac \neq c$. Quindi $1(a, c, c)$, $3(a, a, b)$ implicano successivamente

$$ac = b, \quad b + b = b, \quad bc = c,$$

e perciò $2(a, a, c)$ comporta $c = bc = (a + a)c = (ac) + (ac) = b + b = b$, il che è assurdo.

7) L'osservazione preliminare (p. 60): « $3(a, a, c)$ implica $a + c \neq a$ » non viene mai sfruttata nel seguito; quindi questo caso va bene.

8) Il sottocaso 8_1) va bene.

8_2) Il sottocaso $8_{2,2}$) va bene.

$8_{2,1}$) Sia inoltre

$$ab = a.$$

Allora $1(a, b, a)$ implica $a = ab = a(b + a) = (ab) + (aa) = a + b = b$, il che è assurdo.

$8_{2,3}$) Va bene fino all'eguaglianza $bb = c$. Allora $4(b, b, b)$ implica $c = c + b = (bb) + b = (b + b)(b + b) = cc = b$, il che è assurdo.

8_3) Va bene fino alla diseguaglianza $b + c \neq c$. Allora $3(b, c, c)$, $3(a, a, b)$ implicano rispettivamente

$$b + c = b, \quad a + c = c,$$

quindi $4(a, a, c)$ comporta $b = b + c = (aa) + c = (a + c)(a + c) = cc = c$, il che è assurdo.

9) Tutti i sottocasi vanno bene, tranne i due qui sotto modificati.

9₁) Sia inoltre

$$a + c = a.$$

Allora $4(a, a, c)$ implica $c + c = c$, quindi $1(c, c, c)$ comporta $a = cc = c(c + c) = (cc) + (cc) = a + a = c$, il che è assurdo.

9_{3.2.1}) Va bene fino all'eguaglianza $bc = b$, con l'unica variante di leggere (com'è lecito) $3(a, b, b)$ invece di $2(a, b, b)$. Quindi $1(b, c, c)$ implica $b = bc = b(c + c) = (bc) + (bc) = b + b = c$, il che è assurdo.

XIV) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(a, b, a)$ non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe $R_0 \cup Q''_{ab} \cup P_{ab}$ (n.^o 2, 3).*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, chiamiamolo B^0 , i suoi gruppoidi additivo e moltiplicativo ([1], p. 6) non potrebbero essere opposti (invero, se in B^0 si avesse sempre $x + y = yx$, allora $a(b + a) \neq (ab) + (aa)$ implicherebbe $(ab) + a \neq (a + a)(b + a)$, mentre per ipotesi vale la $4(a, b, a)$); dunque esisterebbe ([1], p. 6, nota ²) il bisistema α -opposto di questo B^0 , il quale (per il lemma 1 di [5], n.^o 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla precedente XIII).

5. - Siano u, v due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$.

XV) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(u, u, v)$ (risp. $2(u, v, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe $R_0 \cup P''_{uv} \cup Q_{uv}$ (risp. $R_0 \cup P''_{uv} \cup Q_{vu}$), (n.^o 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)*

Infatti: 1^o) Se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa, mediante la corrispondenza biunivoca di B su sé stesso in cui $u \longrightarrow a, v \longrightarrow b$, sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XIII) del n.^o 4 (cfr. [1], n.^o 2).

2^o (risp.) Se un tal bisistema esistesse, il suo opposto sarebbe ([1], p. 22, lemma 13; [2], p. 43, lemma 2) un bisistema

la cui esistenza è negata dalla prima parte della XV) (qui sopra dimostrata in 1°)).

XVI) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $3(u, u, v)$ (risp. $4(u, v, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe $R_0 \cup P'_{uv} \cup Q_{uv}$ (risp. $R_0 \cup P'_{uv} \cup Q_{vu}$), (n.° 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, il suo duale sarebbe ([5], n.° 2, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla XV).

XVII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $1(u, v, u)$ (risp. $2(v, u, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe $R_0 \cup Q''_{uv} \cup P_{uv}$ (risp. $R_0 \cup Q''_{uv} \cup P_{vu}$), (n.° 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)*

Infatti: 1°) Se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa, mediante la corrispondenza biunivoca di B su sé stesso in cui $u \longrightarrow a$, $v \longrightarrow b$, sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XIV) del n.° 4 (cfr. [1], n.° 2).

