

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

**Indipendenza delle condizioni di doppia e
di tripla distributività**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 33 (1963), p. 33-47

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__33_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INDIPENDENZA DELLE CONDIZIONI DI DOPPIA E DI TRIPLA DISTRIBUTIVITÀ

*Nota *) di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)*

Le $2\nu^3$ (rispettivam. le $3\nu^3$) eguaglianze che si ottengono da due (risp. da tre) eguaglianze fissate a piacere fra le seguenti quattro:

$$\begin{aligned}x(y + z) &= (xy) + (xz), & (x + y)z &= (xz) + (yz), \\x + (yz) &= (x + y)(x + z), & (xy) + z &= (x + z)(y + z),\end{aligned}$$

in corrispondenza a tutte le ν^3 terne (x, y, z) di elementi di un insieme B , avente numero cardinale non necessariamente finito $\nu \geq 2$, vengono dette condizioni di doppia (risp. di tripla) distributività di B .

Nella presente nota viene dimostrato che sia le $2\nu^3$ condizioni di doppia distributività di B , sia le $3\nu^3$ condizioni di tripla distributività di B sono indipendenti se, e soltanto se, $\nu \geq 3$ (indipendenti nel senso che, fissatane una qualsiasi esistono sempre un'addizione e una moltiplicazione, definite in B , per le quali la condizione fissata non è soddisfatta, mentre sono invece soddisfatte tutte le rimanenti).

Se $\nu = 2$, vengono poi determinati tutti i sottinsiemi costituiti da condizioni indipendenti ed equivalenti alle condizioni

*) Pervenuta in Redazione il 20 giugno 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

di doppia (risp. di tripla) distributività di B . Ciascuno di questi sottinsiemi è costituito da otto (risp. da dieci) condizioni (n° 7, 8).

Le 2^3 eguaglianze $x(y+z) = (xy) + (xz)$, $(x+y)z = (xz) + (yz)$ (particolari condizioni di doppia distributività) erano state già studiate in [1]¹), con la denominazione di condizioni di distributività.

Nel seguito vengono studiate dapprima (n° 1-7) le condizioni di tripla distributività, e poi (n.° 8) quelle di doppia distributività.

1. - Denotiamo con

$$M$$

l'insieme delle 4^3 condizioni di mutua distributività ([2], n.° 1):

- (1) $x(y+z) = (xy) + (xz)$,
- (2) $(x+y)z = (xz) + (yz)$,
- (3) $x + (yz) = (x+y)(x+z)$,
- (4) $(xy) + z = (x+z)(y+z)$

di un insieme B avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geq 2$ ($x, y, z \in B$).

Denotiamo inoltre con

$$T_1, T_2, T_3, T_4$$

rispettivamente l'insieme delle 3^3 eguaglianze (2), (3), (4), l'insieme delle 3^3 eguaglianze (1), (3), (4), l'insieme delle 3^3 eguaglianze (1), (2), (4), l'insieme delle 3^3 eguaglianze (1), (2), (3), ($x, y, z \in B$). Le 3^3 eguaglianze costituenti T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) vengono dette *condizioni di tripla distributività* dell'insieme B .

Studieremo nel seguito ciascuno, T_i , dei quattro insiemi di condizioni (di tripla distributività) T_1, T_2, T_3, T_4 , determinando

¹) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

(per ogni valore di ν) tutti i suoi sottinsiemi, T'_i , indipendenti ([3], n.º 1) e ad esso equivalenti ([3], n.º 1). A tal fine sarà sufficiente, come vedremo, studiare direttamente uno solo di questi quattro insiemi, ad es. come faremo, l'insieme T_4 .

Poichè già sappiamo ([2], n.º 1, teor. 1) che l'insieme M è indipendente se $\nu \geq 4$, sappiamo dunque pure che:

I) *Se il numero cardinale ν di un insieme B è ≥ 4 , ciascuno dei quattro insiemi di condizioni (di tripla distributività di B) T_1, T_2, T_3, T_4 è indipendente ([3], n.º 1).*

Restano dunque da esaminare soltanto i due casi $\nu = 2$, $\nu = 3$. Vedremo che le condizioni di tripla distributività di B sono ancora indipendenti se $\nu = 3$, mentre non lo sono più se $\nu = 2$.

Salvo avviso in contrario, conserviamo nel seguito tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1] e in [2].

2. - Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1: *Se due bisistemi sono α -opposti ([1], p. 6), allora ([2], p. 42):*

- 1) *se la terna (x, y, z) è (1)-distributiva in uno di essi, la terna (x, z, y) è (1)-distributiva nell'altro;*
- 2) *se la terna (x, y, z) è (2)-distributiva in uno di essi, la terna (y, x, z) è (2)-distributiva nell'altro;*
- 3) *se la terna (x, y, z) è (3)-distributiva in uno di essi, la terna (y, z, x) è (4)-distributiva nell'altro;*
- 4) *se la terna (x, y, z) è (4)-distributiva in uno di essi, la terna (z, x, y) è (3)-distributiva nell'altro.*

Infatti, detto B il comune sostegno e denotata con $x\alpha y$ la somma nell'un bisistema e con $x\bar{\alpha}y$ nell'altro, si ha appunto $(x, y, z \in B)$: 1) v. [1], p. 6; 2) $(y\bar{\alpha}x)z = (x\alpha y)z = (xz)\alpha(yz) = (yz)\bar{\alpha}(xz)$; 3) $(yz)\bar{\alpha}x = x\alpha(yz) = (x\alpha y)(x\alpha z) = (y\bar{\alpha}x)(z\bar{\alpha}x)$; 4) $z\bar{\alpha}(xy) = (xy)\alpha z = (x\alpha z)(y\alpha z) = (z\bar{\alpha}x)(z\bar{\alpha}y)$. Vale poi evidentemente il seguente

LEMMA 2: *Se due bisistemi sono duali ([1], p. 3), e se la terna (x, y, z) è risp. (1)-, (2)-, (3)-, (4)-distributiva in uno di essi, la stessa terna (x, y, z) è risp. (3)-, (4)-, (1)-, (2)-distributiva nell'altro ([2], p. 42).*

Se due bisistemi sono μ -opposti ([1], p. 6), i loro duali sono evidentemente α -opposti. Perciò dai due lemmi precedenti si ottiene immediatamente il seguente altro.

LEMMA 3: *Se due bisistemi sono μ -opposti ([1], p. 6), allora ([2], p. 42):*

1) *se la terna (x, y, z) è (1)-distributiva in uno di essi, la terna (y, z, x) è (2)-distributiva nell'altro;*

2) *se la terna (x, y, z) è (2)-distributiva in uno di essi, la terna (z, x, y) è (1)-distributiva nell'altro;*

3) *se la terna (x, y, z) è (3)-distributiva in uno di essi, la terna (x, z, y) è (3)-distributiva nell'altro;*

4) *se la terna (x, y, z) è (4)-distributiva in uno di essi, la terna (y, x, z) è (4)-distributiva nell'altro.*

3. - Consideriamo dapprima il caso $\nu = 3$. Faremo vedere che, in questo caso, l'insieme T_4 delle $3\nu^3$ condizioni (1), (2), (3) (di tripla distributività dell'insieme $B = \{a, b, c\}$) è indipendente ([3], n.º 1). A tal fine, dimostriamo anzitutto che:

II) *Ciascuna delle cinque terne (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) è (1)-isolata ([2], p. 42) in un bisistema (2, 3)-distributivo ([2], p. 42), di sostegno $\{a, b, c\}$, i cui gruppoidi additivo e moltiplicato non sono opposti ([1], n.º 3).*

Infatti: 1) Per le due terne (a, a, a) e (b, a, a) , si veda la dimostrazione della I) in [2], n.º 3 (punti primo e terzo).

2º) Per la terna (a, a, b) , si veda [1], p. 27: si riconosce facilmente (cfr. [1], p. 8, ult. capov.) che il bisistema definito dalle (18) è appunto (3)-distributivo.

3º) La terna (a, b, a) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3)-distributivo definito dalle due seguenti tabelle:

$$(5) \quad \begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & b & b & b \\ b & c & b & b \\ c & b & b & b \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & b & b & c \\ b & b & b & b \\ c & b & b & b \end{array}$$

4º) La terna (a, b, c) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3)-di-

stributivo definito dalle due seguenti tabelle :

(6)	+				·			
		a	b	c		a	b	c
	a	b	b	b	a	b	b	a
	b	b	b	c	b	b	b	b
	c	b	b	b	c	b	b	b

Le affermazioni relative ai bisistemi (5) e (6) si verificano facilmente (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

III) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a) , (a, b, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (b, c, a) *è* (2)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (1, 3)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti, in virtù del lemma 3 (n.º 2), tali cinque bisistemi sono i μ -opposti dei cinque bisistemi la cui esistenza è affermata dalla precedente II), (cfr. [1], p. 6, nota ²)).

