RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

Metodo di assiomatizzazione in senso stretto della meccanica classica. Applicazione di esso ad alcuni problemi di assiomatizzazione non ancora completamente risolti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 32 (1962), p. 55-213

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__55_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

METODO DI ASSIOMATIZZAZIONE IN SENSO STRETTO DELLA MECCANICA CLASSICA. APPLICAZIONE DI ESSO AD ALCUNI PROBLEMI DI ASSIOMATIZZAZIONE NON ANCORA COMPLETAMENTE RISOLTI.

Memoria (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*) [1])

PREFAZIONE

In certe teorie meccaniche, che dirò di classe Γ_3 — per es. in quelle considerate in [17] e [23], dette [2]) in questo lavoro $\mathcal{T}_{P,17}$ e $\mathcal{T}_{S,23}$ —, si definiscono fra l'altro massa e forza, basandosi su idee di G. Kirchhoff e E. Mach, magari limitandosi al caso pura-

---

(*) Pervenuta in redazione il 22 maggio 1961.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Padova.

[1]) Questo lavoro può considerarsi iniziato presso l'Università di Stanford (Cal. U.S.A.) dove potei stare tre mesi nel 1959, sotto lo sponsorato del Prof. P. SUPPES, grazie a una borsa di studio Fulbright assegnatami assieme ad un aiuto governativo per fare ricerche sui fondamenti della meccanica. Risultati contenuti in questo lavoro sono stati presentati al Congresso Internazionale di Logica, Metodologia e Filosofia della Scienza tenuto all'Università di Stanford nell'agosto 1960, a cui potei recarmi grazie agli aiuti dell'Università di Stanford e del Governo Italiano.

Sono grato al Prof. P. SUPPES e al Prof. R. CARNAP per utili discussioni e suggerimenti concernenti direttamente il presente lavoro o ad esso strettamente collegati. Per discussioni su argomenti attinenti al detto lavoro sono grato anche al Prof. B. ROSSER, Prof. H. HERMES e Prof. W. NOLL.

[2]) Spesso la teoria esposta nella r-ma pubblicazione elencata nella bibliografia di questo lavoro sarà indicata con « $\mathcal{T}_{\mathcal{A},r}$ » ove $\mathcal{A}$ è l'iniziale dell'Autore.

mente meccanico [3]). Si tratta di teorie assiomatiche informali (oggettive) che per certi aspetti differiscono profondamente da teorie assiomatiche appartenenti al campo geometrico, in particolare dagli Elementi di Euclide.

Le suddette teorie meccaniche, pur andando considerate come rigorose tenendo conto del loro genere ed anche dei tempi in cui sono state pubblicate, differiscono però dalle teorie geometriche, fra l'altro, per una certa mancanza di un analogo dei postulati di esistenza della geometria [4]), analogo che appare necessario per la dimostrazione di qualche teorema enunciato nelle considerate teorie meccaniche [n. 10]. Tali analoghi sembra sian sottintesi sistematicamente nelle dette teorie ed il problema di determinarli rigorosamente appare avere un carattere generale in quanto investe il tipo di assiomatizzazione da usarsi. Infatti una notevole manifestazione, per così dire materiale, della detta differenza fra teorie geometriche e le teorie meccaniche di classe Γ_3 si ha nell'uso di periodi ipotetici della irrealtà, in certo senso essenziale, fatto, per es., in $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ per definire certe accelerazioni potenziali.

Nei procedimenti involgenti la detta accelerazione potenziale sembra che o siano impliciti opportuni assiomi — analoghi a quelli di esistenza ed unicità della geometria — da cui [n. 10] seguono l'unicità ed esistenza di tali accelerazioni, o tale esistenza e tale unicità siano affermate ma non sia sufficientemente chiaro il loro significato; in sostanza si avverte fra l'altro l'esigenza di precisare come concetti potenziali, definiti con condizionali (periodi ipotetici) della irrealtà, possano intervenire rigorosamente nelle dimostrazioni.

La natura logica dei detti problemi appare più chiaramente quando si cerchi di spogliare del loro contenuto oggettivo i concetti di una teoria del tipo di $\mathcal{T}_{P,17}$ o $\mathcal{T}_{S,23}$ e di passare così ad una corrispondente teoria astratta senza alterazione del carattere di dimostrabilità o meno delle singole proposizioni (intese

---

[3]) Dirò caso puramente meccanico quello in cui le proprietà fisiche dei corpi non variano.

[4]) Per es., il seguente: *Per due punti distinti passa una (ed una sola) retta.*

naturalmente). Le $\mathcal{T}_{P,17}$ e $\mathcal{T}_{S,23}$ non sono di tipo completamente matematico [def. 6.1] [5]) in quanto il precedente passaggio non è possibile (senza alterare profondamente le teorie stesse).

Sono stati dati interessanti contributi al problema di costruire rigorose teorie di classe Γ_3 assiomatiche in senso stretto, alcune più complesse delle $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$, altre più semplici. Si sono precisati i precedenti analoghi dei postulati di esistenza della geometria in postulati di esistenza ma, come è stato osservato — v. [19] —, la cosa involge grosse restrizioni.

La formulazione di un certo paradosso esterno PE_1 di carattere generale [n. 7] che ha luogo non solo in teorie di classe Γ_3 (ma non ha luogo in teorie autonome del tipo della Meccanica analitica) mi ha indirizzato verso una esplicita concezione modale della Meccanica e della Fisica in genere, e mi ha indotto a considerare la possibilità fisica come implicita nelle teorie fisiche [6]), all'incirca sullo stesso piano dei concetti primitivi, o come implicita in alcuni di questi. La considerazione del paradosso PE_1, delle teorie $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$, e dei suaccennati contributi mi hanno indotto a ritenere essenziale una opportuna esplicitazione della possibilità fisica almeno in teorie di classe Γ_3.

Tenendo conto della possibilità fisica si spiega il paradosso esterno PE_1. Però, a quanto mi consta, non sono state ancora pubblicate rigorose regole su tale possibilità, le quali possano ritenersi senz'altro sufficienti per basarvi una rigorosa teoria assiomatica fisica. Inoltre, fra l'altro, anche recentemente, e in sostanza sempre a proposito dei detti problemi, si sono considerati postulati modali (involgenti in modo esplicito la possibilità) e si sono

---

[5]) « Def. 6. 1 » indica la prima definizione del n. 6. L'analogo vale per assiomi, teoremi, osservazioni ecc.

[6]) Ciò, come si vedrà, è conforme alla teoria della possibilità causale di A. Burks — v. [3] — e il detto paradosso PE_1 è una particolare manifestazione della differenza fra implicazione causale ed implicazione materiale osservate appunto in [3].

Il paradosso PE_1 è interessante per la relazione che ha con i considerati problemi di assiomatizzazione, e forse anche prescindendo da ciò, in quanto esso si basa su una proposizione Σ_1 avente struttura e proprietà forse nuove in esempi di tal genere, cfr. nota [29]) al n. 7.

fatte osservazioni in base alle quali se ne è sconsigliato l'uso — v. n. 4; nota 24, *c*) —.

Mediante la « risoluzione » estensionale (ossia basata sulla logica ordinaria, quella, per es., della geometria) data nel n. 8 al paradosso PE_1, si delinea un metodo estensionale che permette di usare la possibilità fisica e di risolvere i precedenti problemi di assiomatizzazione costruendo una teoria $\mathcal{T}_1$, di classe Γ_3, assiomatica in senso stretto e senza le suaccennate restrizioni.

La teoria $\mathcal{T}_1$ (come pure una certa sua semplificazione $\mathcal{T}_2$) si può considerare come uno sviluppo delle $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ e come una loro precisazione in riguardo ai problemi precedenti ed anche ad altri di natura più particolare.

Si può fra l'altro dire che con $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ viene ridotta la differenza fra le precedenti teorie, informali o assiomatiche in senso stretto, e appartenenti, per es., alla classe Γ_3, da un lato, e le teorie geometriche, dall'altro.

* * *

Il presente lavoro è diviso in tre parti. La prima ha anche ufficio di introduzione alle altre due. In essa si mette in luce il suaccennato problema di assiomatizzazione appartenente ai fondamenti della Meccanica razionale (e anche della Fisica), si mostra come la possibilità fisica sia insita nelle (basi delle) teorie fisiche (ed in ciò ci si serve largamente del paradosso esterno PE_1), si delinea il suaccennato metodo estensionale e si mostra l'opportunità di usarlo (nella seconda parte del presente lavoro) per la costruzione delle dette teorie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$. Lo stesso metodo è poi usato nella terza parte, per ulteriori sviluppi della $\mathcal{T}_1$ e per discutere questioni connesse con tali teorie.

Il lettore può subito trovare indicazioni più particolareggiate circa il contenuto di una qualunque delle dette tre parti nel relativo numero introduttivo.

Lo sviluppo della teoria informale (oggettiva) $\mathcal{T}_1$ — o $\mathcal{T}_2$ — fatto nella seconda parte, ha già una certa compiutezza (vi si definiscono massa e forza e riferimento inerziale) onde tale parte dà già una idea abbastanza completa di come il considerato metodo estensionale si applichi. A rigore, almeno considerando la

$\mathcal{T}_1$ come una teoria formale, la trattazione di $\mathcal{T}_1$ fatta nella seconda parte può ritenersi come indipendente dalla prima parte.

Alla fine del presente lavoro, prima dell'indice generale, si è posto un elenco dei simboli usati.

PARTE I

Su alcune difficoltà che si incontrano nella costruzione di certe teorie assiomatiche della meccanica. Metodo estensionale che permette di superarle mediante un esplicito uso della possibilità fisica, insita in tali teorie.

1. Considerazioni introduttive alla Parte I.

Come si è detto nella prefazione, la prima parte del presente lavoro non solo ha, rispetto alle rimanenti, un ufficio introduttivo, ma presenta interesse anche in sè stessa, in quanto vi si fa un raffronto fra le assiomatizzazioni nel campo geometrico ed in quello della fisica classica, in particolare della Meccanica.

A tale scopo si considerano tre classi Γ_1, Γ_2 e Γ_3 di differenti teorie, classi che praticamente contengono le teorie appartenenti alla Meccanica classica. Γ_1 contiene teorie come quelle autonome di Meccanica analitica; Γ_2 contiene teorie come la meccanica di Galileo-Newton ed è intermedia tra Γ_1 e la Γ_3 accennata nella prefazione.

Come esempio di teoria di classe Γ_1 si considera brevemente, ma in modo per alcuni aspetti completo, una certa teoria $\mathcal{T}_{MA}$, assiomatica in senso stretto.

Si considera poi la possibilità fisica come una proprietà della natura, e si osserva (a titolo di preliminare) il carattere in certo senso contingente di alcuni concetti, basilari per la meccanica e semplici. Questi vengono poi confrontati con altri molto più complessi ma che sono usati anche comunemente come concetti non contingenti. Solo tali concetti si considerano come appartenenti a teorie di classe Γ_1.

Si mostra poi come le teorie di classe Γ_1 sian dello stesso tipo

di quelle geometriche; più in particolare, in primo luogo si considera una interpretazione della $\mathcal{T}_{MA}$ basata sulla possibilità fisica (con la quale interpretazione tale teoria dice effettivamente qualcosa sulla realtà), e in secondo luogo si osserva che $\mathcal{T}_{MA}$ è sia di tipo completamente matematico che semanticamente unitaria — ossia, brevemente, suscettibile di esser considerata come dotata di una sola (intesa) interpretazione fisica di tipo estensionale (matematico) [def. 6.2] —. I concetti su cui la $\mathcal{T}_{MA}$ si basa sono però assai complessi sia per struttura che per sostanza, essi involgono fra l'altro i concetti di massa e di forza cosicchè il metodo non può applicarsi, senza essenziali modifiche, alla risoluzione dei problemi di assiomatizzazione concernenti teorie di classe Γ_3, considerati nella prefazione.