2°) (risp.) Se un tal bisistema esistesse, il suo opposto sarebbe ([1], p. 22, lemma 13; [2], p. 43, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla prima parte della XVII) (qui sopra dimostrata in 1°)).

XVIII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale $3(u, v, u)$ (risp. $4(v, u, v)$) non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe $R_0 \cup Q'_{vu} \cup P_{uv}$ (risp. $R_0 \cup Q'_{vu} \cup P_{vu}$), (n.° 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, il suo duale sarebbe ([5], n.° 2, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla XVII).

6. - Alla prosecuzione dello studio del caso $r = 3$ (n.° 2), premettiamo le due osservazioni seguenti.

OSSERVAZIONE 1^a: Consideriamo la corrispondenza biunivoca e involutoria, ω (risp. δ), di M (n.° 1) su sé stesso che ad ogni condizione di mutua distributività di B associa la sua opposta (risp. duale), ([5], n.° 7).

Ebbene, se R' è un sottinsieme di R (n.° 1) indipendente ed equivalente ad R ([4], n.° 1), l'insieme opposto (risp. duale) di R' ,

cioè l'insieme costituito dalle condizioni opposte (risp. duali) di quelle costituenti R' (ossia l'immagine di R' in ω — risp. in δ —), è anch'esso un sottoinsieme di R indipendente ed equivalente ad R .

Infatti, basta notare che ω (risp. δ) applica R su sé stesso e ricordare le cose dette negli ultimi due capoversi del n.º 7 di [5].

OSSERVAZIONE 2ª: Una qualsiasi corrispondenza biunivoca τ di B (n.º 1) su sé stesso, nella quale agli elementi x, y, z variabili in B corrispondono rispettivamente x', y', z' , induce una corrispondenza biunivoca, che denoteremo pure con τ , di M (n.º 1) su sé stesso, nella quale alla prima delle due seguenti condizioni (n.º 1):

$$i(x, y, z), \quad i(x', y', z')$$

corrisponde la seconda, ($i = 1, 2, 3, 4$). La seconda (risp. la prima) di queste due condizioni si dirà la condizione τ -isomorfa (risp. τ^{-1} -isomorfa) della prima (risp. della seconda).

Ebbene, se R' è un sottoinsieme di R (n.º 1) indipendente ed equivalente ad R ([4], n.º 1) l'insieme τ -isomorfo di R' , cioè l'insieme costituito dalle condizioni τ -isomorfe di quelle costituenti R' (ossia l'immagine di R' in τ), è anch'esso un sottoinsieme di R indipendente ed equivalente ad R .

Infatti, basta notare che τ applica R su sé stesso e ricordare le cose dette nella parte finale del n.º 2 di [1].

7. — Consideriamo l'insieme R delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni dell'insieme $B = \{a, b, c\}$, e poniamo (n.º 3):

$$R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q_{uv} \cup Q_{vu},$$

u, v essendo due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$. Si noti che

$$R_{uv} = R_{vu}.$$

Poniamo inoltre (n.º 1, 3), u, v essendo sempre due qualsiasi

elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$:

$$P_{uv}^{13} = \{1(u, u, v), 2(v, u, u)\},$$

$$P_{uv}^{13} = \{1(u, u, v), 3(u, u, v)\},$$

$$P_{uv}^{14} = \{1(u, u, v), 4(v, u, u)\},$$

$$P_{uv}^{23} = \{2(v, u, u), 3(u, u, v)\},$$

$$P_{uv}^{24} = \{2(v, u, u), 4(v, u, u)\},$$

$$P_{uv}^{43} = \{4(v, u, u), 3(u, u, v)\};$$

e poniamo infine (n.° 1, 3):

$$Q_{uv}^{rs} = \{r(u, v, u), s(u, v, u)\}, \quad (r, s = 1, 2, 3, 4; r \neq s).$$

Supponiamo che R' sia un sottinsieme di R indipendente ed equivalente ad R ([4], n.° 1), e cerchiamo di determinare l'intersezione di R' ed R_{uv} .

Osserviamo anzitutto che R' deve contenere R_0 (n.° 2):

$$R' \supseteq R_0,$$

e ciò per la II) del n.° 2, essendo R' equivalente ad R .

