

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCA BUSULINI

Sui gruppi non regolarmente ordinati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 33 (1963), p. 285-296

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__285_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI GRUPPI NON REGOLARMENTE ORDINATI

*Nota *) di FRANCA BUSULINI (a Padova) **)*

Nello studio della geometria sopra una retta [6], ¹⁾, si è introdotto un gruppo addittivo non abeliano G , dotato di un « sistema di elementi positivi » che però, in contrasto con le trattazioni classiche sui gruppi ordinati, *non è invariante* (n. 1).

Mediante le differenze a sinistra o a destra delle coppie di elementi si ottengono allora due diversi ordinamenti di G . Perciò si è detto che G non è *regolarmente ordinato* [cfr. 5].

In questa Nota, per dotare comunque G di una certa regolarità, si particolarizzano le proprietà dei suoi infinitesimi attuali. Essa viene pubblicata in modo indipendente dalle applicazioni geometriche, ritenendo che possa avere qualche interesse nello studio dei gruppi non regolarmente ordinati e nella speranza di ottenere risposta ad una questione esistenziale già più volte posta e qui ripetuta al n. 6.

1. Ordinamenti non regolari di un gruppo.

Def. 1. Un gruppo addittivo non abeliano $G = (G, +)$ si dice *parzialmente ordinato* (po-gruppo) se esso è dotato di un

*) Pervenuto in redazione il 15 febbraio 1963.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro fatto nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R.

¹⁾ Cfr. la Bibliografia in appendice.

monoide (non vuoto) G^+ , detto il *monoide degli elementi positivi*, tale che:

$$\text{I)} \quad 0 \notin G^+; \text{ quindi: II)} \quad (x \in G^+) \Rightarrow (-x \notin G^+).$$

Se inoltre

$$\text{III)} \quad (x \neq 0) \Rightarrow (x \in G^+ \vee -x \in G^+),$$

G dicesi *totalmente ordinato* o, brevemente, *ordinato* (o-gruppo).

Se in particolare il monoide G^+ è *invariante*, cioè per ogni $x \in G$ si ha:

$$\text{IV)} \quad -x + G^+ \subset G^+.$$

l'ordinamento (parziale o totale) dicesi *regolare* ²⁾, (or-gruppo oppure or-gruppo).

Il monoide G^+ permette, mediante la convenzione

$$(1) \quad \begin{cases} (-x + y \in G^+) \Leftrightarrow (x <_s y), \\ (y - x \in G^+) \Leftrightarrow (x <_s y), \end{cases}$$

di dotare l'insieme $\mathfrak{G}$ di *due* ordinamenti, generalmente distinti, che diremo rispettivamente *a sinistra* e *a destra*.

Che, ad es. $x <_s y$ sia una relazione ordinale risulta dal fatto che essa gode delle proprietà antisimmetrica e transitiva.

Infatti:

$$\begin{aligned} (-x + y \in G^+) &\Rightarrow (-y + x \notin G^+), \\ (-x + y, -y + z \in G^+) &\Rightarrow (-x + z \in G^+). \end{aligned}$$

Come d'uso la scrittura $y >_s x$ si considera equivalente alla $x <_s y$.

²⁾ Nella teoria classica dei gruppi ordinati sono stati sempre considerati ordinamenti regolari. Fa, per nostra conoscenza, eccezione soltanto la [5].

Se due particolari elementi di G soddisfano ad ambedue le relazioni ordinali (1), scriveremo semplicemente $x < y$. Pertanto:

$$(2) \quad (a <_s b, \quad a <_d b) \Leftrightarrow (a < b) .$$

Si osservi che:

$$(3) \quad x \in G^+ \Leftrightarrow (-0 \dot{+} x = x - 0 \in G^+) \Leftrightarrow x > 0 .$$

Def. 2. Un elemento x tale che $x \notin G^+$ e $-x \notin G^+$ dicesi un elemento *inconfrontabile*.