IV) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme* $B = \{a, b, c\}$ *è* (1)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (2, 3)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* B .

V) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme* $B = \{a, b, c\}$ *è* (2)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (1, 3)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* B .

Dimostrazione delle IV), V): Queste due proposizioni sono conseguenze immediate risp. delle II), III), in virtù delle osservazioni del n.º 2 di [1].

4. - Continuando lo studio del caso $v = 3$, dimostriamo ora che:

VI) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) *è* (3)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (1, 2)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti: 1º) Per le due terne (a, a, a) e (b, a, a) , si vedano i punti primo e terzo della dimostrazione della I) in [2], n.º 3; due bisistemi duali dei due ivi considerati sono quelli occorrenti in virtù del lemma 2 del n.º 2).

2º) La terna (a, a, b) è (3)-isolata nel bisistema (

struttorio definito dalle due seguenti tabelle:

	$+$	a	b	c		$\cdot$	a	b	c
		a	c	b	c		a	a	b
(7)		b	c	c	c		b	c	c
		c	c	c	c		c	c	c

come facilmente si verifica (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

3°) La terna (a, b, a) è (3)-isolata nel bisistema (1, 2)-distributivo, di sostegno $\{a, b, c\}$, μ -opposto di quello definito dalle precedenti tabelle (7), e ciò in virtù del lemma 3 del n.° 2.

4°) La terna (a, b, c) è (3)-isolata nel bisistema (1, 2)-distribuito definito dalle due seguenti tabelle:

$+$	$a \ b \ c$
a	$a \ a \ c$
b	$a \ b \ c$
c	$c \ c \ c$

$\cdot$	$a \ b \ c$
a	$a \ a \ c$
b	$a \ a \ a$
c	$c \ c \ c$

(8)

$+$	$a \ b \ c$
a	$a \ a \ c$
b	$a \ b \ c$
c	$c \ c \ c$

$\cdot$	$a \ b \ c$
a	$a \ a \ c$
b	$a \ a \ a$
c	$c \ c \ c$

E invero, qualunque siano $y, z \in \{a, b, c\}$, (3): $a + (bc) = a + a = a$, $(a + b)(a + c) = ac = c$; $a + (bz) = a + a = a$, $(a + b)(a + z) = aa = a$ se $z \neq c$; $a + (az) = (a + a)(a + z)$; $a + (cz) = a + c = c$, $(a + c)(a + z) = c(a + z) = c$; $b + (yz) = yz$, $(b + y)(b + z) = yz$; $c + (yz) = c$, $(c + y)(c + z) = cc = c$; (1): $a(a + z) = (aa) + (az)$; $a(b + z) = az$, $(ab) + (az) = a + (az) = az$ poichè $az \neq b$; $a(c + z) = ac = c$, $(ac) + (az) = c + (az) = c$; $b(y + z) = a$, $(by) + (bz) = a + a = a$; $c(y + z) = c$, $(cy) + (cz) = c + c = c$; (2): $(a + a)z = az$, $(az) + (az) = az$; $(a + b)z = az$, $(az) + (bz) = (az) + a = az$ poichè $az \neq b$; $(a + c)z = cz = c$, $(az) + (cz) = (az) + c = c$; $(b + y)z = yz$, $(bz) + (yz) = a + (yz) = yz$ poichè $yz \neq b$; $(c + y)z = cz = c$, $(cz) + (yz) = c + (yz) = c$.

VII) Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c\}$ è (3)-isolata ([2], p. 42) in un bisistema (1, 2)-distributivo ([2], p. 42) di sostegno B .

Infatti la VII) discende subito dalla precedente VI) in virtù

delle osservazioni del n.º 2 di [1]. Le IV), V), VII) dimostrano appunto che:

VIII) *L'insieme T_4 , delle $3v^3$ condizioni di tripla distributività (1), (2), (3) di un insieme B avente numero cardinale v , è indipendente ([3], n.º 1) se $v = 3$.*

5. — Per comodità espositiva, denoteremo coi simboli

$$(9) \quad 1(x, y, z), \quad 2(x, y, z), \quad 3(x, y, z), \quad 4(x, y, z)$$

rispettivamente le eguaglianze (1), (2), (3), (4) del n.º 1, cioè le condizioni di mutua distributività *relative* (cfr. [1], p. 17) alla terna (x, y, z) (di elementi di B).