R' non può contenere R_{uv} (per la XV), essendo R' indipendente). Supponiamo perciò dapprima che R' non contenga $1(u, u, v)$. Allora R' deve contenere $P_{uv}'' \cup Q_{uv}''$ (per le XI) e XII) del n.° 3, essendo R' equivalente ad R). Poiché R' deve contenere almeno una delle due condizioni $1(v, v, u)$, $3(v, v, u)$ (per la XII)), R' non può contenere entrambe le condizioni $2(v, u, u)$, $4(v, u, u)$ (per le XV) e XVI)).

Supponiamo perciò in primo luogo che R' non contenga $2(v, u, u)$. Allora R' deve contenere P_{uv}'' (per la XII)). Quindi non può accadere che R' contenga una delle due condizioni $1(v, v, u)$, $2(u, v, v)$ e che non contenga l'altra; se invero R' contenesse $2(u, v, v)$ e non contenesse $1(v, v, u)$, allora, non contenendo $1(v, v, u)$, R' dovrebbe contenere Q_{vu} (per la XI)), donde l'assurdo (per la XV), essendo R' indipendente); se poi R' contenesse invece $1(v, v, u)$ e non contenesse $2(u, v, v)$, allora R' do-

vrebbe contenere Q_{cu} (per la XI)), donde appunto l'assurdo (per la XV)). Dunque i casi sono due: o R' non contiene alcuna delle due condizioni $1(r, r, u)$, $2(u, v, r)$, e quindi contiene Q_{vu} (per la XI)), per cui:

$$(11) \quad R' \cap R_{uv} = Q_{uc} \cup Q_{ru} \cup P_{uv}^{43} \cup P_{vu}^{43},$$

oppure R' contiene entrambe le condizioni $1(v, v, u)$, $2(u, v, v)$, e quindi R' contiene P_{vu} . In quest'ultimo caso R' deve contenere una (per la XII)) delle due condizioni $2(r, u, v)$, $3(v, u, v)$ ed una sola (per la XVII)); inoltre R' deve contenere una (per la XII)) delle due condizioni $1(r, u, v)$, $4(v, u, v)$ ed una sola per la XVIII)); quindi deve valere una delle seguenti quattro eguaglianze:

$$(12) \quad R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{43} \cup Q_{vu}^{13},$$

$$(13) \quad R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{43} \cup Q_{vu}^{43},$$

$$(14) \quad R' \cap R_{uv} = P_{cu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{43} \cup Q_{vu}^{13},$$

$$(15) \quad R' \cap R_{uv} = P_{cu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{43} \cup Q_{vu}^{24}.$$

Supponiamo in secondo luogo che R' non contenga $4(v, u, u)$. Allora R' deve contenere P'_{vu} (per la XII)). Quindi non può accadere che R' contenga una delle due condizioni $2(u, v, v)$, $3(r, v, u)$ e che non contenga l'altra; se invero R' contenesse $2(u, v, v)$ e non contenesse $3(v, v, u)$, allora non contenendo $3(v, v, u)$, R' dovrebbe contenere Q_{vu} (per la XI)), donde l'assurdo (per la XV)); se poi R' contenesse $3(v, v, u)$ e non contenesse $2(u, v, v)$, allora R' dovrebbe contenere Q_{vu} (per la XI)), donde appunto l'assurdo (per la XVI)). Dunque i casi sono due: o R' non contiene alcuna delle due condizioni $2(u, v, v)$, $3(v, v, u)$, e quindi contiene Q_{cu} (per la XI)), per cui:

$$(16) \quad R' \cap R_{uv} = Q_{uv} \cup Q_{vu} \cup P_{uv}^{23} \cup P_{vu}^{14},$$

oppure R' contiene entrambe le condizioni $2(u, v, v)$, $3(v, v, u)$, e quindi R' contiene P_{vu} . In quest'ultimo caso, il medesimo ragionamento fatto qui sopra, fra le formule (11) e (12). porta a

concludere che deve valere una delle seguenti quattro eguaglianze:

$$(17) \quad R' \cap R_{ur} = P_{cu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{23} \cup Q_{vu}^{12},$$

$$(18) \quad R' \cap R_{ur} = P_{vu} \cup Q_{ur} \cup P_{uv}^{23} \cup Q_{ru}^{43},$$

$$(19) \quad R' \cap R_{ur} = P_{ru} \cup Q_{ue} \cup P_{uv}^{23} \cup Q_{vu}^{13},$$

$$(20) \quad R' \cap R_{uv} = P_{ru} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{23} \cup Q_{vu}^{24}.$$