Le seguenti implicazioni immediate sono importanti:

$$(4) \quad x <_s y \Rightarrow z \dot{+} x <_s z \dot{+} y ,$$

$$(4') \quad x <_d y \Rightarrow x \dot{+} z <_d y \dot{+} z .$$

Viceversa supponiamo che G sia dotato di una relazione ordinale (non vuota) che soddisfi, ad es., alla (4). Definiamo allora in G un sistema G^+ mediante le convenzione:

$$(5) \quad u \in G^+ \Leftrightarrow (y = x \dot{+} u \Rightarrow x <_s y) .$$

Si verifica allora facilmente che G^+ è un monoide soddisfacente ovviamente alla proprietà I. Pertanto:

1°) La (4) oppure la (4') è equivalente alle rispettive proprietà che interrengono nella Def. 1.

Def. 3. Se $y > 0$ e, per ogni intero n è

$$(6) \quad nx <_s y \quad \text{ o } \quad nx <_d y ;$$

x dicesi *infinitesimo attuale sinistro o destro* di y e si scrive:

$$(7) \quad x \ll_s y \quad \text{ o } \quad x \ll_d y ;$$

o più semplicemente

$$(8) \quad x \ll y \quad \text{ se } \quad nx < y .$$

È immediato che [6]:

$$2^0) \quad (\varepsilon \ll_s a, \varepsilon + a = a + \eta) \Rightarrow (\eta \ll_a a) .$$

Considerati tre elementi $a, b, c \in G$:

$$3^0) \quad (a, b, c > 0, b = a + b + c) \Rightarrow (a \ll_s b, c \ll_a b) ;$$

cioè: se un elemento $b > 0$ è uguale ad una sua parte propria, gli scarti a sinistra e a destra sono infinitesimi attuali, rispettivamente sinistri e destri, di b .

Ricordiamo che l'insieme degli elementi $x \in G$ per cui $-x + G^+ + x \subset G^+$ è un sottogruppo K di G , che dicesi il *normalizzante* di G^+ . È immediato che:

$$4^0) \quad (x \in K \text{ o } y \in K) \Rightarrow [(x <_s y) \Leftrightarrow (x <_a y)] .$$

Dalla prop. 3^a seguono inoltre direttamente le:

$$5^0) \quad (x, u, v \in G^+; -x + u + x = -v) \Rightarrow (u \ll_s x, v \ll_a x) .$$

$$6^0) \quad (0 < b <_s a, 2a <_s 2b) \Rightarrow (-b + a \ll_s b) .$$

2. Assioma sugli elementi inconfrontabili.

Gli elementi inconfrontabili non si inquadrano nelle considerazioni sugli ordini di magnitudine (n. 4). Si è perciò ritenuto opportuno, anche in vista di successive applicazioni geometriche, dotare il gruppo G di questa ulteriore proprietà:

V₁) *Il sistema $\mathfrak{I}$ degli elementi inconfrontabili di un po-gruppo G sia un suo sottogruppo invariante.*

Evidentemente: $\mathfrak{I}$ è convesso [7, pag. 90].

Inoltre:

$$1^0) \quad (\varepsilon_0 \in \mathfrak{I}, a \in G^+) \Rightarrow (\varepsilon_0 \ll a) .$$

Infatti: $\varepsilon = n\varepsilon_0 \in \mathfrak{I}$ e $(-\varepsilon + a = b, a - \varepsilon = b_1) \Rightarrow (a = \varepsilon + b, \varepsilon = a - b; a = b_1 + \varepsilon, \varepsilon = -b_1 + a)$.

Pertanto ($b \in J$ o $b_1 \in J$) $\Rightarrow a \in J$ in contrasto con $a \in G^+$ e ($-b \in G^+$ o $-b_1 \in G^+$) $\Rightarrow \varepsilon \in G^+$, in contrasto con $\varepsilon \in J$. Dunque deve essere $b, b_1 \in G^+$; c.v.d.

Alla prop. 5^a del n. 1 si può dare ora un enunciato più generale:

$$2^o) \quad (x, u \in G^+; -x + u + x = u' \notin G^+) \Rightarrow (u \ll_s x, u' \ll_s x).$$

Infatti, essendo J invariante: $u' \notin J$, quindi $u' < 0$ e pertanto è soddisfatta l'ipotesi della prop. 5^a sopra ricordata.