Quando si passa dalla classe Γ_1 alla Γ_2 o, specialmente, alla Γ_3, la somiglianza con le teorie geometriche viene meno. Si mostra ciò considerando il suddetto paradosso esterno PE_1 che ha appunto luogo nelle teorie assiomatiche in senso stretto, di classe Γ_2 o Γ_3, le quali da un lato trattano concetti contingenti direttamente, ossia conservando la loro struttura usuale, dall'altro sono di tipo completamente matematico (e quindi basate su di una logica estensionale). Il paradosso PE_1 consiste nella dimostrabilità in tali teorie estensionali di una proposizione Σ_1 che è invece falsa nella sua interpretazione naturale. Attraverso la susseguente discussione e « risoluzione estensionale » del paradosso PE_1 viene messa in luce fra l'altro la presenza della possibilità fisica in certe naturali interpretazioni di proposizioni fisiche, e la impossibilità di considerare queste come dotate della loro suaccennata interpretazione naturale, entro le suddette teorie fisiche.

Si mostra poi, discutendo in particolare la teoria $\mathcal{T}_{P17}$ [cfr. Prefazione e n. 10] e altre, che la suddetta impossibilità si riflette sulle teorie di tipo completamente matematico e di classe Γ_2 o Γ_3 in quanto esse risultano essere non semanticamente unitarie (e in connessione con ciò qualche noto teorema acquista in esse il carattere di meta-teorema). Inoltre, la considerata impossibilità ha ripercussioni assai più sensibili in quelle di tali teorie che son di classe Γ_3, sotto forma di grosse restrizioni.

Anche per render più chiara la lettura del lavoro, si considerano, in forma semplificata ma fisicamente accettabile, alcuni procedimenti atti a definire la massa, effettivamente usati in teorie formali estensionali di classe Γ_3, e si mostra come, per evitare le dette restrizioni insite in queste teorie, sia utile usare il metodo estensionale delineato per risolvere il detto paradosso PE_1, metodo che si può considerare come una piuttosto diretta estensionalizzazione di una concezione modale della Meccanica [7]), e che si può caratterizzare mediante la sostituzione del linguaggio fisico ordinario ed usuale $\mathfrak{L}^*$ con uno $\mathfrak{L}$ poco diverso da $\mathfrak{L}^*$, ordinario ma assai poco in uso.

Si discute infine come, attualmente, il detto metodo estensionale, connesso con $\mathfrak{L}$, sia preferibile ad uno direttamente connesso con $\mathfrak{L}^*$, quindi basato su di una logica modale.

2. Sull'assiomatizzazione nel campo geometrico e matematico in genere. Teorie assiomatiche oggettive (informali), teorie assiomatiche in senso stretto (matematicamente formali). Cenni sull'assiomatizzazione logistica.

Come è ben noto, la geometria ha raggiunto una sistemazione logica rigorosa già al tempo degli antichi greci. La geometria di Euclide ha un contenuto oggettivo e per questo si dice che è una teoria assiomatica informale o materiale — V. [11] pg. 28, riga 10 —. Spogliando i concetti primitivi di una tale teoria T del loro contenuto oggettivo, e non conservando altro che la loro struttura logica — la quale potrebbe consistere, per es., nell'essere una relazione binaria —, i postulati (o assiomi) della *T-oggettiva* divengono condizioni esprimibili entro la teoria degli insiemi astratti (con l'aggiunta dell'analisi matematica, se non si vuole pensare anche la elementare parte di questa che interessa, come parte della teoria degli insiemi astratti).

L'n-pla $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ dei concetti primitivi della T diviene,

---

[7]) Tale metodo mi è stato suggerito da certe regole semantiche (di interpretazione) estensionali che R. Carnap dà a certi linguaggi modali considerati in [6].

nella suddetta trasformazione che li priva del loro contenuto oggettivo, la generica n-pla soddisfacente le suddette condizioni [8]).

Dirò che queste condizioni costituiscono gli assiomi di una teoria astratta T^a, che chiamerò anche la *T-astratta*; talvolta dirò pure che queste condizioni sono espresse dai suddetti assiomi (intesi in senso verbale).

La congiunzione [9]) di questi assiomi, pensata come un attributo di $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ si può chiamare *concetto esplicito del sistema di assiomi* — V. [5] pg. 175, riga 15. —.

Si può anche dire che la considerata n-pla $\langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$ è un sistema di oggetti — V. [11], § 8, pg. 24 — e che la T^a è una teoria assiomatica formale o esistenziale.

Dirò anche che la teoria T^a è *assiomatica in senso stretto*, oppure che è *matematicamente formale*. Dirò matematicamente formale per mettere in evidenza la differenza fra la teoria T^a e le teorie completamente formali o *logisticamente formali* [10]), le quali sono trattate completamente come oggetto di studio, cosicchè nel costruire una dimostrazione appartenente ad esse, non ci si lascia guidare inconsapevolmente nemmeno dalla struttura logica rimasta ai concetti primitivi della T [11]).

---

[8]) È bene intendere che in tale n-pla, $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ siano oggetti di date strutture logiche e basati su un prefissato dominio D di individui, cioè $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ si possano costruire a partire da D usando, come operazioni, nessi appartenenti alla teoria degli insiemi astratti (per $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{C}_i$ può essere un elemento di D o un suo sottoinsieme o, per es., una classe di coppie di tali sottoinsiemi, ecc...).

[9]) La congiunzione delle affermazioni A e B è l'affermazione « A sussiste e B pure ».

[10]) Tali teorie sono considerate come insiemi di proposizioni, e sono basate su un calcolo logico dotato di regole di formazione e regole di trasformazione (o deduzione); in particolare anche tutti gli assiomi (o schemi d'assioma) logici sono esplicitati. Di conseguenza si possono verificare le dimostrazioni senza basarsi minimamente sul significato di ciò che in esse si dice.

Una teoria considerata come associata a determinate regole di formazione e di trasformazione si dice anche *un calcolo*.

[11]) Fra i calcoli logici conviene notare quello basato sulla teoria

In T^a la suddetta n-pla non viene ulteriormente specificata e si dice che è definita implicitamente dagli assiomi. Questi a rigore determinano il loro relativo concetto esplicito, ossia in sostanza la classe di n-ple descritta dalla precedente $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle$.

In questo lavoro con *specificazione* [12]) di una teoria astratta T^a intenderò precisamente la teoria ottenuta dalla T^a mediante una specificazione di $C_1, \ldots, C_n$, cosicchè se, come nel caso considerato, la T^a proviene da una teoria oggettiva T, questa è appunto una specificazione della T^a. Di due specificazioni della T^a dirò che l'una è un *modello* dell'altra.

La considerata teoria astratta T^a vien detta teoria assiomatica formale o esistenziale, v. [11] pg. 28, riga 20. Come è ben noto, l'assiomatizzazione formale è stata sistematicamente applicata nei « Grundlagen der Geometrie » (1899) da D. Hilbert, il quale poi fece del metodo stesso, oggetto di studio della metamatematica. Come è noto in questa scienza la deduzione si studia dal

---

dei tipi determinato da R. CARNAP in [5], per le sue numerose applicazioni come linguaggio (e calcolo) logico base di numerosi sistemi di assiomi *ASs*. Tali applicazioni costituiscono esempi di formalizzazione logistica.

Dato che tale formalizzazione viene spesso considerata come sostanzialmente equivalente ad una assiomatizzazione matematica in senso stretto, negli *ASs* si possono avere esempi di tale assiomatizzazione (che è quella che principalmente interessa in tale lavoro). Nella T (o T^a) *-verbale*, $C_1, \ldots C_n$ sono termini detti *costanti assiomatiche della* T (o T^a). Dalla T (o T^a) intesa come calcolo, si ha la T in senso completo mediante regole semantiche (ossia di interpretazione). Quando queste siano date si dice che la T è un calcolo interpretato — v. [5], n. 26b, pg. 102 —.

Una qualunque specificazione T' della T^a si può chiamare una *interpretazione* della T (o T^a) — intesa in senso verbale, e la T stessa la intesa interpretazione dell'ultima. Per concetti più precisi vedi [5] n. 42b, pg. 171-173.

Per la precisione si può ricordare che il calcolo logico determinato in [5] è basato sulla teoria dei tipi ed ha carattere logicista (ossia in esso i numeri naturali vengono definiti per via puramente logica). Mentre ve ne sono altri pure di indirizzo logicista ma non basati su una teoria dei tipi. Per es., in [20], conformemente ad idee di QUINE, tale teoria è sostituita da una teoria della stratificazione.

[12]) In [11], pg. 29, riga 2, si chiama « application of the formal axiomatic theory » ciò che qui è detta specificazione.

punto di vista logistico (e non logicista). In particolare si hanno metodi diretti a stabilire la correttezza di dimostrazioni appartenenti alla teoria oggetto, nei quali si prescinde completamente dal significato dei simboli [13]).

Dirò *metodo estensionale di astrazione* (*MEA*) quello con cui si è passati dalla teoria oggettiva T alla teoria astratta T^a. Esso consiste in sostanza nel considerare le proprietà come classi, le relazioni ad n argomenti come classi di n-ple, le funzioni come particolari relazioni. Ciò equivale sostanzialmente a pensare la T come basata sulla ordinaria logica estensionale, quella di De Morgan, Boole, Frege e Russel, in particolare, sull'implicazione materiale di Russel. Stante l'attuale sviluppo delle teorie di logica estensionale o calcoli logici estensionali, determinata rigorosamente una teoria astratta T^a concernente un sistema di oggetti, son noti vari criteri la cui materiale applicazione alla T^a permette di porla in forma logistica basandola su uno o l'altro dei detti calcoli logici.

Nota la T, per avere la T^a basta dunque specificare il tipo logico dei concetti primitivi della T, e ciò è relativamente semplice nel caso di teorie assiomatiche informali (oggettive) come la geometria di Euclide, purchè queste siano già in forma abbastanza rigorosa [14]).

Sebbene quando si tratti di passare da una ordinaria teoria informale T alla sua forma astratta, in pratica il lavoro diretto ad aumentare la precisione ed il rigore sia considerevole — V. nota (14) — in varie considerazioni teoriche si possono ritenere la T e la T^a, verbalmente intese, come coincidenti.

L'esigenza della precisione e del rigore logico-matematico è andato sempre aumentando e la costruzione di teorie astratte segna una notevole meta in questo processo che è connesso con lo studio dei fondamenti della matematica.

La sola possibilità di passare senza troppo lavoro da una teoria oggettiva (informale) T alla sua forma astratta T^a mediante

---

[13]) Vedi note ([10]) e ([11]).

[14]) In pratica possono rendersi necessarie laboriose trasformazioni; v. [11], pg. 61, riga 8 e seguenti.

una applicazione più o meno diretta del metodo estensionale di astrazione, costituisce una misura del rigore già raggiunto in T, e allo stesso tempo permette di aumentarlo — si consideri che l'applicabilità del metodo MEA alla T è condizione preliminare per la costruzione di suoi modelli matematici particolari, anzi la reale applicazione del metodo MEA aiuta nella costruzione dei detti modelli; si consideri inoltre che questi modelli si sono dimostrati molto utili in varie questioni concernenti i fondamenti di teorie anche informali, quali quelle della compatibilità degli assiomi, della loro indipendenza (metodo di A. Padoa) e della loro completezza —.

Si può anche accennare al fatto che, costruendo la T^a, si dà un'altra prova del rigore già raggiunto dalla T e si dà un altro contributo a tale rigore, in quanto per il suddetto sviluppo della logica estensionale si hanno tutti i mezzi per considerare la T^c dal punto di vista logistico e verificare le deduzioni in essa fatte prescindendo completamente dal significato dei simboli in esse usati.

Dunque nel campo geometrico e matematico in genere, l'assiomatizzazione è molto progredita sia in estensione che in rigore, grazie alla possibilità di applicare in modo piuttosto diretto il suddetto metodo estensionale di astrazione, e in particolare grazie alla possibilità di basarsi appunto su una logica estensionale.

All'avanzata fase della assiomatizzazione nel campo matematico, fa appunto riscontro, nel campo logico, un grande sviluppo delle teorie logiche formali (logistiche) estensionali.