Concludendo:

XIX) *Se R' (sottinsieme di R indipendente ed equivalente ad R) non contiene $1(u, u, r)$, allora vale necessariamente una delle dieci eguaglianze (11), ..., (20). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

Supponiamo ora che R' contenga $1(u, u, r)$ e che non contenga $2(r, u, u)$. Allora l'opposto di R' è un sottoinsieme di R , indipendente ed equivalente ad R (n.º 6), che contiene $2(r, u, u)$ e che non contiene $1(u, u, v)$; quindi l'intersezione dell'opposto di R' con R_{uv} è necessariamente eguale (per la XIX) ad uno dei cinque insiemi che figurano a 2º membro delle (16), ..., (20); uno degli opposti di questi cinque insiemi è perciò l'intersezione di R' (opposto del proprio opposto) con R_{uv} (coincidente col proprio opposto), cioè vale una delle seguenti cinque eguaglianze:

$$(21) \quad R' \cap R_{ur} = Q_{uv} \cup Q_{vu} \cup P_{uv}^{14} \cup P_{vu}^{23},$$

$$(22) \quad R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{14} \cup Q_{vu}^{13},$$

$$(23) \quad R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{14} \cup Q_{vu}^{43},$$

$$(24) \quad R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{14} \cup Q_{vu}^{24},$$

$$(25) \quad R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P_{uv}^{14} \cup Q_{vu}^{13}.$$

Dal precedente capoverso e dalla XIX) risulta dunque:

XX) *Se R' (sottinsieme di R indipendente ed equivalente ad R) non contiene P_{uv}^{13} , allora vale necessariamente una delle quindici eguaglianze (11), ..., (25). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

Supponiamo ora che R' contenga P_{uv}^{13} e che non contenga P_{uv}^{43} . Allora il duale di R' è un sottoinsieme di R , indipendente ed equivalente ad R (n.º 6), che contiene P_{uv}^{43} e che non contiene P_{uv}^{13} ; quindi l'intersezione del duale di R' con R_{uv} è necessaria-

mente eguale (per la XX)) ad uno dei cinque insiemi che figurano a 2° membro delle (11), ..., (15); uno dei duali di questi cinque insiemi è perciò l'intersezione di R' (duale del proprio duale) con R_{uv} (coincidente col proprio duale), cioè vale una delle seguenti cinque eguaglianze:

$$(26) \quad R' \cap R_{ur} = Q_{ur} \cup Q_{ru} \cup P_{ur}^{12} \cup P_{ru}^{12},$$

$$(27) \quad R' \cap R_{ur} = P_{ru} \cup Q_{ur} \cup P_{ur}^{12} \cup Q_{ru}^{43},$$

$$(28) \quad R' \cap R_{ur} = P_{ru} \cup Q_{ur} \cup P_{ur}^{12} \cup Q_{ru}^{12},$$

$$(29) \quad R' \cap R_{ur} = P_{ru} \cup Q_{ur} \cup P_{ur}^{12} \cup Q_{ru}^{13},$$

$$(30) \quad R' \cap R_{ur} = P_{ru} \cup Q_{ur} \cup P_{ur}^{12} \cup Q_{ru}^{24}.$$

Dal precedente capoverso e dalla XX) risulta quindi:

XXI) *Se R' (sottinsieme di R indipendente ed equivalente ad R) non contiene P_{ur} (n.º 3), allora vale necessariamente una delle venti eguaglianze (11), ..., (30). ($u \neq r$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