Inoltre, come immediato corollario:

$$3^o) \quad -\overline{x + y \ll_s x} \Rightarrow [x <_s y \Leftrightarrow x <_s y].$$

3. Assioma sugli infinitesimi attuali.

D'ora in poi supporremo che gli infinitesimi attuali di un po-gruppo G godano della seguente proprietà:

$$VI) \quad (\varepsilon \ll_s a) \Leftrightarrow (\varepsilon \ll_a a).$$

Quindi nel seguito scriveremo semplicemente:

$$\varepsilon \ll a.$$

Possiamo ora dimostrare le seguenti proprietà:

$$1^o) \quad (a, \varepsilon_1, \varepsilon > 0) \Rightarrow (a \neq \varepsilon_1 + 2a + \varepsilon);$$

cioè: a non può contenere come parte $2a$.

Infatti da $a = \varepsilon_1 + a + (a + \varepsilon)$ seguirebbe, in base alla prop. 3^a del n. 1, $\eta = a + \varepsilon \ll a$ in contrasto con $-\eta + a = -\varepsilon < 0$.

$$2^o) \quad [a, b > 0, b <_s a] \Rightarrow [nb <_s (2n - 1)a],$$

con n numero naturale.

Infatti da $b <_s a$ segue ovviamente $2b <_s b + a$ e, in base alla prop. 2^a del n. precedente $b + a <_s 3a$; quindi $2b <_s 3a$, ecc..

Analogamente per: $b <_a a$.

$$3^o) \quad (\overline{a \ll b}, \overline{b \ll c}) \Rightarrow \overline{a \ll c} \quad *) .$$

Infatti: $(b <_n na, c <_m mb) \Rightarrow c <_{(2m-1)n} na$.

4. Ordine di magnitudine.

Facciamo la seguente:

Def. 1. $(a, b > 0, \quad \overline{a \ll b}, \quad \overline{b \ll a}) = (a \sim b) .$

1°) La relazione $a \sim b$ data dalla Def. 1 è una relazione di equivalenza.

Che questa relaz. goda delle prop. riflessiva e simmetrica risulta dalla Def. 1 stessa. La prop. transitiva consegue poi direttamente dalla prop. 3° del n. precedente.

Def. 2. Se $a \sim b$ diciamo che a e b hanno il medesimo ordine di magnitudine μ e indichiamo con Σ_μ la rispettiva classe di equivalenza.

Mettiamo in evidenza le seguenti semplici proprietà:

$$2^o) \quad (a, b \in \Sigma_\mu, c <_n a) \Rightarrow \overline{b \ll c} .$$

Infatti: $(nb >_n a >_n c) \Rightarrow (nb >_n c)$.

Analogamente per $c <_n a$.

$$3^o) \quad (a, b \in \Sigma_\mu, \varepsilon \ll a) \Rightarrow \varepsilon \ll b .$$

Infatti: $(nb >_n a, m\varepsilon >_n b) \Rightarrow nm\varepsilon >_n a$, in contrasto con l'ipotesi $\varepsilon \ll a$.

$$4^o) \quad (a \in \Sigma_\mu, \varepsilon \ll a, a = \varepsilon + b) \Rightarrow b \in \Sigma_\mu .$$

*) Per non introdurre troppi particolari caratteri tipografici si indicherà secondo HILBERT, la negazione di una proprietà sopralineandola, ad es.: $a = b \Leftrightarrow a \neq b$.

Infatti: $-\varepsilon + a = b > 0$, $-\varepsilon <_a a \Rightarrow -\varepsilon + a <_a 2a \Rightarrow b <_a 2a$.