Passiamo ora a studiare il caso $v = 2$. Denotati con a, b i due elementi dell'insieme B (n.º 1), pensiamo ripartire le 32 ($= 4 \cdot 2^3$) condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ in sedici classi, ognuna costituita da due condizioni; precisamente poniamo:

$$\begin{aligned} C_{i1} &= \{i(a, a, a), i(a, b, b)\}, \\ C_{i2} &= \{i(a, a, b), i(a, b, a)\}, \\ C_{i3} &= \{i(b, b, b), i(b, a, a)\}, \\ C_{i4} &= \{i(b, b, a), i(b, a, b)\} \end{aligned} \quad (i = 1, 3),$$

e poniamo inoltre:

$$\begin{aligned} C_{i1} &= \{i(a, a, a), i(b, b, a)\}, \\ C_{i2} &= \{i(b, a, a), i(a, b, a)\}, \\ C_{i3} &= \{i(b, b, b), i(a, a, b)\}, \\ C_{i4} &= \{i(a, b, b), i(b, a, b)\} \end{aligned} \quad (i = 2, 4).$$

IX) *Una delle due condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ costituenti la classe C_{ij} , è soddisfatta in un bisistema di sostegno B se, e soltanto se, vi è soddisfatta l'altra ($i, j = 1, 2, 3, 4$).*

Infatti per $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ la cosa è già nota ([1], n.º 6 e 11); per $i = 3, 4, j = 1, 2, 3, 4$ la IX) si deduce subito da questo fatto già noto tramite il lemma 2 del n.º 2.

X) *Le due condizioni costituenti la classe C_{i2} sono le due uniche condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B . ($i = 1, 2, 3, 4$).*

Infatti per $i = 1$ un tale bisistema è il $(12, 14)$ ([1], p. 21), per $i = 2$ è l'opposto del $(12, 14)$ ([1], p. 22, lemma 13; [2], p. 43, lemma 2), per $i = 3, 4$ è il duale di uno dei due bisistemi ora nominati (n.º 2, lemma 2).

X') *Le due condizioni costituenti la classe C_{14} sono le due uniche condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B . ($i = 1, 2, 3, 4$.)*

Infatti tali quattro bisistemi sono le immagini isomorfe (cfr. [1], n.º 2) dei quattro bisistemi la cui esistenza è affermata dalla X), mediante la corrispondenza $a \rightarrow b, b \rightarrow a$.

XI) *Le quattro condizioni costituenti la classe $C_{11} \cup C_{44}$ sono le uniche quattro condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B . ($j = 1, 3$.)*

Infatti per $j = 1$ un tale bisistema è l' $(8, 14)$ ([1], p. 21), per $j = 3$ è l'immagine isomorfa dell' $(8, 14)$ mediante la corrispondenza $a \rightarrow b, b \rightarrow a$.

XI') *Le quattro condizioni costituenti la classe $C_{34} \cup C_{34}$ sono le uniche quattro condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ non soddisfatte in un bisistema di sostegno B . ($j = 1, 3$.)*

Infatti tali due bisistemi sono i duali (n.º 2, lemma 2) dei due bisistemi la cui esistenza è affermata dalla XI).

6. - Continuando lo studio del caso $\nu = 2$, poniamo (v. n.º 5):

$$C = C_{11} \cup C_{12} \cup C_{13} \cup C_{14} \cup C_{22} \cup C_{24} \cup C_{32} \cup C_{34},$$

e dimostriamo che:

XII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe C , e nel quale le due condizioni $2(a, a, a)$, $3(a, a, a)$ siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti: i) Supponiamo che B° sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $2(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$(10) \quad (a + a)a \neq (aa) + (aa),$$

e nel quale siano invece soddisfatte $3(a, a, a)$ e le condizioni

costituenti C ; e dimostriamo l'assurdità di questo ipotesi. Invero, la (10) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b), (b, a), (b, b)$.

1) In B^0 risulti

$$a + a = a, \quad aa = b.$$

Allora $1(a, a, a)$ implica $b + b = b$, quindi risulta $(a + a)a = (aa) + (aa)$, il che, per la (10), è assurdo.