3. Prime considerazioni sull'assiomatizzazione in fisica e in particolare in Meccanica. Preliminare ripartizione delle teorie meccaniche in tre classi Γ_1, Γ_2 e Γ_3. Sommario esempio di una teoria $\mathcal{T}_{MA}$ assiomatica astratta, di classe Γ_1.

Nel campo fisico l'assiomatizzazione in senso stretto è assai meno progredita che nel campo matematico [15]). Però, in questi

[15]) Mi sembra utile riportare a tal proposito i seguenti quattro passi da [10], 1955, con l'avvertenza che ivi l'Autore considera nella ricostru-

ultimi anni almeno all'estero [16]) essa è entrata in una fase di rapido sviluppo.

È ben noto che dopo che Galilei e Newton posero le leggi fondamentali della Meccanica, si delinearono altri due modi di introdurre tale scienza; uno è quello sintetico proprio della meccanica analitica considerata in modo autonomo per cui si trattano

---

zione logica di una teoria scientifica tre fasi: la matematizzazione, l'assiomatizzazione e la formalizzazione; e intende la formalizzazione in un senso diverso da quello qui usato, direi quasi opposto. (Infatti H. Hutten dice in sostanza che nella formalizzazione « apart from axioms, definitions and syntactic rules, we have also semantic rules interpreting the expressions of the theory in terms of experience ». V. pg. 42 riga 25-27).

Ecco i preannunciati passi:

I) « Many attempts have been made to axiomatize physical theories but only Carathéodory's axiomatisation of the first and second law of thermodynamics is generally accepted ». Pg. 42, righe 21-24.

II) « No example of completely formalised language rich enough to allow formulation of a modern scientific theory has as yet been worked out. What is important, however, is to show how semantics as far as it is developed to-day can help us in understanding the language and methods of science. We may not be able to give a complete set of postulates, rules, etc. But in actual science it is useful already to formalise language to a certain degree, as best we can, by giving some definitions and rules. A little formalisation is better than none at all. » V. pg. 46-47.

III) « Obviously, the origin of Newtonian theory from simple mechanical experience shows that it possesses limitations. But the attempts to improve our grasp of the concepts of mechanics by constructing an axiom systems continues and, recently some progress was made). Although Newtonian mechanics is the simplest kind of theory physicists have ever created, it is a theory that so far, has defied all attempts at a complete analysis. », V. pg. 75 righe 1-8.

IV) « The variational approach to mechanics, then, opens a way to many new interpretations. Each system of mechanics so constructed is mathematically more elegant, but logically not more satisfactory, than the Newtonian system; for the basic concepts are not intuitively clear, and many implicit assumptions are made ». V. pg. 81 righe 7-12.

[16]) È da ricordare in primo luogo il Symposium sul metodo assiomatico con speciale referenza alla geometria e alla fisica, tenuto a Berkeley nel dicembre 1957, e in secondo luogo il Colloquio Internazionale sull'Assiomatica tenuto a Parigi nel settembre 1959.

come primitivi concetti complessi, che possono identificarsi, per es., con i seguenti cinque:

1) Sistema $\mathcal{S}$ di classe $\mathcal{S}\mathcal{M}$, ovvero sistema meccanico costituito da un corpo $\mathcal{C}$ — per semplicità particellare — soggetto a un dato sistema $\mathcal{V}$ di vincoli lisci e ad un dato campo CF di forze, in generale, dipendenti dalla posizione e velocità degli elementi di $\mathcal{S}$ e dal tempo.

2) L'n-pla $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ delle masse degli elementi di $\mathcal{S}$ misurati, per es., in grammi massa;

3) moto di classe $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$, ossia moto di $\mathcal{S}$ (o di $\mathcal{C}$) compatibile con i vincoli $\mathcal{V}$ e considerato come un'n-pla $\mathcal{M}$ di funzioni da interpretarsi come rappresentante un vero moto permesso ad $\mathcal{S}$ da $\mathcal{V}$, in un prefissato riferimento inerziale K_0 [$\mathcal{M}$ è detto pure moto cinematicamente possibile per $\mathcal{S}$] [17]);

4) moto di classe $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$, ossia moto di $\mathcal{S}$ (o di $\mathcal{C}$) compatibile con i vincoli e il campo CF, detto pure possibile moto naturale di $\mathcal{S}$;

5) (sistema di) equazioni $\mathcal{E}_2(\mathcal{S})$ rappresentanti il campo di forze attive CF agenti su $\mathcal{S}$.

Nella teoria autonoma $\mathcal{T}_{MA}$ di meccanica analitica che si sta delineando, si posson poi definire la (rappresentazione nel riferimento K_0 della) generica configurazione permessa a $\mathcal{S}$ all'istante t, gli spostamenti virtuali e il lavoro virtuale, e inoltre le velocità degli elementi di $\mathcal{S}$, l'energia cinetica di $\mathcal{S}$ ecc.... in corrispondenza del generico moto di classe $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ e del generico istante t.

Gli assiomi di $\mathcal{T}_{MA}$ possono consistere in condizioni di regolarità ed esistenza sui moti di classe $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ o $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$, nell'inclusione $\mathcal{M}_2(\mathcal{S}) \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ e nella affermazione che ogni moto appartenente a $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$, soddisfa il principio variazionale di Hölder [18]).

---

[17]) Al concetto primitivo $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ può sostituirsi quello di sistema di equazioni $\mathcal{E}_1(\mathcal{S})$ rappresentante rispetto al riferimento K_0 i moti $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$- ossia soddisfatto per definizione da tutti e soli i moti appartenenti a $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ —.

[18]) Talvolta si chiamano dinamicamente possibili per S i moti appar-

Nella $\mathcal{T}_{MA}$ si possono poi introdurre le coordinate lagrangiane e al tempo stesso definire sistema olonomo ad N gradi di libertà e sistema anolonomo; si hanno allora tutti i mezzi per dimostrare che per un qualunque sistema di tal tipo e opportunamente regolare, i moti $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$ sono quelli che soddisfanno le equazioni di Lagrange e rispettivamente quelle di Maggi (oppure le equazioni di Appel) [19]).

Dirò sintetiche o di classe Γ_1 le teorie che appunto come la $\mathcal{T}_{MA}$ assumono come primitivi concetti complessi del tipo dei precedenti, dunque concetti che, fra l'altro, presuppongono o includono (come casi particolari) quelli di massa e di forza.

Nella concezione della Meccanica che discende direttamente da Galileo e Newton, come concetti primitivi si possono considerare gli spazi inerziali (considerati in senso qualitativo, ossia come insiemi di punti), il tempo assoluto (insieme di istanti), le misure dello spazio e del tempo, il moto di un elemento (punto)

---

tenenti a $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ e soddisfacenti il detto principio di Hölder — o equazioni a questo equivalenti, equazioni che possono essere per es. quelle di Lagrange o quelle di Appel —; poi implicitamente si identifica la classe $\mathcal{M}^{dp}(\mathcal{S})$ di questi con la precedente $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$.

A parte la questione se il significato fisico del principio di Hölder venga reso in modo fisicamente soddisfacente, l'eguaglianza $\mathcal{M}^{dp}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_2(\mathcal{S})$ vale se per S vale il teorema di unicità del moto soddisfacente arbitrarie condizioni iniziali permesse dai vincoli — ossia condizioni iniziali soddisfatte da qualche moto della classe $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ —. Va però osservato che in notevoli questioni concernenti il principio dei lavori virtuali — vedi [4] — la validità di tali teoremi non è presupposta, di più, per ogni intero n, essa non sussiste per certi sistemi a vincoli unilaterali, rappresentati analiticamente da funzioni continue assieme alle loro derivate di ordini 1, 2,..., n — vedi [2] —. Nel primo di tali casi non è opportuno assumere a priori che sia $\mathcal{M}^{dp}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_2(\mathcal{S})$. Nel secondo di essi tale eguaglianza è da ritenersi falsa, magari come conseguenza di qualche postulato, per es., un analogo del postulato fondamentale della statica enunciato in [18] a pg. 425.

[19]) Infatti se $\mathcal{S}$ è uno dei detti sistemi, allora, come è noto, la classe dei moti risolventi le relative dette equazioni coincide con $\mathcal{M}^{pd}(\mathcal{S})$; e questa, se $\mathcal{S}$ è sufficientemente regolare in modo che per le dette equazioni valga il teorema di unicità considerato in nota [18]), non può differire dalla $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$.

materiale M, oppure la posizione $pos_K(M, \vartheta)$ di M ad un dato istante ϑ e in un dato riferimento spazio-temporale inerziale K, infine massa e forza.

È noto come si sia considerato utile dare delle definizioni di forza e di massa e di riferimento inerziale [20]).

È perciò sorto un altro modo di introdurre la Meccanica razionale, per opera di Kirchhoff, Mach ed altri, in cui si tende ad approfondire i fondamenti della Meccanica essenzialmente col porre definizioni per alcuni dei precedenti concetti basilari.

Dirò di classe Γ_3 le teorie fatte da questo punto di vista; e considererò naturalmente importante requisito per esse l'avere concetti primitivi poco numerosi e anche relativamente semplici e di semplice struttura.

Conviene poi considerare una classe Γ_2, intermedia fra le Γ_1 e Γ_3, in cui possano porsi teorie come la Meccanica di Newton e le ordinarie trattazioni dei sistemi continui fatte in testi di Meccanica Razionale quali ad esempio [23].

4. Considerazioni preliminari sulla possibilità fisica.

Si consideri ora il fatto che vi sono infiniti modi in cui è fisicamente possibile che l'universo evolva, e tutti devono obbedire alle leggi fisiche, in particolare a quelle meccaniche (almeno con una approssimazione in complesso buona), cosicchè, fra l'altro, fatti che si verificano in una delle precedenti evoluzioni fisicamente possibili non si verificano invece in altre.

Per illustrare il punto di vista a cui mi attengo nel presente lavoro — dove fra l'altro si costruisce una teoria assiomatica $\mathcal{T}_1$ di classe Γ_3 — conviene dire sin d'ora che per ragioni tecniche che appariranno meglio in seguito (l'esigenza di evitare certe restrizioni) non è opportuno considerare come fisicamente possi-

---

[20]) *a*) Newton aveva dato una definizione di massa, ma in un modo considerato un circolo vizioso — v. [10] — pg. 76, riga 11 dal basso.

b) « The usual criticism is to point out that it is undesirable to take ' force ' as an undefined, primitive term and to rely on an intuitive understanding of what it means. It is just this athropomorphic interpretation of ' force ' as suggested by daily experience that seems to be against all scientific experience ». V. [10] pg. 77, righe 1-5.

bile per definizione ogni evoluzione che soddisfi le leggi fisiche. Ciò si potrà fare [21]) riferendosi ad una teoria di classe Γ_2, in cui le leggi possono considerarsi come condizioni aperte nella generica evoluzione η dell'universo [22]). Non è opportuno farlo in teorie di classe Γ_3 in cui per definire la massa si usano postulati di possibilità traducibili in proposizioni della forma:

« Esiste una evoluzione fisicamente possibile η dell'universo (brevemente una EUFP-evoluzione η) in cui... ».

Infatti nelle accennate teorie di classe Γ_3, che fanno capo a E. Mach — e che comprendono anche quella esposta nel noto volumetto [17], detta qui $\mathcal{T}_{P,17}$ — i corpi (ossia i punti materiali) son considerati come dati indipendentemente dalle evoluzioni dell'universo a cui posson partecipare. Allora applicando alla lettera la precedente definizione di possibilità fisica, per es., alla teoria $\mathcal{T}_1$ (e naturalmente identificando le leggi fisiche con i suoi assiomi) risulterebbe che, dato un numero positivo ϱ e due particelle qualsiasi, è fisicamente possibile che queste si muovano come se ϱ fosse il rapporto delle loro masse.