Inoltre:

$$\begin{aligned} \{ (0 < -(n+1)\varepsilon + a = -n\varepsilon - \varepsilon + a = -n\varepsilon + b) \\ \Rightarrow \varepsilon \ll b \} \Rightarrow b >_a \varepsilon \Rightarrow 2b >_a a \Rightarrow (a \sim b) \Rightarrow b \in \Sigma_\mu. \end{aligned}$$

Analoga conclusione sussiste nell'ipotesi: $a = b + \varepsilon$.

$$5^\circ) \quad a, b \in \Sigma_\mu \Rightarrow a + b, b + a \in \Sigma_\mu;$$

cioè: Σ_μ è un monoide. Infatti:

$$\begin{aligned} (0 <_s b) \Rightarrow a <_s (a + b), \quad b <_s na \Rightarrow a + b <_s (n+1)a; \\ (0 <_a a) \Rightarrow b <_a (a + b), \quad a <_a mb \Rightarrow a + b <_a (m+1)b; \end{aligned}$$

Analogamente per: $b + a$.

6°) *L'insieme degli ordini di magnitudine μ degli elementi di G può venire ordinato nel seguente modo canonico:*

$$(9) \quad (a_1 \in \Sigma_{\mu_1}, a_2 \in \Sigma_{\mu_2}, a_1 \ll a_2) \Leftrightarrow (\mu_1 < \mu_2).$$

Infatti [4°, 2° del n. 3]: se $a_1 \ll a_2$ la stessa relazione intercede fra ciascun elemento di Σ_{μ_1} e ciascun elemento di Σ_{μ_2} .

Inoltre: $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow \overline{\mu_2 \leq \mu_1}$ e $(\mu < \mu_1, \mu_1 < \mu_2) \Rightarrow (\mu < \mu_2)$.

$$7^\circ) \quad (a \in \Sigma_{\mu'}, b \in \Sigma_\mu; \mu' \leq \mu) \Rightarrow (a + b, b + a \in \Sigma_\mu).$$

Se $\mu' = \mu$ la prop. è vera in base alla 5°. Se $\mu' < \mu$ la prop. è vera come corollario della 4°, od anche direttamente:

$$\begin{aligned} \mu' < \mu \Rightarrow a \ll b \Rightarrow 0 < a < b \Rightarrow (b < a + b < 2b, \\ b < b + a < 2b) \Rightarrow (a + b, b + a \in \Sigma_\mu). \end{aligned}$$

Da questo teorema segue l'importante corollario:

$$8^\circ) \quad a, b \in G^+ \Rightarrow n(a + b) > b + a.$$

E quindi, in base al Lemma 4.1 di P. CONRAD [5], per n opportuno si ha:

$$9^{\circ}) \quad (a < b) \Rightarrow (-a + nb + a > b);$$

$$10^{\circ}) \quad -a + b + na > 0. \text{ Inoltre:}$$

$$11^{\circ}) \quad \eta, \eta_1, \eta_2, a \in G^+: (\eta = \eta_1 + a + \eta_2) \Rightarrow \overline{\eta \ll a}.$$

Infatti tenuto conto delle prop. 4^a, 3^a e della 3^a del n. 1:

$$(a \in \Sigma_\mu, \eta \ll a) \Rightarrow (-\eta + a = b \in \Sigma_\mu), \text{ quindi } \eta \ll b.$$

$$(\eta = \eta_1 + \eta + b + \eta_2 = \eta_1 + \eta + \eta_3) \Rightarrow (\eta \ll b < \eta_3 \ll \eta):$$

ciò che è assurdo. Dunque: $\overline{\eta \ll b}$, quindi: $\overline{\eta \ll a}$ c.v.d.

$$12^{\circ}) \quad (\eta_0, \eta_1, \eta_2, a \in G^+) \Rightarrow (a \neq \eta_1 + a + \eta_0 + a + \eta_2).$$

Infatti: $(a = \eta_1 + a + \eta_0 + a + \eta_2 = \eta_1 + a + \eta) \Rightarrow (\eta = \eta_0 + a + \eta_2 \ll a)$; ciò che, per il precedente teorema, è assurdo.