2) In B^0 risulti

$$a + a = b, \quad aa = a.$$

Allora la (10) implica $ba = a$, e quindi $2(a, b, a)$ comporta $a = (a + b)a = (aa) + (ba) = b$, il che è assurdo.

3) In B^0 risulti

$$a + a = b, \quad aa = b.$$

Allora la (10) implica $b + b \neq ba$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(b + b, ba) = (a, b), (b, a)$.

3₁) Sia inoltre

$$b + b = a, \quad ba = b.$$

Allora $1(a, a, a)$ implica $ab = a$, quindi $2(a, b, a)$ comporta $b = (a + b)a = (aa) + (ba) = a$, il che è assurdo.

3₂) Sia inoltre

$$b + b = b, \quad ba = a.$$

Allora $1(a, a, a)$ implica

$$ab = b.$$

Distinguiamo i due sottocasi $a + b = a, b$.

3_{2.1}) Sia inoltre

$$a + b = a.$$

Allora $3(a, a, a)$ implica $bb = a$, quindi $1(b, a, b)$ comporta $a = ba = b(a + b) = (ba) + (bb) = a + a = b$, il che è assurdo.

3._{1.2}) Sia inoltre

$$a + b = b .$$

Allora $2(a, b, a)$, $3(a, a, a)$ implicano risp. $b + a = a$, $bb = b$, quindi l'addizione di B^0 coincide con la sua moltiplicazione, il che è assurdo.

ii) Supponiamo ora che B^0 sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $3(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$(11) \quad a + (aa) \neq (a + a)(a + a) ,$$

e nel quale siano invece soddisfatte $2(a, a, a)$ e le condizioni costituenti C ; e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Invero, la (11) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b)$, (b, a) , (b, b) .

1) In B^0 risulti

$$a + a = a , \quad aa = b .$$

Allora la (11) implica $a + b = a$, quindi $3(a, b, a)$ comporta $a = a + (ba) = (a + b)(a + a) = aa = b$, il che è assurdo.

2) In B^0 risulti

$$a + a = b , \quad aa = a .$$

Allora $1(a, a, a)$, $2(a, a, a)$ e la (11) implicano risp.

$$ab = b , \quad ba = b , \quad bb = a ,$$

quindi $3(a, b, a)$ comporta $a + b = (a + b)b$, ossia (in entrambi i casi $a + b = a, b$) $a = b$, il che è assurdo.

3) In B^0 risulti

$$a + a = b , \quad aa = b .$$

Allora la (11) implica $a + b \neq bb$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(a + b, bb) = (a, b)$, (b, a) .

3.₁) Sia inoltre

$$a + b = a , \quad bb = b .$$

Distinguiamo i due sottocasi $ba = a, b$.

3_{1.1}) Sia inoltre

$$ba = a.$$

Allora $3(a, b, a)$ ed $1(a, a, a)$ implicano successivamente $ab = b$, $b + b = b$, e quindi $2(a, a, a)$ comporta $a = ba = (a + a)a = (aa) + (aa) = b + b = b$, il che è assurdo.

3_{1.2}) Sia inoltre

$$ba = b.$$

Allora $2(a, b, a)$, $3(a, b, a)$ implicano risp. $b + b = b$, $ab = a$, quindi $1(a, a, a)$ comporta $a = ab = a(a + a) = (aa) + (aa) = b + b = b$, il che è assurdo.

3₂) Sia inoltre

$$a + b = b, \quad bb = a.$$

Allora $3(a, b, a)$ implica $b = a + (ba) = (a + b)(a + a) = bb = a$, il che è assurdo. E con ciò la dimostrazione della XII) è completata.

XII') *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui sono soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe C, e nel quale le due condizioni $2(b, b, b)$, $3(b, b, b)$ siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa mediante la corrispondenza $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow a$ (cfr. [1], n.º 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XII).

7. — Possiamo ormai concludere lo studio dell'insieme T_4 (n.º 1) mediante il seguente

TEOREMA: *L'insieme T_4 , delle $3v^3$ condizioni di tripla distributività (1), (2), (3) di un insieme B avente numero cardinale v , è indipendente ([3], n.º 1) se, e soltanto se, $v \geq 3$. Se $v = 2$, e $B = \{a, b\}$, tutti i sottosistemi T'_4 di T_4 che sono indipendenti ed equivalenti ([3], n.º 1) a T_4 si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle dieci classi (v. n.º 5):*

$$(12_4) \quad C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{22}, C_{24}, C_{32}, C_{34}, C_{21} \cup C_{31}, C_{23} \cup C_{33}$$

una qualunque delle condizioni che la costituiscono; le dieci condizioni di tripla distributività così scelte costituiscono appunto un sottinsieme T'_4 (di T_4) indipendente ed equivalente a T_4 .