Si può osservare che ciascuna delle considerate evoluzioni fisicamente possibili è logicamente compatibile con gli assiomi di $\mathcal{T}_1$, ma non lo è il loro complesso, per es. a causa della condizione di necessità *b*) insita nell'assioma 20.1 — v. parte 2° — il quale costituisce una versione della legge di azione e reazione, del tipo di quella introdotta da E. Mach (un più semplice esempio di tali condizioni di necessità è la condizione 10.2). Piuttosto che evoluzioni dell'universo singolarmente compatibili con le

---

[21]) Per esempio H. HUTTEN scrive « So long as no known physical law is violated, we are entitled to say that it is physically possible to observe a given thing or event ». V. [10] pg. 52, righe 10-12. Egli sembra riferirsi ad una teoria del tipo della meccanica di Newton di cui delinea una assiomatizzazione logistica a pag. 232, riga 16 (servendosi dell'implicazione materiale di Russel). Ad ogni modo la precedente definizione di possibilità fisica sembra accettabile, per es., in connessione alla semplice teoria — $\mathcal{T}_{MK14}$ — esposta in [14].

[22]) Si tratta di leggi dotate di enunciati quali il seguente enunciato *E* « se *m, a ed f sono la massa di M, la sua accelerazione e la forza totale subita ad un istante t, allora è* $m\,a = f$ », ove naturalmente un riferimento esplicito alla evoluzione η non figura, cfr. n. 8.

leggi fisiche, in relazione a teorie come la $\mathcal{T}_1$, mi sembra opportuno considerare un *insieme di tali evoluzioni, compatibile con le dette leggi.* Si noti che *la riunione di tali insiemi non è compatibile con le leggi fisiche, sebbene ogni evoluzione appartenente a tale riunione lo sia se considerata singolarmente.*

A quanto mi consta le uniche teorie di classe Γ_3 non dotate di postulati del tipo precedente — ossia quelle esposte in [8] e [9], accennate in seguito con $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ rispettivamente — contengono assiomi restrittivi [23]). Come si vedrà meglio in seguito, da ciò, da alcune considerazioni fatte su un certo paradosso esterno [24]) dimostrato nel n. 7, e dalla considerazione delle teorie

---

[23]) Della presenza di tali restrizioni nella teoria $\mathcal{T}_{H8}$ si occupa per es. B. ROSSER in [19].

[24]) Sono grato al Prof. B. ROSSER per le indicazioni che durante il Congresso Internazionale di Matematica di Edimburgo 1958, mi ha dato in connessione con una da me cercata risoluzione modale del detto paradosso esterno. Questo paradosso, come si mostrerà meglio in seguito, induce ad attenersi ad un punto di vista modale (ossia basato sulla possibilità) nella trattazione assiomatica di una qualunque parte della meccanica, anzi della fisica.

b) Al Colloquio Internazionale sull'assiomatica di Parigi 1959, ho accennato al detto paradosso chiedendo se non fosse opportuno basare un'assiomatizzazione della Meccanica su un tipo di implicazione stretta (modale) anzichè sull'implicazione materiale di Russel (sulla implicazione materiale son basate fra l'altro la teoria $\mathcal{T}_{MK,14}$ e le $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H,9}$). La risposta, conforme all'opinione generale, va considerata come negativa e come motivata specialmente dallo scarso sviluppo della logica modale.

c) Sono grato al Prof. H. HERMES per il permesso di pubblicare le righe seguenti da lui stesso precisate: «*It is to remark that at the same Colloquium Prof.* H. HERMES *considered some modal axioms to define mass and illustrated how unusual it would be to include such axioms into an axiomatic theory. The main reasons he pointed out may be summarized by following two assertions:*

ASSERTION I – *Modal logic is little known.*

ASSERTION II – *It is not customary to base physical theories on modal logic*».

Nonostante per le precedenti affermazioni possa sembrare che l'uso di postulati del tipo di quelli considerati da H. HERMES presenti qualche svantaggio, tuttavia appunto il fatto che l'Autore, pur consapevole dei due fatti sopra affermati, abbia ritenuto opportuno proporre tali postulati milita a favore di una concezione modale della Meccanica, ossia a

$\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_1$, in particolare dell'assioma 20.1, apparirà chiaro come in teorie di classe Γ_3 postulati di possibilità [25]) del tipo precedente siano necessari (per non accettare le accennate grosse restrizioni). Dunque il punto di vista in considerazione appare molto opportuno in relazione a tutte le teorie di classe Γ_3, ossia alle teorie che storicamente fan capo a G. Kirchhoff ed E. Mach.

Secondo il detto punto di vista, in questo lavoro non si riguarderà la possibilità fisica come definita nel modo precedente, mediante le leggi attuali (cosicchè fra l'altro essa dipenderebbe da queste leggi), ma come *qualche cosa di insito nella natura.* Nè si presumerà che tutto ciò che è logicamente compatibile con le dette leggi sia fisicamente possibile.

Fra l'altro, dalla teoria $\mathcal{T}_1$ (o $\mathcal{T}_2$) risulterà evidente che alcuni postulati di possibilità fisica sono importanti, per le considerate teorie di classe Γ_3, come i postulati di esistenza in geometria, e che la struttura e la funzione dei primi è simile a quella dei secondi.

Mediante il suddetto paradosso esterno si mostrerà come la considerata possibilità fisica sia connessa, attraverso il concetto di conseguenza fisica, col senso di certe proposizioni $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ appartenenti all'ordinario linguaggio fisico senza che alcun segno linguistico particolare la contraddistingua, precisamente contraddistingua conseguenza fisica da conseguenza logica.

Anche nella forma data in $\mathcal{T}_{P,17}$ alle leggi fondamentali della Meccanica (come si mostrerà in seguito) il concetto di possibilità fisica è presupposto — anzi in conformità di cose già dette, son

---

favore del punto di vista considerato nel presente lavoro. In questo lavoro propongo appunto un metodo con cui costruire dal detto punto di vista una teoria assiomatica in senso stretto, il quale metodo conservi i vantaggi di un piuttosto diretto uso di concetti modali senza risentire del fatto che la logica modale sia sviluppata forse ancora insufficientemente, come generalmente si ritiene [n. 12].

d) Riguardo al carattere estensionale del considerato metodo, vedi nota 7). Ricordo che nelle teorie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, costruite nel presente lavoro con tale metodo, si definiscono, tra l'altro, massa, forza e riferimento inerziale.

[25]) La possibilità in questione appare del tipo della possibilità causale considerata da A. Burks in [3], precisamente una forma particolare di quella.

presupposti assiomi affermanti che certi fatti sono fisicamente possibili —.

Insomma, il riferimento a tale possibilità appare sussistere nel linguaggio fisico usato in ordinarie trattazioni, ma in forma implicita.

Per la costruzione della teoria assiomatica $\mathcal{T}_1$, di classe Γ_3, mi è sembrato utile esplicitarlo. In vista di ciò userò esplicitamente la possibilità fisica più di quanto si faccia di solito.

* * *

Per cercare di illustrare il carattere di proprietà della natura attribuito nella teoria $\mathcal{T}_1$ alla possibilità fisica di un concepibile fatto fisico particolare, F, localizzato in una regione spazio-temporale $\mathcal{R}$ limitata, si può tentare, basandosi sulle capacità sempre crescenti della tecnica e sulla omogeneità fisica del tempo [n. 28], di assumere F come fisicamente possibile (per definizione), se con azioni extrafisiche, per es. atti umani in generale opponentesi al determinismo fisico e localizzati in ristrette e sufficientemente future regioni spazio-temporali, si è capaci di riprodurre F — ossia si è capaci di realizzare F a meno di una traslazione temporale — in regioni spazio-temporali in cui non siano direttamente esplicate azioni extrafisiche.

Si può poi considerare come fisicamente possibile anche ogni concepibile evoluzione η della materia subordinante, in ogni regione spazio-temporale limitata, fenomeni il cui complesso $\bar{F}$ sia riproducibile nel senso precedente e su un sistema materiale che, nel caso che F riguardi in η tutta la materia, sia inoltre isolato (lontano e non influenzato da altri).

Ad ogni modo si potrebbe convenire che quando si parla di un concepibile fenomeno F (per es. una $EUFP$-evoluzione) localizzato in una regione $\mathcal{R}$ illimitata, ciò vada inteso come un modo (basato su una estrapolazione semplificativa) in cui considerare un fenomeno che è limitato, almeno verso i tempi passati.

Comunque si voglia caratterizzare la possibilità fisica, si noti che una cosa è sapere cosa significhi che F sia fisicamente possibile, un'altra è sapere quali concepibili fatti fisici F sono fisicamente possibili. Le leggi fisiche note sono di grande aiuto nella determinazione di tali fatti fisicamente possibili, in generale in

quanto esse ne delimitano la classe. Per es. qualche teorema di meccanica fa sapere che se un sistema fisico S di dato tipo (in particolare soggetto ad un dato campo di forze e dotato di certe proprietà di permanenza di solito tacitamente ammesse) si trova in date condizioni iniziali *CI* di posizione e velocità, (come conseguenza fisica) esso compie un dato moto $\mathcal{M}$; ossia quel teorema dice che non è fisicamente possibile che S si trovi nelle considerate condizioni iniziali e compia un moto diverso da $\mathcal{M}$.

Quando poi si sapesse che le condizioni iniziali *CI* sono fisicamente possibili per S, allora si può dedurre che tale è pure il moto $\mathcal{M}$. In particolare se S è un sistema considerato dalla ingegneria — per es. un razzo o un sistema di razzi aventi masse che stanno in dati rapporti —, e si conosce la classe delle condizioni iniziali che la tecnica è (attualmente) capace di realizzare, allora applicando il considerato teorema, si conoscono i moti di S che si è (attualmente) capaci di realizzare. Questi moti vengono considerati appunto in tal senso quando si sceglie quello più conveniente per gli scopi pratici attuali, ossia quello che si decide di realizzare.

Conviene notare che nelle precedenti considerazioni il sistema fisico S, il razzo e il sistema di razzi sopra considerati son trattati appunto come sistemi dati indipendentemente dai possibili fenomeni a cui possono prendere parte.

Infine si può fin d'ora dire che il concetto di possibilità fisica è utile per definire, in modo efficace e (mi sembra) aderente al senso comune, l'omogeneità fisica dello spazio-tempo, varie forme del determinismo fisico, e la relatività galileiana [nn. 28, 29] (e inoltre, volendo, anche la causalità secondo gli scolastici e secondo Copernico).

Sul detto concetto di possibilità è poi anche basata, per es., la teoria $\mathcal{T}_1$ in cui non si includono i principi affermanti che lo spazio e la materia hanno le precedenti proprietà. $\mathcal{T}_1$ è compatibile con questi ma anche con la negazione di certe loro forme ($\mathcal{T}_1$ è per es. compatibile anche con la negazione dei principi di determinazione e di causalità).

Insomma il concetto di possibilità fisica è completamente indipendente da quello di causa (esso è indipendente dalla vali-

dità del principio di causalità) e del primo concetto può farsi (e spesso più o meno esplicitamente si fa) un uso più generale che del secondo.

5. Sul carattere contingente di alcuni concetti basilari per la meccanica e semplici e su quello non contingente di altri molto più complessi, almeno in parte definibili mediante i primi e il concetto di possibilità fisica.

Per i fatti considerati nel numero precedente le teorie informali (oggettive) meccaniche differiscono dalle loro cercate assiomatizzazioni in senso stretto, sensibilmente di più di quanto, per es., la geometria degli antichi Greci differisce dai « Grundlagen der Geometrie » di D. Hilbert.

Tale differenza è sensibile specialmente per le teorie di classe Γ_3. Ciò apparirà meglio in seguito considerando fra l'altro la teoria $\mathcal{T}_1$ esposta nel presente lavoro, assiomatica in senso stretto e appunto di classe Γ_3. Ma un contributo in tale direzione è dato anche dalle considerazioni seguenti.