Supponiamo ora che R' contenga P_{ur} e che non contenga P_{ru} , e denotiamo con

$$\tau_{ur}$$

la corrispondenza biunivoca (e involutoria) dell'insieme $B = \{a, b, c\}$ su sé stesso nella quale $u \rightarrow r, r \rightarrow u$. Allora il τ_{ur} -isomorfo di R' è un sottinsieme di R , indipendente ed equivalente ad R (n.º 6), che contiene P_{ru} e che non contiene P_{uv} ; quindi l'intersezione del τ_{ur} -isomorfo di R' con R_{uv} è necessariamente eguale (per la XXI) ad uno dei sedici insiemi che figurano a 2° membro delle (12), ..., (15), delle (17), ..., (20), delle (22), ..., (25) e delle (27), ..., (30); uno dei τ_{ur} -isomorfi (come si è già osservato, $\tau_{uv}^{-1} = \tau_{uv}$) di questi sedici insiemi è perciò l'intersezione di R' con R_{uv} . Ne risulta, per la XXI), che (si ricordi che $R_{ru} = R_{ur}$):

XXII) *Se R' (sottinsieme di R indipendente ed equivalente ad R) non contiene $P_{ur} \cup P_{ru}$ (n.º 3), allora vale necessariamente o una delle venti uguaglianze (11), ..., (30), oppure una delle sedici eguaglianze che si ottengono dalla (12), ..., (15), dalle (17), ..., (20), dalle (22), ..., (25) e dalle (27), ..., (30) leggendovi v, u invece rispettivamente di u, r . ($u \neq r$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

Supponiamo adesso che R' contenga $P_{uv} \cup P_{vu}$ e che non contenga $1(u, v, u)$. Allora R' deve contenere Q''_{uv} (per la XII), essendo R' equivalente ad R ; quindi R' non contiene $2(r, u, v)$ (per la XVII), essendo R' indipendente). Poiché R' deve contenere almeno una delle due condizioni $2(u, r, u)$, $3(u, r, u)$ (per la XII), R' non può contenere entrambe le condizioni $1(r, u, r)$, $4(v, u, v)$ (per le XVII, XVIII)). Perciò, o R' non contiene $1(v, u, v)$, e allora R' deve contenere Q''_{vu} (per la XII), quindi R' non può contenere $2(u, r, u)$ (per la XVII), cioè risulta

$$(31) \quad R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{43}_{uv} \cup Q^{43}_{vu},$$

oppure R' non contiene $4(v, u, v)$, e allora R' deve contenere Q'_{vu} (per la XII), quindi R' non contiene $3(u, v, u)$ (per la XVIII)), ossia risulta

$$(32) \quad R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{24}_{uv} \cup Q^{13}_{vu}.$$

Dal precedente capoverso e dalla XXII) risulta quindi:

XXIII) *Se R' (sottinsieme di R indipendente ed equivalente ad R) non contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup \{1(u, v, u)\}$, allora vale necessariamente o una delle trentasei eguaglianze elencate nella XXII), oppure una delle due eguaglianze (31), (32). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

Supponiamo ora che R' contenga $P_{uv} \cup P_{vu} \cup \{1(u, v, u)\}$ e che non contenga $2(u, v, u)$. Allora l'opposto di R' è un sottinsieme di R , indipendente ed equivalente ad R (n.º 6), che contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup \{2(u, v, u)\}$ e che non contiene $1(u, v, u)$; quindi l'intersezione dell'opposto di R' con R_{uv} è necessariamente uguale (per la XXIII)) all'insieme che figura a 2º membro della (32); l'opposto di questo insieme è perciò l'intersezione di R' con R_{uv} :

$$(33) \quad R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{13}_{uv} \cup Q^{24}_{vu}.$$

Ne risulta, per la XXIII):

XXIV) *Se R' (sottinsieme di R indipendente ed equivalente ad R) non contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{13}_{uv}$, allora vale necessaria-*

mente o una delle trentasei eguaglianze elencate nella XXII), oppure una delle tre eguaglianze (31), (32), (33). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Supponiamo infine che R' contenga $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q_{uv}^{12}$ e che non contenga Q_{uv}^{43} . Allora il duale di R' è un sottinsieme di R , indipendente ed equivalente ad R (n.º 6), che contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q_{uv}^{43}$ e che non contiene Q_{uv}^{12} ; quindi l'intersezione del duale di R' con R_{uv} è necessariamente uguale (per la XXIV)) all'insieme che figura a 2º membro della (31): il duale di questo insieme è perciò l'intersezione di R' con R_{uv} :

$$(34) \quad R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q_{uv}^{12} \cup Q_{uv}^{12}.$$