Dimostrazione: Si ottiene facilmente in base alle proposizioni I), VIII) (n.¹ 1, 4) ed a quelle dei n.¹ 5 e 6.

Consideriamo ora le seguenti tre decuple di classi (v. n.^o 5):

$$(12_3) \quad C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{12}, C_{14}, C_{42}, C_{44}, C_{11} \cup C_{41}, C_{13} \cup C_{43};$$

$$(12_2) \quad C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{34}, C_{42}, C_{44}, C_{12}, C_{14}, C_{41} \cup C_{11}, C_{43} \cup C_{13};$$

$$(12_1) \quad C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{44}, C_{32}, C_{34}, C_{22}, C_{24}, C_{31} \cup C_{21}, C_{33} \cup C_{23}.$$

COROLLARIO: *L'insieme T_i (n.^o 1), delle $3r^3$ condizioni di tripla distributività (diverse dalle condizioni (i)) di un insieme B avente numero cardinale r , è indipendente ([3], n.^o 1) se, e soltanto se, $r \geq 3$. Se $r = 2$, e $B = \{a, b\}$, tutti i sottinsiemi T'_i di T_i , che sono indipendenti ed equivalenti ([3], n.^o 1) a T_i si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle dieci classi (12_i) una qualunque delle condizioni che la costituiscono; le dieci condizioni di tripla distributività così scelte costituiscono appunto un sottinsieme T'_i (di T_i) indipendente ed equivalente a T_i . ($i = 3, 2, 1$.)*

Dimostrazione: Per quanto riguarda T_3 , basta pensare alla corrispondenza biunivoca e involutoria, ω , di M (n.^o 1) su sé stesso che ad ogni condizione di mutua distributività di B associa la sua opposta, chiamando *opposte* (l'una dell'altra) le due condizioni

$$1(x, y, z), \quad 2(z, y, x)$$

ed anche le due condizioni

$$3(x, y, z), \quad 4(z, y, x)$$

(si ricordino le notazioni (9), n.^o 5). La verità del corollario per $i = 3$ discende allora subito dal precedente teorema, osservato che T_3 è l'immagine di T_4 in ω , che (in virtù del lemma 13 di [1] p. 22, e del lemma 2 di [2], p. 43) ω trasforma sottinsiemi (di M) indipendenti ([3], n.^o 1) in sottinsiemi indipendenti e coppie di

sottinsiemi equivalenti ([3], n.º 1) in coppie di sottinsiemi equivalenti, e infine che, nel caso $\nu = 2$, le classi (12_3) sono, nell'ordine, le immagini in ω delle classi (12_4) .

Per quanto poi riguarda T_2 e T_1 , basta pensare alla corrispondenza biunivoca e involutoria, δ , di M (n.º 1) su sé stesso che ad ogni condizione di mutua distributività di B associa la sua duale, chiamando *duali* (l'una dell'altra) le due condizioni

$$1(x, y, z), \quad 3(x, y, z)$$

ed anche le due condizioni

$$2(x, y, z), \quad 4(x, y, z)$$

(n.º 5). La verità del corollario per $i = 2$ (risp. per $i = 1$) discende allora subito dal precedente teorema (risp. dalla qui sopra dimostrata verità del corollario per $i = 3$), osservato che T_2 è l'immagine di T_4 in δ (risp. che T_1 è l'immagine di T_3 in δ), che (in virtù del lemma 2, n.º 2) δ trasforma sottinsiemi (di M) indipendenti ([3], n.º 1) in sottinsiemi indipendenti e coppie di sottinsiemi equivalenti ([3], n.º 1) in coppie di sottinsiemi equivalenti, e infine che, nel caso $\nu = 2$, le classi (12_2) (risp. (12_1)) sono, nell'ordine, le immagini in δ delle classi (12_4) (risp. (12_3)).