In Meccanica razionale, specialmente in teorie informali di classi Γ_2 e Γ_3 ci si basa sull'uso di proposizioni esprimenti relazioni contingenti come « *P è la posizione del punto materiale* — o particella — *M all'istante ϑ, rispetto al riferimento spazio-temporale K* » e le analoghe per la velocità (vettoriale), accelerazione e forza esplicata su M dal punto materiale M_1, in simboli

$$(1) \quad \begin{cases} P = \mathrm{pos}^*_K\,(M, \vartheta)\,, \quad v = \mathrm{vel}^*_K\,(M, \vartheta)\,, \\ a = \mathrm{accel}^*_K\,(M, \vartheta)\,, \quad f = \mathrm{forz}^*_K\,(M, M_1, \vartheta)\,. \end{cases}$$

Conviene per il seguito considerare i concetti di moto di un punto materiale e moto fisicamente possibile per esso nelle seguenti forme schematiche e ben determinate:

a) La funzione $P(\vartheta)$ rappresenta il moto del punto materiale M nel riferimento K, brevemente *$\{P(\vartheta)\}$ è il moto di M riferito a K.*

a') M è animato del moto $P(\vartheta)$ rispetto al riferimento K.

b) La funzione $P(\vartheta)$ rappresenta nel riferimento K un moto di M (fisicamente) possibile — o $P(\vartheta)$ è un moto fisicamente possibile di M riferito a K —.

I concetti espressi in (1), *a*) ed *a'*) sono contingenti, in quanto, per es., per dati valori di P, M, ϑ (e K), sia la validità che la non validità della relazione $(1)_1$ è fisicamente possibile. Lo stesso dicasi per la relazione *a*), perfettamente equivalente alla *a'*), e riferentesi alla funzione $P(\vartheta)$, ad M e, se si vuole, anche a K.

Infatti, per definizione, *a*) ed *a'*) *sussistono se, per ogni istante* ϑ *è*,

$$P(\vartheta) = \mathrm{pos}_K^* (M, \vartheta) . \tag{2}$$

Sebbene la relazione *b*) abbia la stessa struttura della *a*) è lecito considerarla come non contingente.

Infatti è lecito assumere che per definizione *b*) *sussiste se è fisicamente possibile che per ogni istante* ϑ *valga la relazione* (2).

Di conseguenza, in base a tale definizione è lecito ritenere che, a differenza di quanto accade per le relazioni (1), *a*) ed *a'*), se *b*) sussiste o almeno ciò è fisicamente possibile, allora si può ritenere come fisicamente impossibile che *b*) non sussista [26]).

Dirò per questo che la relazione fra P, M e K la cui validità è affermata in *b*) è non contingente. Dirò pure che è contingente il concetto di moto su cui si basa la relazione *a*) e che è non contingente quello di moto fisicamente possibile, su cui si basa la relazione *b*).

Si potrebbe poi considerare la classe delle proprietà fisiche come classe non contingente di proprietà contingenti.

6. Sommaria interpretazione, mediante concetti non contingenti ma molto complessi, della teoria autonoma $\mathcal{T}_{MA}$ di meccanica analitica. Teorie di tipo completamente matematico e teorie semanticamente unitarie. Precisazione sulle precedenti classi Γ_1, Γ_2 e Γ_3.

Fra i concetti non contingenti e molto complessi per struttura e per caratterizzazione, vanno notate le precedenti classi di moti $\mathcal{M}_1(S)$ ed $\mathcal{M}_2(S)$ relativi ad un sistema meccanico S, e pure

---

[26]) Più generalmente vanno ammessi (o almeno non vanno mai contradetti) i seguenti principi:

i sistemi di equazioni $\mathcal{E}_1(\mathcal{S})$ ed $\mathcal{E}_2(\mathcal{S})$ rappresentanti in un riferimento inerziale prefissato K_0 i vincoli $\mathcal{V}$ — precisamente il sistema (totale) $\mathcal{V}$ di vincoli — e rispettivamente il campo CF di forze, agenti su $\mathcal{S}$.

Questi concetti, al pari di quello di sistema dinamico di classe $\mathcal{S}\mathcal{M}$ hanno una caratterizzazione assai complessa, fatta più o meno rapidamente in ordinari testi di Meccanica.

Si può pensare che il sistema totale $\mathcal{V}$ di vincoli ossia quello dei vincoli agenti su $\mathcal{S}$ sia costituito da circostanze fisiche limitanti la mobilità di un corpo $\mathcal{C}$ e che un campo di forze CF sia

---

PRINCIPIO P_1 (P_2) *Se è fisicamente possibile che il fenomeno particolare* A *sia fisicamente possibile* (*impossibile*), *allora è fisicamente impossibile che* A *sia fisicamente impossibile* (*possibile*).

Questi principi assieme ai loro inversi, costituiscono gli analoghi per la possibilità fisica delle seguenti equivalenze *f*) e *g*) affermate in [6] a pg. 186.

$$f) \qquad NNp \equiv Np \qquad\qquad g) \qquad N{\sim}Np \equiv {\sim}Np$$

ove « Np » sta per « *è logicamente necessario che* p *sussista* », ovvero « *è logicamente impossibile che* p *non sussista* », inoltre « $\sim$ » sta per « *non* » e « $\equiv$ » per « *equivale necessariamente* ».

In [6] R. CARNAP tratta fra l'altro un linguaggio modale $\mathcal{S}_2$ a cui dà una interpretazione estensionale basata sulle « state-descriptions » caratterizzanti gli stati dell'universo descrivibili in $\mathcal{S}_2$.

Le considerate evoluzioni dell'universo fisicamente possibili sono analoghe alle « state descriptions », e i principi P_1 e P_2 si giustificano come le precedenti equivalenze *f*) e *g*).

Si noti che le *f*) e *g*) non valgono in ogni logica modale, in particolare possono non valere per la possibilità causale — v. [3], n. 3 —.

Si osservi che la giustificazione dei principi P_1 e P_2 è basata sul senso di possibilità fisica. La scelta di un sistema completo di regole per la possibilità fisica — ossia la scelta della logica corrispondente è una questione che riguarda i fondamenti della fisica e sarebbe utile farlo per portare il rigore di certe teorie fisiche — per es. $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ — al livello di quello delle ordinarie teorie rigorose appartenenti alla matematica.

Il metodo estensionale proposto in questo lavoro per trattare la possibilità fisica, e quivi applicato alla costruzione delle teorie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ (di classe Γ_3) dispensa dal fare esplicitamente la suaccennata scelta. Conviene però osservare che tale metodo subordina appunto la validità dei principi P_1 e P_2.

costituito da analoghe circostanze determinanti la forza attiva agente su $\mathcal{S}$.

Le classi $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ e $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$ di moti — o meglio di rappresentazioni in K_0 di moti concepibili per $\mathcal{S}$ — posson pensarsi caratterizzati dalla condizione che $\mathcal{M}$ *appartiene alla prima* (*seconda*) *di esse se e solo se è fisicamente possibile che* $\mathcal{S}$ *compia il moto* $\mathcal{M}$ *rimanendo soggetto ai vincoli* $\mathcal{V}$ *e ad un campo di forze eventualmente diverso da CF* (*al campo di forze CF*).

Il sistema di equazioni $\mathcal{E}_2(\mathcal{S})$ [n. 3] può caratterizzarsi come *il sistema della forma*

$$F_i = f_i(P_1, \ldots, P_n, v_1, \ldots, v_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

tale che se, rispetto ad un prefissato riferimento inerziale K_0, P_i *e* v_i *sono la posizione e velocità dell'i-mo elemento di* $\mathcal{S}$ *all'istante t, allora* (*come conseguenza fisica*) F_i *è la forza totale attiva agente su tale elemento all'istante t.*

Mi sembra che una caratterizzazione del tipo precedente per i moti di classe $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$ — ossia i possibili moti naturali di $\mathcal{S}$ — e per le equazioni $\mathcal{E}_2(\mathcal{S})$ sia essenziale [27]) affinchè il principio variazionale di Hölder abbia un significato fisico, ossia dica davvero qualcosa sulla realtà.

È stata così delineata una interpretazione fisica, per la teoria autonoma $\mathcal{T}_{MA}$ introdotta nel n. 3, secondo cui in $\mathcal{T}_{MA}$ si considerano esplicitamente solo oggetti matematici — come n-ple di numeri e di funzioni numeriche —, inoltre la classe $\mathcal{SM}$ di sistemi meccanici, e infine relazioni non contingenti fra tali og-

---

[27]) L'interpretazione data ai concetti primitivi di $\mathcal{T}_{MA}$ e gli accennati assiomi della teoria $\mathcal{T}_{MA}$, con l'aggiunta di opportune condizioni di permanenza per il sistema totale $\mathcal{V}$ di vincoli e per il campo *CF* diforza (pensati come insieme di condizioni fisiche), indicano un modo di definire in teorie di classe Γ_2 appunto i concetti di sistema totale di vincoli, quello di campo di forze, e quindi anche il concetto di sistema meccanico di tipo $\mathcal{MS}$ partendo da usuali concetti cinematici e dinamici — quali, per es., quelli espressi in (1) — e dai concetti di possibilità fisica e di proprietà o condizione fisica (non cinematica).

Nel n. 27 è data una precisa definizione di sistema particellare isolato esente da vincoli ma soggetto ad un campo di forze del tipo del considerato *CF*.

getti quali la relazione fra $\mathcal{S}$ e l'n-pla $\langle m_1, \ldots, m_2 \rangle$ di numeri reali rappresentanti le masse degli elementi di $\mathcal{C}$ [concetto 2], quella fra $\mathcal{S}$ e il sistema di equazioni $\mathcal{E}_2(\mathcal{S})$ [concetto 5], le relazioni

$$\mathcal{M} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}) \,, \qquad \mathcal{M} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{S}) \tag{4}$$

fra $\mathcal{S}$ ed il moto $\mathcal{M}$, ovvero l'n-pla $\mathcal{M}$ di funzioni rappresentanti un moto concepibile per $\mathcal{S}$ [concetti 3 e 4].

Spogliando questi concetti del loro contenuto oggettivo ma conservandone la struttura, si ottiene una ben determinata teoria astratta $\mathcal{T}^{\mathbf{a}}_{MA}$ ossia una teoria concernente un sistema di oggetti. La $\mathcal{T}_{MA}$ si riottiene dalla $\mathcal{T}^{\mathbf{a}}_{MA}$ (verbalmente intesa) mediante una sola interpretazione e anche se tale interpretazione non è stata determinata in modo puramente estensionale, tuttavia essa può considerarsi come estensionale in quanto *nessuna proposizione di* $\mathcal{T}_{MA}$ *ha carattere contingente.* Ci si convince facilmente che qualunque proposizione, intesa in un qualunque (comune) senso fisico, è dimostrabile in $\mathcal{T}_{MA}$ se e solo se lo è in $\mathcal{T}^{\mathbf{a}}_{MA}$.

Dirò, per quanto precede, che la teoria oggettiva $\mathcal{T}_{MA}$ *ha carattere* — o *è di tipo* — *completamente matematico* e che la sua formalizzazione matematica mediante la teoria astratta $\mathcal{T}^{\mathbf{a}}_{MA}$ *è semanticamente unitaria* (e che tale è la $\mathcal{T}^{\mathbf{a}}_{MA}$).

Posso ora precisare che considererò come di classe Γ_1 teorie a proposizioni, usate anche comunemente come proposizioni non contingenti (e quindi basate come sopra si è detto su concetti complessi).

Le teorie di classe Γ_2 e Γ_3 contengono invece proposizioni che almeno comunemente sono usate come contingenti, quali quelle espresse da (1), a) ed a') [28]). Nella classe Γ_2 possono inclu-

---

[28]) In esse (ossia d'ordinario) si enuncia la seconda legge fondamentale della dinamica basandosi sul concetto (1) di forza. Si osservi che allora anche pensando di assumere come primitivo il concetto di moto in sostituzione di quello di posizione, dando tali enunciati occorre basarsi sulla forma contingente a) — o a') — del concetto di moto, onde l'enunciato, considerato dal punto di vista modale, risulta dello stesso tipo di quello considerato in nota 22, basato fra l'altro sul concetto di posizione $(1)_1$.

dersi teorie che, oltre a contenere tali proposizioni, contengono alcuni concetti primitivi molto complessi.