In base alla 1^a del n. 2: *possiamo attribuire agli elementi inconfrontabili un medesimo ordine di magnitudine μ_0 ; che risulta il minimo ordine di magnitudine.*

Inoltre, sempre in base alla 1^a del n. 2, se due elementi, non appartenenti ad $\mathcal{I}$ non sono confrontabili fra loro, nel senso che la loro differenza è un elemento inconfrontabile, ciò non accade più per un multiplo di uno rispetto all'altro; Pertanto:

13^o) *L'insieme degli ordini di magnitudine è totalmente ordinato.*

Conveniamo di assumere come *ordine di magnitudine di un elemento negativo* quello del suo opposto positivo. Allora dalla prop. 7^a e dalle 1^a, 4^a di questo n. risulta direttamente che:

14^o) *Il sistema di G costituito dagli elementi con l'ordine di magnitudine $\leq \mu$ oppure $< \mu$ è un sottogruppo; che indicheremo*

rispettivamente con G_μ oppure con $G_{<\mu}$. In particolare:

$$15^o) \quad \varepsilon, \varepsilon_1 \ll a \Rightarrow \varepsilon + \varepsilon_1 \ll a.$$

Per le applicazioni geometriche è utile la seguente:

Def. 2. $(-b + a \ll a) = (a \approx b)$ e i due elementi a, b si dicono *quasi-eguali*.

È evidente che $a \approx b \Rightarrow a \sim b$ (cfr. prop. 4°) e che la quasi-eguaglianza è una relazione di equivalenza.

Segue direttamente [2° del n. 1, 15°] che:

$$16^o) \quad (b' = -a + b + a) \Rightarrow \begin{cases} b \ll a \Leftrightarrow b' \ll a, \\ a \ll b \Rightarrow b' \approx b. \end{cases}$$

5. Mappe isotone di G .

Poichè, in base all'Ax V_1 , J è un sottogruppo normale di G , possiamo considerare un gruppo $G_1 \longleftrightarrow G/J$ e il conseguente omonomorfismo canonico.

$$(10) \quad \varphi: G \longrightarrow G_1.$$

J essendo inoltre convesso, al monoide $G^+ \subset G$ corrisponde in φ un monoide $G_1^+ \subset G_1$, che soddisfa in G_1 alle condizioni I, II, III (n. 1). Quindi G_1^+ può assumersi come monoide degli elementi positivi di G_1 .

Pertanto:

1°) Un po-gruppo G (I, II, V_1) è isotono al gruppo fattoriale G/J (I, II, III), che è pertanto un o-gruppo.

Sappiamo che ogni elemento inconfrontabile è infinitesimo attuale rispetto ad ogni elemento positivo. Ammettiamo ora che G goda di questa ulteriore proprietà [1]:

V₂) Ogni elemento che può essere un infinitesimo attuale è un elemento inconfrontabile di G .

Per un tale gruppo G possiamo quindi, in base alla prop. 2° del n. 2, affermare che:

2°) Il monoide $G^+ \subset G$ è invariante,

$$(11) \quad (I, II, V_1, V_2) \Rightarrow IV,$$

cioè G è un por-gruppo (n. 1).

Inoltre, tenuto conto anche della 1°:

3°) Il gruppo $G_1 \longleftrightarrow G/\mathfrak{J}$ è un or-gruppo (n. 1).

6. L'antiautomorfismo ω .

La mappa sul po-gruppo G :

$$f(x + y) = -y + (-x) \quad \text{per cui} \quad f(G^+) = -G^+.$$

è un antiautomorfismo involutorio,

Nella geometria sopra una retta si richiede l'esistenza di un antiautomorfismo involutorio $\omega(x) = \bar{x}$:

$$(12) \quad \overline{x + y} = \bar{y} + \bar{x}, \quad \bar{\bar{x}} = x,$$

per cui: $\omega(G^+) = G^+$.

Il gruppo G risulta allora dotato anche di un automorfismo involutorio:

$$F(x) = f\omega(x) = \omega f(x) = -\bar{x},$$

per cui $F(G^+) = -G^+$; e viceversa: $\omega = fF = Ff$.

Consideriamo pertanto l'ipotesi:

VII) Il po-gruppo G è dotato di un antiautomorfismo ω .

1°) Si verifica facilmente che in un o-gruppo G (I, II, III, VII): le seguenti proprietà sono equivalenti [6,2]:

- (1) ω è l'identità ;
- (2) G è abeliano ;
- (3) G^+ è invariante ;
- (4) G è archimedeo .