Ne risulta, per la XXIV), la proposizione conclusiva seguente (si vedano i primi tre capoversi di questo n.º 7):

XXV) *Se R' è un qualsiasi sottinsieme di R (insieme delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$) indipendente ed equivalente ad R , allora vale necessariamente o una delle ventiquattro eguaglianze (11), ..., (34), oppure una delle sedici eguaglianze che si ottengono dalle (12), ..., (15), dalle (17), ..., (20), dalle (22), ..., (25) e dalle (27), ..., (30) leggendovi v, u invece rispettivamente di u, v . ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

E invero basta osservare che R' non contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q_{uv}^{43}$, ciò risultando (per l'indipendenza di R') dalle XVII) e XVIII), dato che R' deve contenere (per la XII), essendo equivalente ad R) almeno una delle due condizioni $2(r, u, v)$, $3(r, u, v)$.

3. — Se u, v sono due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$, denotiamo con

$$H_{uv}$$

uno qualunque dei quaranta insiemi (costituiti, ciascuno, da dodici condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$) che si trovano alla destra del segno di eguaglianza nelle ventiquattro eguaglianze (11), ..., (34) e nelle sedici eguaglianze che si ottengono dalle (12), ..., (15), dalle (17), ..., (20), dalle (22), ..., (25) e dalle (27), ..., (30) leggendovi v, u invece

rispettivamente di u, v (si vedano il 1° capoverso del n.° 3 ed il 2° capoverso del n.° 7). Si osservi che (n.° 7, 1° capov.):

$$H_{uv} \subset R_{uv}.$$

XXVI) *Fissata una qualsiasi delle (dodici) condizioni costituenti l'insieme H_{uv} (si veda il preced. capov.), esiste un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre vi sono invece soddisfatte sia le (undici) condizioni di H_{uv} diverse da quella fissata, sia tutte le condizioni di $R - R_{uv}$ (n.° 7, 1° capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

Infatti, ciò risulta dalle due proposizioni XI) e XII) (n.° 3).

XXVII) *Se in un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ sono soddisfatte sia le condizioni costituenti l'insieme R_0 (n.° 2), sia le (dodici) condizioni costituenti l'insieme H_{uv} (questo n.°, 1° capov.), allora, in questo bisistema, sono pure soddisfatte le (quattro) condizioni di $R_{uv} - H_{uv}$ (n.° 7, 1° capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)*

Infatti, ciò risulta dalle quattro proposizioni XV), ..., XVIII) (n.° 5).

Siamo ormai in grado di concludere intanto lo studio del caso $v = 3$ (iniziato nel n.° 2) col seguente

TEOREMA 1: *Se $B = \{a, b, c\}$ è un insieme avente numero cardinale $v = 3$, ed R è l'insieme delle 84 condizioni di mutua distributività con ripetizioni di B (n.° 1), tutti i sottoinsiemi R' di R che sono indipendenti ed equivalenti ([4], n.° 1) ad R si ottengono nel modo seguente: Si scelgano uno qualsiasi dei quaranta insiemi H_{ab} (si veda il 1° capoverso di questo n.° 8), uno qualsiasi dei quaranta insiemi H_{ac} ed uno qualsiasi dei quaranta insiemi H_{bc} . Le (trentasei) condizioni costituenti i tre insiemi così scelti e le (trentasei) condizioni costituenti l'insieme R_0 (n.° 2, 1° capov.) formano appunto complessivamente, un sottoinsieme R' (di R) indipendente ed equivalente ad R .*

Dimostrazione: Che ognuno dei sottoinsiemi R' di R così ottenuti sia effettivamente indipendente ed equivalente ad R , è provato rispettivamente dalle due proposizioni II), XXVI) (n.° 2, 8) e dalla proposizione XXVII) (n.° 8). Che i sottoinsiemi R' di R così ottenuti siano effettivamente *tutti* i sottoinsiemi di R

che sono indipendenti ed equivalenti ad R , è poi provato da un'osservazione fatta all'inizio del n.º 7 ($R' \supseteq R_0$) e dalla proposizione XXV) (l'ultima del n.º 7).

I sottinsiemi R' di R determinati mediante il teorema 1 sono dunque 64000 ($= 10^5$) e ciascuno di essi è costituito da 72 condizioni.