OSSERVAZIONE 6.1 – Spesso anche in problemi appartenenti alla Meccanica analitica si usano concetti contingenti del tipo (1), per es. nella definizione di particolari sistemi particellari costituenti sistemi olonomi.
A parte questo, in base ad una normale esigenza di riduzione dei concetti complessi ad altri più semplici, in ordinari testi di Meccanica si danno definizioni più o meno esplicite dei concetti basilari per la meccanica analitica — vedi per es. la definizione di vincolo in [23], pg. 77, riga 3 dal basso —. Nel presente lavoro il concetto di campo di forza sarà definito per sistemi particellari isolati nel n. 27.
La natura della precedente teoria $\overline{\mathcal{T}}_{MA}$ di classe Γ_3 è in aperto contrasto con una concezione della Meccanica secondo le idee di G. Kirchhoff e E. Mach.

OSSERVAZIONE 6.2 – Le teorie informali $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ (di classe Γ_3), fatte appunto secondo questa concezione che fa capo a G. Kirchhoff e E. Mach, hanno un loro rigore che, a parte qualche questione riguardante ammissioni di esistenza o di possibilità, è all'incirca quello delle normali trattazioni per es. della Meccanica dei continui, v. nota 50. Ma, come si illustrerà in seguito, *esse non sono teorie di tipo completamente matematico*, quale è invece per es. la accennata $\mathcal{T}_{MA}$, e si può dire anche che esse per certi aspetti *differiscono da una teoria $\mathcal{T}$ di tipo completamente matematico e trattante lo stesso argomento, ben più di quanto gli Elementi di Euclide differiscono da una teoria del tipo dei « Grundlagen der Geometrie » di D. Hilbert*, considerata nella sua intesa interpretazione.

Sono stati dati dei contributi diretti alla costruzione della $\mathcal{T}$ (chiarificando l'accennata questione di esistenza o di possibilità) e alla soluzione di problemi simili, parte più e parte meno generali del precedente, ma il problema è rimasto aperto.

Un metodo generale per risolvere tali problemi è appunto considerato in questo lavoro e quivi applicato alla costruzione di

alcune teorie per certi aspetti più generali di $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ e anche più sviluppate.

Già a questo punto mi sembra opportuno porre le seguenti definizioni in forma rigorosa e considerare alcuni esempi che le riguardano, nonostante ciò involga affermazioni che saranno giustificate solo fra alcuni paragrafi.

DEFINIZIONE 6.1 – *Dirò che la teoria $\mathcal{T}$ è di tipo completamente matematico se è estensionale la logica Λ su cui $\mathcal{T}$ si basa. Tale logica può essere dichiarata esplicitamente* (teorie formali, per es. basate su un sistema di oggetti) *oppure no* (teorie informali). *Nel secondo caso il carattere estensionale di Λ va ritenuto equivalente alla condizione che ogni proposizione A, appartenente alla $\mathcal{T}$ ed intesa in un qualunque* (*comune*) *senso fisico, sia deducibile nella $\mathcal{T}$-oggettiva se e solo se lo è nella $\mathcal{T}$-astratta, ossia nella teoria* (*estensionale*) $\mathcal{T}^a$ — basata su un sistema di oggetti e appartenente alla teoria degli insiemi astratti — *che si ottiene dalle $\mathcal{T}$ spogliandone i concetti del loro contenuto oggettivo e conservandone solo la struttura* (metodo *MEA*).

DEFINIZIONE 6.2 – *Considerata una teoria $\mathcal{T}$ dotata di date regole di deduzione, dirò che tale teoria è semanticamente unitaria se con una sola* (*intesa*) *interpretazione la $\mathcal{T}$ è capace di considerare tutti i casi* (*reali o possibili*) *per lo studio dei quali essa è stata costruita.*

Oltre la teoria $\mathcal{T}_{M\Lambda}$ (di classe Γ_1) e tutte le teorie assiomatiche geometriche e matematiche in genere, sono di tipo completamente matematico, per es., le $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ (di classe Γ_3), quelle esposte in [14] e [1], e infine le teorie costruite nella 2ª e 3ª parte, in particolare $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ (di classe Γ_3). Volendo, varie teorie fisiche di classe Γ_2 possono considerarsi del detto tipo pur di imporsi delle limitazioni, quali la rinuncia alla definizione di vincolo o campo di forza. Decisamente non sono invece di tipo completamente matematico le teorie informali $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ (di classe Γ_3).

Oltre la $\mathcal{T}_{M\Lambda}$ e le teorie matematiche, sono semanticamente unitarie, per es., le teorie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ e anche le $\mathcal{T}_{P,17}$ e $\mathcal{T}_{S,23}$ (magari opportunamente completate e precisate), considerate come teorie

basate su una opportuna logica modale. Non sono semanticamente unitarie, per es., le teorie $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ e quelle esposte in [14] e [1] (per es. in [1], pg. 259, righe 18-20, si parla di insiemi di intesi modelli riferentisi a teorie fra le quali figurano appunto anche quelle esposte in [14] e [1]).

7. Paradossi esterni connessi con teorie fisiche di classe Γ_2 o Γ_3.

Chiamerò *implicazione fisica*, una proposizione della forma « *A implica fisicamente B* » ovvero « *B è conseguenza fisica di A* », ovvero « *non è fisicamente possibile che sussista A e non B* ».

Ciò premesso, ci si può occupare di un certo paradosso esterno PE_1 di tipo molto generale, dimostrato in questo numero e che ha luogo quando, come in realtà viene fatto, a teorie fisiche (informali) di classe Γ_2 o Γ_3 si applica il metodo estensionale di astrazione MEA precedentemente considerato, metodo con cui, come è ben noto, nel campo geometrico si può passare senza inconvenienti da una teoria oggettiva (informale) alla corrispondente teoria astratta.

Considerare il detto paradosso PE_1 è utile per i seguenti motivi:

I) Vengon così posti in evidenza alcuni *aspetti fisicamente poco soddisfacenti della costruzione di una qualunque teoria assiomatica fisica* $\mathcal{T}$, di classe Γ_2 o Γ_3, *includente espressioni di concetti contingenti, quali le* 1), *a*) e *a'*), *ed intesa come teoria di tipo completamente matematico*. In particolare si rende conto di certe *limitazioni e difficoltà* effettivamente incontrate nella recente costruzione di teorie assiomatiche in senso stretto, specialmente in relazione alla classe Γ_3. Da quanto si è accennato risultano certe *differenze generali* fra l'assiomatizzazione connessa con teorie di classe Γ_2 e Γ_3 e quella connessa con teorie geometriche.

In particolare il paradosso PE_1 mette in evidenza che, a differenza delle teorie di classe Γ_1, le ordinarie teorie di classe Γ_2 e specialmente *quelle di classe* Γ_3 *non sono di tipo completamente matematico* (almeno se intese in senso ordinario).

II) Considerando PE_1 si mette in evidenza come il *concetto di possibilità fisica sia in qualche modo presente nel senso normale*

di alcune condizionali (nel modo indicativo) *appartenenti al linguaggio fisico ordinario* $\mathfrak{L}^*$ con cui è costruita la precedente teoria $\mathfrak{T}$ (intesa, come sopra, in senso verbale). Più precisamente si giunge ad affermare tale presenza considerando una proposizione Σ_1, sotto vari aspetti di carattere generale, e tale che, da un lato, *nell'interpretazione normale essa appare falsa, in quanto afferma una strana proprietà fisica del generico punto evento E* (proprietà che contrasta con l'esperienza comune e fra l'altro è logicamente incompatibile con l'isotropia fisica dello spazio), dall'altro, pensando la $\mathfrak{T}$ come una teoria astratta $\mathfrak{T}^a$ (concernente un sistema di oggetti e basata sulla comune logica estensionale che fa capo all'implicazione materiale, Σ_1 *è dimostrabile.* (Naturalmente, considerando la $\mathfrak{T}$ da un punto di vista logistico, si può anche dimostrare la dimostrabilità formale di Σ_1).

In questo modo viene messo in evidenza un *altro senso di* Σ_1, che si dirà *contingente o materiale* e che appare almeno meno naturale del primo. Si vede poi che la differenza fra i due accennati sensi di Σ_1 è dovuta al fatto che una certa condizionale Γ, figurante in Σ_1, è interpretata nel primo caso come una implicazione causale, anzi più precisamente come una implicazione fisica, mentre nel secondo come una implicazione materiale.

Il paradosso PE_1 — *consistente nella suddetta dimostrabilità di* Σ_1 *in* $\mathfrak{T}^a$ *e nella falsità di* Σ_1 *intesa nella sua interpretazione normale, fisica — è dunque appunto un paradosso esterno (relativo alla interpretazione normale di* Σ_1).

Riguardo all'assiomatizzazione connessa con le classi Γ_2 e Γ_3 è importante notare che in teorie astratte del tipo sopra considerato PE_1 sussista (ossia che in tali teorie non si possa esprimere Σ_1 intesa nel suo senso normale) specialmente perchè, almeno a quanto mi consta, *fin ora le uniche teorie assiomatiche in senso stretto di classe* Γ_3 *erano di tale tipo,* e per altri motivi sono per ora guardate con sospetto teorie di tipo diverso.

La considerata *dipendenza del valore di verità di* Σ_1 *dal senso dato alla* Γ — senso fra l'altro non contraddistinto da alcun segno grammaticale particolare — *risulta connessa con la differenza fra implicazione materiale e implicazione fisica*; essendo quest'ultima una particolare forma di implicazione causale, *la*

detta dipendenza, e quindi anche il paradosso PE_1, vanno considerati come una *manifestazione della nota differenza fra implicazione materiale e implicazione causale* [29]).

III) Osservare che, oltre l'implicazione materiale, si sono considerate le implicazioni stretta, causale, e della irrealtà, osservare che inoltre con alcuni esempi si è mostrato — V. [3] — che questi quattro tipi di implicazioni possono differire nell'uso

---

[29]) V. [3] n. 2.4. Ivi si fa osservare, con esempi tratti per lo più dalla vita comune, la differenza fra una implicazione causale pcq e una materiale $p \supset q$, poi — mediante un esempio del tipo $(x)(Bx \supset Gx)$ ed indexicale, cioè riferentesi ad una particolare regione spazio-temporale, v. [3], n. 2.4 — quella fra una (implicazione) causale universale $(x)(fxcgx)$, ove « (x) » sta per « *qualunque sia* x », e una (implicazione) materiale universale $(x)fx \supset gx$.

L'esempio non indexicale su cui si basa il considerato paradosso esterno PE_1 differisce nella struttura da entrambi i precedenti e, naturalmente, differisce sostanzialmente anche dagli esempi con cui in [3] n. 2, 3 (n. 2, 5) si mostra la differenza fra una implicazione causale ed una della irrealtà (una implicazione stretta).

Si può osservare che in [3] n. 2, 4 si accenna ad un predicato non indexicale $\overline{B}$, da sostituirsi a quello indexicale B considerato nel suacennato esempio indexicale, e tale che $(x)(\overline{B}xcGx)$ *è molto probabilmente falsa* mentre $(x)(\overline{B}x \supset Gx)$ *è molto probabilmente vera.* Fra l'altro la verità di $(x)(\overline{B}x \supset Gx)$ dipende dalla contingenza dei fatti. Ciò implica, fra l'altro, che la dimostrazione che per $f = B$ o $f = \overline{B}$, $(x)(fxcGx)$ e $(x)(fx \supset Gx)$ abbiano valori di verità opposti, non può appartenere ad una scienza che, come la Meccanica razionale, non postuli il verificarsi di qualche fatto contingente.

Invece le proposizioni $\overset{m}{S}{}^*$ e $\overset{f}{S}{}^*$ di $\mathfrak{L}^*$ (rispettivamente equivalenti alle proposizioni estensionali $\overline{S}^m$ ed $\overline{S}'$ di $\mathfrak{L}$) con le quali al n. 8 si preciseranno le interpretazioni materiale e fisica della proposizione Σ_1 su cui si basa il paradosso esterno PE_1, sono l'una decisamente falsa e l'altra vera ed anche dimostrabile (senza fare uso di assiomi non matematici). Ciò giustifica l'affermazione fatta alla fine della nota [6]) della prefazione.