È inoltre immediato che [6]:

$$2^\circ) \quad (a > 0, a = \bar{a} + \varepsilon, \varepsilon > 0) \Rightarrow (\varepsilon \ll a) .$$

Infatti $\bar{a} = \bar{\varepsilon} + a$, $a = \bar{\varepsilon} + a + \varepsilon$; che permette inoltre di affermare che:

$$3^\circ) \quad (a \in \text{centro di } G) \Rightarrow (a = \bar{a}) .$$

Dimostriamo ora che:

$$4^\circ) \quad (a + b > 0, a + b = b + a + \varepsilon) \Rightarrow (\varepsilon \ll a + b) ;$$

cioè: il commutatore di una somma positiva è un infinitesimo attuale rispetto alla somma stessa.

Infatti sarà: $a + b = \overline{a + b} + \eta = \bar{b} + \bar{a} + \eta = b + \eta_2 + a + \eta_1 + \eta = b + a + \eta_3 + \eta_1 + \eta$. Quindi, in base alle propp. 2^a (n. 1), 15^a (n. 4) e all'attuale 2^a, $\varepsilon = \eta_3 + \eta_1 + \eta \ll a + b$.

Conveniamo di chiamare un *po*-gruppo che goda della proprietà ora dimostrata *quasi-abeliano*.

Possiamo ora completare la prop. 16^a del n. 4 mediante la seguente, scritta per $a, b > 0$:

$$5^\circ) \quad (a \sim b, b' = -a + b + a) \Rightarrow (b' \approx b) .$$

Infatti: $b' = -a + b + a = -a + a + b + \varepsilon = b + \varepsilon$, con $\varepsilon \ll a + b \sim b$; c.v.d.

Questione aperta. Non si è riusciti a dimostrare che, per un o-gruppo G (I, II, III, VII) l'antiautomorfismo ω sia necessariamente identico oppure dare un esempio in contrario [cfr. 3].

7. Il gruppo delle ampiezze e delle rotazioni.

Sia dato un *po*-gruppo $\mathcal{A}$ (I, II, V₁, VII) dotato di un elemento centrale R di ordine di magnitudine massima.

Poniamo $\pi = 2R$ e $g = 2\pi = 4R$.

Chiameremo $\mathcal{A}$ *gruppo delle ampiezze*.

Poichè il gruppo monogeno (g) generato da g è invariante, possiamo considerare un gruppo $\Gamma \longleftrightarrow \mathcal{A}/(g)$, che si dirà un *gruppo di rotazioni*.

Il sistema $\mathcal{A}^* = \{\alpha \in \mathcal{A}, -\pi < \alpha \leq \pi\}$, dicesi il sistema delle *ampiezze primitive*.

L'omomorfismo $\mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ stabilisce una *mappa biettiva fra $\mathcal{A}^*$ e Γ* .

Un'ampiezza $\varepsilon \ll g$ si dirà semplicemente *infinitesima*. Le ampiezze non infinitesime, il cui sistema indicheremo con $\mathcal{A}_1$, hanno tutte l'ordine di magnitudine di g .

Ogni $\xi \in \mathcal{A}$ ammette una determinata rappresentazione del tipo:

$$(13) \quad \xi = \alpha + mg.$$

con $\alpha \in \mathcal{A}^*$ ed m intero; ecc.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BUSULINI F.: *Sopra una retta elementare parzialmente ordinata*. [Atti dell'Acc. Patavina di Sc., Lett. ed Arti, t. 72 (1959-60)].
- [2] BUSULINI F.: *Contributi alla geometria della retta*. Ann. Università Ferrara, t. 9 (1960-61)].
- [3] BUSULINI F.: *Sopra un antiautomorfismo del gruppo delle lunghezze*. [Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, t. 31 (1961)].
- [4] BUSULINI F.: *Sopra una geometria generale del piano*. [Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, t. 33 (1963)].
- [5] CONRAD P.: *Right-ordered groups*. [Michigan Math. Journal, t. 6 (1959)].
- [6] MORIN U. · BUSULINI F.: *Alcune considerazioni sopra una geometria generale*. [Atti dell'Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Arti, t. 107 (1959)].
- [7] MORIN U.: *Algebra Astratta*. [Cedam, Padova (1955)].