Ad esempio, uno di questi sottinsiemi R' è il seguente (n.º 1, 2):
 $1[a, b, a] \cup 2[a, b, a] \cup 4[a, b, a] \cup 3[a, b, a] \cup 4[b, a, a] \cup 3[a, a, b] \cup R_0$.

9. — Esaurito lo studio del caso $\nu = 3$, passiamo ora ad esaminare il caso $\nu = 2$ (n.º 1).

Se $\nu = 2$, risulta (come si è già osservato nel n.º 1):

$$R = M,$$

quindi si tratta di studiare l'insieme M delle 32 ($= 4 \cdot 2^3$) condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$.

Pensiamo ripartite queste 32 condizioni nelle sedici classi C_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3, 4$) definite nel n.º 5 di [5], e consideriamola classe

$$(35) \quad C_{12} \cup C_{22} \cup C_{42} \cup C_{32} \cup C_{14} \cup C_{24} \cup C_{44} \cup C_{34}.$$

XXVIII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe (35), e nel quale le due condizioni $1(a, a, a)$, $4(a, a, a)$ siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti: i) Supponiamo che B^0 sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $1(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$(36) \quad a(a + a) \neq (aa) + (aa),$$

e nel quale siano invece soddisfatte $4(a, a, a)$ e le condizioni costituenti la classe (35); e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Invero, la (36) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b)$, (b, a) , (b, b) .

1) In B^0 risulti

$$a + a = a, \quad aa = b.$$

Allora la (36) e $4(a, a, a)$ implicano risp.

$$b + b = a, \quad b + a = b,$$

quindi $1(a, b, a)$ comporta successivamente

$$ab = a, \quad a + b = a,$$

e perciò $2(a, b, a)$ implica $ba = a$. Da $3(a, b, a)$ segue quindi $a = a + a = a + (ba) = (a + b)(a + a) = aa = b$, il che è assurdo.

2) In B^0 risulti

$$a + a = b, \quad aa = a.$$

Allora la (36) implica $ab = a$, quindi $1(a, b, a)$ comporta $a = a(b + a) = (ab) + (aa) = a + a = b$, il che è assurdo.

3) In B^0 risulti

$$a + a = b, \quad aa = b.$$

Allora la (36) implica $b + b \neq ab$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(b + b, ab) = (a, b), (b, a)$.

3₁) Sia inoltre

$$b + b = a, \quad ab = b.$$

Allora $1(a, b, a)$ implica $b = a(b + a) = (ab) + (aa) = b + b = a$, il che è assurdo.

3₂) Sia inoltre

$$b + b = b, \quad ab = a.$$

Distinguiamo i due sottocasi $b + a = a, b$.

3_{2,1}) Sia inoltre

$$b + a = a .$$

Allora $1(a, b, a)$, $4(a, a, a)$, $4(a, b, a)$ implicano risp.

$$a + b = b , \quad bb = a , \quad ba = b ,$$

quindi $3(a, b, a)$ comporta $b = a + b = a + (ba) = (a + b)(a + a) = bb = a$, il che è assurdo.

3_{2,2}) Sia inoltre

$$b + a = b .$$

Allora $1(a, b, a)$, $4(a, a, a)$, $3(a, b, a)$ implicano successivamente

$$a + b = a , \quad bb = b , \quad ba = b ,$$

quindi l'addizione e la moltiplicazione di B^0 coincidono, il che è assurdo.

ii) Supponiamo ora che B^0 sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $4(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$(37) \quad (aa) + a \neq (a + a)(a + a) .$$

e nel quale siano invece soddisfatte $1(a, a, a)$ e le condizioni costituenti la classe (35); e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Invero, la (37) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b)$, (b, a) , (b, b) .

1) In B^0 risulti

$$a + a = a , \quad aa = b .$$

Allora la (37) implica $b + a = a$, quindi $4(a, b, a)$ comporta $a = (ab) + a = (a + a)(b + a) = aa = b$, il che è assurdo.

2) In B^0 risulti

$$a + a = b , \quad aa = a .$$

Allora la (37), $1(a, a, a)$, $2(a, b, a)$ implicano risp.

$$bb = a, \quad ab = b, \quad ba = b,$$

quindi $3(a, b, a)$ comporta $a + b = (a + b)b$, cioè (in entrambi i casi $a + b = a, b$) $a = b$, il che è assurdo.