Mi sembra che, a differenza dell'esempio basato su Σ_1, tutti gli esempi considerati in [3] non sono strettamente connessi con teorie particolari, tanto meno con quelle meccaniche dei tipi Γ_1, Γ_2 e Γ_3 di cui ci si interessa in questo lavoro in connessione a problemi di assiomatizzazione.

Sono grato al Prof. R. Carnap per avermi indicato [3]. V. anche nota [24]).

(e non solo in senso) giova alla seguente tesi (tanto più che in meccanica si usano pure condizionali dell'irrealtà, v. n. 10):

TESI 7.1 – *Considerare le ordinarie teorie fisiche, che non siano di classe Γ_1, come teorie di tipo completamente matematico* [Def. 6.1] *è, in generale, azzardato; la cosa può farsi come tentativo, ma automaticamente ci si impone delle restrizioni.*

È invece più opportuno o considerare le dette teorie come basate su una conveniente logica modale, oppure, a causa della difficoltà che ciò sembra attualmente comportare, tener conto indirettamente della detta concezione modale, e per esempio, modificare leggermente la struttura dei concetti base in modo che le considerate teorie sian poste, sì, in una forma estensionale, ma, date due generiche affermazioni A e B appartenenti a queste teorie, tale forma permetta di esprimere direttamente, per es., proposizioni quale « A è fisicamente possibile », « A è fisicamente necessaria » e « A implica fisicamente B ».

Mi sembra però che la considerazione del detto paradosso esterno basato sulla proposizione Σ_1 possa costituire per la detta tesi *un argomento in certo senso nuovo e più specifico del precedente*, specialmente per quanto segue: In primo luogo Σ_1 è considerata come appartenente a teorie di certi tipi ben determinati alcuni dei quali danno luogo a problemi di assiomatizzazione ancora vivi e particolarmente interessanti il presente lavoro (il detto paradosso esterno sussiste, fra l'altro, in relazione alle classi Γ_2 e Γ_3, e non in relazione alla Γ_1). In secondo luogo il tipo di possibilità che si prende in esame in connessione con PE_1, è quella fisica; questa rientra sì nella possibilità causale, ma, per es., nel dare una « risoluzione estensionale » del paradosso tale possibilità viene in certo senso esplicitata e quindi precisata, cosicchè viene considerata come soddisfacente certe condizioni che non tutti considerano soddisfatte dalla possibilità causale (e del resto la stessa cosa accade per la possibilità logica) [30]).

IV) Il paradosso PE_1 mostra che, identificando nelle accennate teorie informali di classe Γ_2 o Γ_3 le condizionali con impli-

---

[30]) Cfr. nota [26]).

cazioni materiali, si hanno *conseguenze* (*paradossi esterni*) *più importune di quelle dovute all'analoga identificazione nel campo geometrico o matematico* (in quest'ultimo essa dà luogo ai cosidetti paradossi dell'implicazione materiale). Infatti nel campo matematico la detta identificazione equivale ad una estensione della implicazione ordinaria, in quanto, per es., essa fa considerare come dotata di senso e vera la proposizione « se $1 + 1 = 3$, *allora* $4 + 1 = 3$ » che da alcuni è considerata come priva di senso ordinario. Tale estensione non presenta però alcun inconveniente tecnico perchè appunto nel campo di applicazione dell'implicazione ordinaria c'è perfetta equivalenza fra le due implicazioni; anzi talvolta la detta estensione può riuscire utile.

Invece nel campo fisico, in relazione alle teorie di classi Γ_2 e Γ_3, la considerata identificazione fa considerare come vere, proposizioni che, come la Σ_1, sono anche ordinariamente considerate come dotate di senso, e in tal senso sono invece false. In definitiva nel campo fisico (in relazione alle teorie di classi Γ_2 e Γ_3) *la detta identificazione porta una restrizione*, in quanto il campo di equivalenza delle due implicazioni, è una parte effettiva del campo di applicabilità della implicazione ordinaria.

V) La *considerazione del paradosso* PE_1, strettamente connesso con le classi Γ_2 e Γ_3, *permette di delineare un metodo estensionale*, del tipo di quello accennato nella tesi 7.1, mediante il quale in certo senso si risolverà il paradosso stesso. *Tale metodo* permette di tradurre completamente le implicazioni ordinarie di $\mathfrak{L}^*$, e *con opportuna specializzazione permette di costruire teorie di classe* Γ_3, *assiomatiche in senso stretto e*, a differenza delle precedenti teorie dello stesso tipo, *esenti da ogni restrizione dovuta al metodo di assiomatizzazione.*

La considerazione di PE_1, oltre a mostrare l'opportunità di un tale metodo, spiega la leggera alterazione dei concetti base delle teorie fisiche accennata nella tesi 7.1, ossia la sostituzione del linguaggio fisico ordinario ed usuale $\mathfrak{L}^*$ con un linguaggio $\mathfrak{L}$ che può considerarsi di tipo ordinario ma attualmente è assai poco in uso. Considerando PE_1 si vede come la sostituzione di $\mathfrak{L}$ ad $\mathfrak{L}^*$ possa pensarsi come dovuta solo alla attuale opportunità di trattare con metodi estensionali più o meno diretti anche

teorie intese da un punto di vista modale, e di conseguenza viene chiarito come $\mathfrak{L}$ va qui interpretato [31]).

* * *

Sia $\mathcal{T}$ una teoria informale fisica [di classe Γ_2 o Γ_3] contenente l'espressione $(1)_1$ del concetto contingente di posizione, magari semplificata cancellando il « K », e naturalmente anche una espressione per (il concetto di) punto materiale.

Tali sono le teorie ordinarie di fisica classica, almeno quelle di classe Γ_2 o Γ_3, e in particolare $\mathcal{T}_{F17}$ e $\mathcal{T}_{M3}$. Sia $\mathcal{T}^a$ una teoria astratta, per es., costruita per mettere la $\mathcal{T}$ in forma strettamente assiomatica.

Dal punto di vista verbale, le $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^a$ si possono anche considerare come coincidenti per quanto riguarda le regole di formazione. La $\mathcal{T}^a$, come teoria astratta ossia basata su un sistema di oggetti, ha però regole di trasformazione — ossia sintattiche, ovvero di deduzione — che almeno a priori possono differire da quelle della $\mathcal{T}$.

Per mostrare più agevolmente come, a differenza da quel che accade per es. nel campo geometrico, le regole di trasformazione delle $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^a$ differiscano, conviene particolarizzare in modo inessenziale la struttura e il senso di $(1)_1$ mediante la seguente:

IPOTESI 7.1 – Nelle teorie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^a$ « *istante* » equivale a « *numero reale* » e « $P = \mathrm{pos}_K(M, \vartheta)$ » equivale a « *P è la terna delle coordinate spaziali del punto materiale M nel riferimento spazio temporale K, all'istante di ascissa ϑ in K* » (Il « K » può per semplicità non figurare esplicitamente, allora nella interpretazione ci si basa su un prefissato riferimento spazio-temporale inerziale K_0). Analogamente, per es. « *vettore* » o « *punto (geometrico)* » equivalgono a « *punto dello spazio euclideo S_3 delle terne di numeri reali* ».

Vi sono teorie del tipo della $\mathcal{T}^a$; tali vanno sostanzialmente

---

[31]) Alludo ai principi P_1 e P_2 considerati in nota [26]). Mi sembra che i loro analoghi per la possibilità causale, per es., non seguano dagli assiomi posti in [3], n. 3, 2.

considerate tutte le teorie assiomatiche in senso stretto di classe Γ_2 [32]).

Naturalmente « *il punto materiale M passa per P* » equivale a « *esiste un istante t tale che* $P = \text{pos}\,(M, t)$ » e « *all'istante t, M non è sovrapposto ad altri punti materiali* » o « *all'istante t la posizione di M è semplice* » equivale a « $\text{pos}\,(M', t) = \text{pos}\,(M, t)$ *solo per* $M' = M$ ».

Naturalmente la velocità (riferita a K) — V. $(1)_2$ — si intende definita normalmente come derivata della posizione rispetto al tempo.

Si indichi ora con Σ_1 la seguente proposizione [33]) in cui per semplicità il « K » non è esplicitato;

---

[32]) Tale è per es. la $\mathcal{T}_{MK,14}$ che contiene come primitivo il concetto di posizione nella forma $(1)_1$ senza il « K ».

Dello stesso tipo vanno ritenute, per quanto riguarda la sostanza delle considerazioni svolte nei nn. 7 e 8, anche la teoria $\mathcal{T}_{H8}$ riguardante i sistemi continui e quella particellare $\mathcal{T}_{H9}$.

In $\mathcal{T}_{H8}$ si assume « Momentane materielle Punkte » come primitivo e si definisce poi « Materielle Punkte ». L'analogo si può fare in $\mathcal{T}_{H9}$. È vero che in sostanza il concetto di punto materiale che così si ottiene può esser caratterizzato nel seguente modo non usuale: la funzione $P = P(\vartheta)$ è un *materielle Punkte se esiste un punto materiale* M *di cui la detta funzione rappresenta il moto*; ma ciò basta per applicare a $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ le considerazioni in corso, sia pur indirettamente, almeno per quanto riguarda la impossibilità di introdurre in $\mathcal{T}_{H8}$ o $\mathcal{T}_{H9}$, e in modo fisicamente soddisfacente, proposizioni come Σ_1.

[33]) Per es., nella teoria $\mathcal{T}_{H9}$ non si parla di punti geometrici, istanti o punti eventi, ma solo di *riferimenti* (spazio-temporali) *galileiani* (Bezugsystem) i quali assegnano quattro coordinate reali a ciascun *punto materiale momentaneo* (momentaner Massenpunkt), inoltre si usa la relazione di *genidentità* fra tali punti, che è una equivalenza.

Ciascuno dei detti punti si può caratterizzare con una coppia $\{M,\vartheta\}$ ove M è un punto materiale e ϑ un istante.

Due di tali coppie $\{M,\vartheta\}$ e $\{M^1,\vartheta^1\}$ caratterizzano punti materiali momentanei genidentici se e solo se è $M^1 = M$.

In $\mathcal{T}_{H9}$ Σ_1 può tradursi nella seguente

PROPOSIZIONE Σ_1^H – Se Σ è un riferimento galileiano e $\{P_0, t_0\} \in \mathcal{S}_4$, ossia $P_0 \in \mathcal{S}_3$ e t_0 è un numero reale, allora esiste in $\mathcal{S}_3$ un $P_1 \neq P_0$ soddisfacente la seguente

CONDIZIONE 7. 1, H – Qualunque sia il punto materiale momentaneo x,

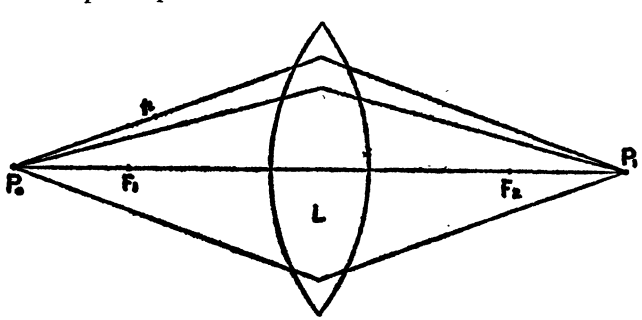
PROPOSIZIONE Σ_1 – *Per ogni punto geometrico P_0 ed ogni istante t_0, esiste un altro punto geometrico P_1 distinto da P_0 e soddisfacente la seguente condizione:*

CONDIZIONE 7.1 – Qualunque siano il punto materiale M ed il vettore non nullo v_0, se all'istante t_0, P_0 è posizione semplice di M e v_0 è la sua velocità, allora M passa per P_1.

Si osservi che nella sua interpretazione naturale, fisica, Σ_1 afferma la validità di una strana e generale proprietà fisica dello spazio; per ogni istante t_0, secondo Σ_1, ad ogni punto P_0 se ne può associare un altro P_1 legato al primo da una speciale proprietà fisica (espressa dalla condizione 7.1), analoga a quella fra due punti coniugati rispetto ad una lente.