8. — Esaurito così lo studio delle condizioni di tripla distributività di B , cioè dei quattro sottinsiemi T_1, T_2, T_3, T_4 di M (n.º 1, 3º capov.) è naturale rivolgere ora l'attenzione ai seguenti altri sei notevoli sottinsiemi di M .

Consideriamo due delle quattro eguaglianze (1), (2), (3), (4) del n.º 1: la r -esima e la s -esima ($r \neq s$). Le $2\nu^3$ eguaglianze che si ottengono dalle due eguaglianze (r) ed (s) al variare di x, y, z in B , verranno dette *condizioni di doppia distributività* di B , ed il loro insieme verrà denotato con $M_{r,s}$ ($= M_{s,r}$). Otteniamo così i sei sottinsiemi di M :

$$M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34},$$

il primo dei quali è già stato studiato compiutamente in [1].

Il problema di determinare tutti i sottinsiemi, $M'_{r,s}$, di $M_{r,s}$ indipendenti ed equivalenti ([3], n.º 1) ad $M_{r,s}$ è stato già implicitamente risolto nei numeri precedenti, quasi del tutto. Completeremo ora la risoluzione ed enunceremo il risultato relativo.

Precisamente, poiché dal teorema e corollario del n.º 7 e dalla IX) del n.º 5 risulta evidentemente (essendo ogni $M_{r,s}$ contenuto in un T_i) che $M_{r,s}$ è indipendente se e solo se $v \geq 3$, rimane da studiare soltanto (e parzialmente) il caso $v = 2$.

La classe $C_{i,j}$ (n.º 5) si dirà *(i)-isolata* in un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$, se le due condizioni che la costituiscono non sono soddisfatte in B^0 , mentre vi sono invece soddisfatte le sei condizioni costituenti le tre classi C_{ik} con $k \neq j$. ($i, j = 1, 2, 3, 4$.)

XIII) Se $h \neq i$, la classe $C_{i,j}$ (n.º 5) è *(i)-isolata* in un bisistema *(h)-distributivo* ([2], n.º 2) di sostegno $B = \{a, b\}$. ($h, i, j = 1, 2, 3, 4$.)

Infatti $C_{2,3}$ è (2)-isolata nel bisistema (3)-distributivo (3, 11) ([1], n.º 10); quindi $C_{1,3}$ è (1)-isolata nel bisistema (4)-distributivo opposto del (3, 11). Considerando dapprima i bisistemi duali dei precedenti due, e poi le immagini isomorfe mediante la corrispondenza $a \longrightarrow b, b \longrightarrow a$ dei quattro bisistemi così introdotti, si riconosce intanto che la XIII) è vera per $(h, i, j) = (3, 2, 3), (4, 1, 3), (1, 4, 3), (2, 3, 3), (3, 2, 1), (4, 1, 1), (1, 4, 1), (2, 3, 1)$. Ma la XIII) è appunto vera anche per i restanti valori di h, i, j , come è provato dalle X), X'), XI), XI'), (n.º 5).

TEOREMA: *L'insieme $M_{r,s}$ delle $2v^2$ condizioni di doppia distributività (r) ed (s) (n.º 1) di un insieme B avente numero cardinale v , è indipendente ([3], n.º 1) se, e soltanto se, $v \geq 3$. Se $v = 2$, e $B = \{a, b\}$, tutti i sottinsiemi $M'_{r,s}$ di $M_{r,s}$ che sono indipendenti ed equivalenti ([3], n.º 1) ad $M_{r,s}$ si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle otto classi (v. n.º 5):*

$$C_{r,1}, C_{r,2}, C_{r,3}, C_{r,4}, C_{s,1}, C_{s,2}, C_{s,3}, C_{s,4}$$

una qualunque delle due condizioni che la costituiscono; le otto condizioni di doppia distributività così scelte costituiscono appunto

un sottinsieme $M'_{r,s}$ (di $M_{r,s}$) indipendente ed equivalente ad $M_{r,s}$. ($r \neq s$; $r, s = 1, 2, 3, 4$.)

Dimostrazione: Per $\nu \geq 3$, si è già detto più sopra. Per $\nu = 2$, il teorema si ottiene facilmente dalla precedente XIII) e dalla IX) del n.º 5.

Naturalmente, per $r = 1$, ed $s = 2$, si ritrovano i risultati del § 3 di [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.
- [2] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.
- [3] BOCCIONI D.: *Condizioni di distributività ed associatività unilaterali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 30 (1960), pp. 178-193.