3) In B° risulti

$$a + a = b, \quad aa = b.$$

Allora la (37) implica $b + a \neq bb$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(b + a, bb) = (a, b), (b, a)$.

3,) Sia inoltre

$$b + a = a, \quad bb = b.$$

Distinguiamo i due sottocasi $ab = a, b$.

3_{1,1}) Sia inoltre

$$ab = a.$$

Allora $1(a, b, a)$, $1(a, a, a)$, $2(a, b, a)$ implicano successivamente

$$a + b = b, \quad b + b = a, \quad ba = a,$$

quindi $4(a, b, a)$ comporta $b = a + a = (ab) + a = (a + a)(b + a) = ba = a$, il che è assurdo.

3_{1,2}) Sia inoltre

$$ab = b.$$

Allora $1(a, a, a)$, $4(a, b, a)$, $2(a, b, a)$ implicano successivamente

$$b + b = b, \quad ba = a, \quad a + b = b,$$

quindi l'addizione e la moltiplicazione di B° coincidono il che è assurdo.

3₂) Sia inoltre

$$b + a = b, \quad bb = a.$$

Allora $4(a, b, a)$ implica $b = (ab) \div a = (a \div a)(b \div a) = bb = a$, il che è assurdo. E la dimostrazione della XXVIII) è terminata.

XXIX) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe (35), e nel quale le due condizioni $2(a, a, a)$, $3(a, a, a)$ siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, il suo duale sarebbe ([5], n.º 2, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla XXVIII).

XXX) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe (35) e nel quale le due condizioni $1(b, b, b)$, $4(b, b, b)$ (oppure le due condizioni $2(b, b, b)$, $3(b, b, b)$) siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa mediante la corrispondenza $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$ (cfr. [1], n.º 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XXVIII) (oppure dalla XXIX)).

TEOREMA 2º: *Se $B = \{a, b\}$ è un insieme avente numero cardinale $\nu = 2$, ed R (n.º 1) è l'insieme delle 32 condizioni di mutua distributività con ripetizioni di B (coincidente, R , con l'insieme M delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività di B), tutti i sottinsiemi R' di R che sono indipendenti ed equivalenti ([4], n.º 1) ad R si ottengono nel modo seguente: Si scelga in ciascuna delle dodici classi (si veda il n.º 5 di [5]):*

$$(38) \quad \begin{aligned} &C_{12}, C_{22}, C_{42}, C_{32}, C_{14}, C_{24}, C_{44}, C_{34}, \\ &C_{11} \cup C_{41}, C_{21} \cup C_{31}, C_{13} \cup C_{43}, C_{23} \cup C_{33} \end{aligned}$$

una qualunque delle condizioni che la costituiscono. Le 12 condizioni così scelte costituiscono appunto un sottinsieme R' (di R) indipendente ed equivalente ad R .

Dimostrazione: Questo teor. 2 è una facile conseguenza delle tre proposizioni dimostrate precedentemente in questo n.º, e delle cinque dimostrate nel n.º 5 di [5].

Ad esempio, un sottinsieme indipendente ed equivalente all'insieme M ($= R$) delle 32 condizioni di mutua distributività.

di $B = \{a, b\}$ (cioè uno dei sottinsiemi R' determinati mediante il teor. 2) è quello costituito dalle 12 condizioni seguenti (n.º 1):

$$1(a, a, a), 1(b, b, b), 2(a, a, a), 2(b, b, b), i(a, b, a), i(b, a, b) \\ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dalla I) (n.º 1) e dai teoremi 1, 2 (n.º 8, 9) risulta evidentemente il seguente

COROLLARIO: *L'insieme R , delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni di un insieme B avente numero cardinale v , è indipendente ([4], n.º 1) se, e soltanto se, $v \geq 4$.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.
- [2] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.
- [3] BOCCIONI D.: *Dipendenza delle condizioni di mutua distributività nei bisistemi di ordine 3*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 50-67.
- [4] BOCCIONI D.: *Condizioni di distributività ed associatività unilaterali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 30 (1960), pp. 178-193.
- [5] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di doppia e di tripla distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 33 (1963).