Nell'ordine d'approssimazione dell'ottica geometrica è considerata infatti come vera la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE Σ_2 – *Se i punti F_1 e F_2 sono (o possono essere) i fuochi della lente L, di conseguenza, per [ogni istante t_0] ed ogni punto P_0 tale che F_1 sia interno al segmento $P_0 - F_2$, esistono un altro punto P_1, distinto da P_0, ed un numero reale α $(0 < \alpha < \pi/2)$ tali che, per ogni vettore v_0 di modulo c e formante con la retta F_1F_2 un angolo $v_0 \widehat{F_1} F_2 < \alpha$, se [all'istante t_0] un fotone p passa per P_0 con velocità v_0 — F_1 ed F_2 essendo i fuochi di L —, allora p passa anche per P_1.*



---

se $\{P_0, t_0\}$ è la quaterna di coordinate di x in Σ e la velocità di x in Σ è $\neq 0$, allora esistono un t_1 e un punto materiale momentaneo x^1 genidentico con x, e avente $\{P_1, t_1\}$ per quaterna di coordinate in Σ.

Per poter fare un confronto con la Σ_1 è bene accennare pure la seguente proposizione (anche se essa per certi aspetti può sembrare artificiosa), in quanto quest'ultima sembra di tipo opposto a quello di Σ_1 ma, come Σ_1, è dimostrabile:

PROPOSIZIONE Σ_3 – *Se P_0 è un punto dell'asse della lente L (abbastanza lontano da L), di conseguenza qualunque sia $\alpha > 0$, esiste un β con $0 < \beta < \alpha$ e tale che se all'istante t un fotone p transita per P_0 e la velocità di p forma con l'asse di L l'angolo β, inoltre, all'istante t_0, p non è sovrapposto ad altri fotoni, allora p non passa mai per punti sull'asse di L distinti da P_0.*

Riprendendo Σ_1 osserviamo che nella sua interpretazione ordinaria, essa appare falsa, in quanto contrastante con l'esperienza comune; si può poi mostrare come fra l'altro essa *sia in contraddizione con l'isotropia fisica dello spazio* [n. 28]. Infatti si consideri un punto materiale M. Esiste certo un riferimento inerziale K ed un istante t_0 nel quale M occupa rispetto a K una certa posizione P_0 avendo velocità non nulla.

Supposta per assurdo valida Σ_1, vale allora la condizione 7.1 con opportuna scelta di P_1, e per l'isotropia dello spazio inerziale solidale a K, M deve passare per tutti i punti della sfera di centro P_0 e raggio $|P_0P_1| \neq 0$, il che come è ben noto, è assurdo. Dunque, *la non validità di Σ_1* (intesa nel suo senso ordinario) *è una conseguenza della isotropia fisica dello spazio.*

Non ostante che nella sua interpretazione (fisica) ordinaria, Σ_1 sia falsa, essa può essere dimostrata quando la si consideri come appartenente alla suddetta teoria astratta $\mathfrak{T}^a$ la quale è basata su un sistema di oggetti fra i quali c'è appunto una classe, i cui elementi son detti punti materiali, ed una funzione da leggersi « posizione » e da usarsi secondo lo schema $(1)_1$ nella forma specificata dalla ipotesi 7.1.

Non sarebbe difficile costruire una dimostrazione completamente formale di Σ_1 per esempio una basata sulla teoria di logica simbolica svolta in [20], teoria che permette fra l'altro di usufruire delle regole di generalizzazione e di scelta. Per non far dipendere la comprensione della considerata dimostrazione da cognizioni tecniche di logica simbolica (estensionale), e stante la attuale

considerata equivalenza di una dimostrazione completamente formale ad una appartenente ad una teoria astratta come la $\mathcal{T}^a$, anche se una dimostrazione del primo tipo potrebbe forse dare in pratica più fiducia, espongo ora la seguente, che è del secondo.

DIMOSTRAZIONE DI Σ_1 IN $\mathcal{T}^a$ – Valendo l'ipotesi 7.1 ed essendo $\mathcal{S}_n$ lo spazio delle n-ple di numeri reali ($n = 1, 2, \ldots$), possiamo indicare con A la classe dei punti $E = (P_0, t_0)$ di $\mathcal{S}_4$ tali che, all'istante t_0, P_0 sia la posizione (semplice) esattamente di un punto materiale — da dirsi M_E o M_{P_0, t_0} — inoltre M possieda una velocità $v_0 \neq 0$.

Supponiamo ora $E \in A$ ed $E = (P_0, t_0)$, cosicchè $P_0 = \text{pos}\,(M_E, t_0)$ e $v_0 = \text{vel}\,(M_E, t_0) \neq 0$. Sia T il dominio di $\text{pos}\,(M_E, t)$ pensata come funzione di t. Supponiamo, com'è lecito, che la velocità sia definita in modo che l'esistenza di $\text{vel}\,(M_E, t_0)$ implichi che $\text{pos}\,(M_E, t)$ abbia senso per t appartenente ad un intervallo chiuso non nullo e contenente t_0. Allora, essendo $v_0 \neq 0$, nella successione

$$t_0 + 1/2,\ t_0 - 1/2,\ t_0 + 1/3,\ t_0 - 1/3, \ldots,\ t_0 + 1/n,\ t_0 - 1/n, \ldots$$

esiste un unico istante t_E appartenente a T, verificante

$$P_1 = \text{pos}\,(M_E, t_E) \neq P_0\,, \tag{5}$$

e non preceduto da altri istanti pure dotati delle due dette proprietà.

Detto u il versore $\langle 1, 0, 0 \rangle$ appartenente a $\mathcal{S}_3$, per $E \in \mathcal{S}_4$ ed $E = (P_0, t_0)$ sia

$$\begin{cases} f(E) = f(P_0, t_0) = \text{pos}\,(M_E, t_E) & E \in A \\ f(E) = f(P_0, t_0) = P_0 + u & E \in (\mathcal{S}_4 - A), \end{cases}$$

da cui, per (5)

$$P_1 = f(P_0, t_0) = f(E) \neq P_0 \quad \text{per } E \in \mathcal{S}_4 \text{ ed } E = (P_0, t_0). \tag{6}$$

Sia ora P_0 un punto e t_0 un istante — $(P_0, t_0) \in \mathcal{S}_4$ — e si ponga $E = (P_0, t_0)$ e $P_1 = f(E)$ onde, per (6), $P_1 \neq P_0$.

Sia poi M un punto materiale e v_0 un vettore $\neq 0$; supponiamo che all'istante t_0, P_0 sia posizione semplice di M e v_0 la

sua velocità. Ne segue $E \in A$ ed $M = M_E$ onde, per la definizione di t_E, quella di f in A, e per la posizione $P_1 = f(E)$, M passa per P_1. Dunque, per l'arbitrarietà con cui M e v_0 sono stati scelti, P_1 soddisfa la Condizione 7.1.

Poichè inoltre $P_1 \neq P_0$, si può affermare che esiste un punto geometrico $P_1 \neq P_0$ per cui la Cond. 7.1 vale. Dunque vale Σ_1.

OSSERVAZIONE 7.1 – Il paradosso esterno PE_1 ha carattere generale in quanto nella considerata dimostrazione di Σ_1 in $\mathcal{T}^a$, non si fa uso di alcun assioma non matematico. Questa è possibile solo per il diretto trattamento estensionale del concetto contingente di posizione in essa fatto.

Quanto alle proposizioni Σ_2 e Σ_3, sebbene Σ_3 nel senso ordinario appaia falsa e incompatibile con la Σ_2 che è vera, tuttavia, trattando i fotoni come punti materiali, non è difficile dimostrare Σ_3 quando la si consideri come appartenente alla teoria astratta $\mathcal{T}^a$, basata sulla comune logica estensionale.

8. Metodo estensionale con cui evitare paradossi del tipo precedente.

Preliminarmente ricordo che chiamo $EUFP$-evoluzioni *le evoluzioni dell'universo fisicamente possibili* e indico con $EUFP$ la loro classe. Consideriamo ciascun riferimento spazio-temporale K come conoscibile indipendentemente dalle precedenti evoluzioni [34]; cosicchè, oltre i punti materiali, anche i punti geometrici solidali a K e gli istanti risultano dati indipendentemente dalle dette evoluzioni.

Sostituiamo ora al concetto contingente $(1)_1$ di posizione, il seguente non contingente, caratterizzato dall'eguaglianza

$$P = \mathrm{pos}_K\,(M, \vartheta, \eta) \tag{7}$$

[34]) Le evoluzioni dell'universo che si stanno considerando vanno, naturalmente, idealizzate cosicché possono essere intese come riferentisi a una qualunque parte $\mathcal{T}$ della materia, che possa ritenersi isolata e magari anche particellare. I sistemi di coordinate possono pensarsi legati ad apparecchiature appartenenti alla parte di materia rimanente.

Questa però nella descrizione della detta evoluzione può non figu-

da leggersi *P è la posizione, calcolata rispetto al riferimento galileiano K, che M assume all'istante ϑ, nella evoluzione fisicamente possibile η dell'universo* [35]).

Analoghe trasformazioni subiscono i concetti $(1)_2, \ldots, (1)_4$, a) e a') ecc. Ogni proposizione P^* (non modale) del linguaggio fisico ordinario ed usuale $\mathfrak{L}^*$ viene così direttamente trasformata in una proposizione $P_{(\eta)}$ appartenente ad un linguaggio $\mathfrak{L}$ che può considerarsi ordinario ma che attualmente non è completamente in uso.

Per quanto riguarda l'esplicito uso della possibilità fisica, indicate con $A_{(\eta)}$ e $B_{(\eta)}$ (o A e B) le traduzioni in $\mathfrak{L}$ di due generiche proposizioni A^* e B^* di $\mathfrak{L}^*$, P_i costituisce la traduzione in $\mathfrak{L}$ della proposizione P_i^* appartenente ad $\mathfrak{L}^*$ ($i = 1, 2, 3$), ove

P_1^* è « *A^* è fisicamente possibile* »;

P_1 è « *Esiste una EUFP-evoluzione η per cui $A_{(\eta)}$ sussiste* », ovvero « *esiste una $\eta \in EUFP$, per cui $A_{(\eta)}$ sussiste* »;

P_2^* è « *A^* è fisicamente necessaria* »;

P_2 è « *Qualunque sia $\eta \in EUFP$, $A_{(\eta)}$ sussiste* »;

P_3^* è « *B^* è conseguenza fisica di A^** » o « *se A^* sussiste, come conseguenza fisica B^* sussiste* » oppure « *è fisicamente necessario che A^* implichi (materialmente) B^** » o anche « *è fisicamente impossibile che A^* sussista e B^* no* »;

P_3 è « *Qualunque sia $\eta \in EUFP$, $A_{(\eta)}$ implica (materialmente) $B_{(\eta)}$* » ovvero « *Non c'è un $\eta \in EUFP$, per cui $A_{(\eta)}$ sussiste e $B_{(\eta)}$ no* ».

OSSERVAZIONE 8.1 – Il valore di verità di $A_{(\eta)}$ dipende effettivamente da η, se è solo se A^* è fisicamente contingente.

Dirò che *A^* è modalmente chiusa (aperta)*, se $A_{(\eta)}$ è chiusa (aperta) rispetto ad η.

Le precedenti proposizioni P_1^*, P_2^* e P_3^* sono modalmente chiuse e quindi non contingenti.

---

rare in quanto si può considerare come sufficientemente lontana da $\mathfrak{T}$ da potersi dire « situata all'infinito ».

[35]) Naturalmente, dati M e ϑ, per $\eta \in EUFP$ la $\mathrm{pos}_K(M,\vartheta,\eta)$ può non esistere in quanto, nell'evoluzione η, M non si possa considerare come dotato all'istante ϑ di posizione puntiforme al finito.

OSSERVAZIONE 8.2 – Se una proposizione P costituente un postulato, una definizione o un teorema è aperta rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$, affermando P si intende affermare la sua chiusura, ossia *che P sussiste qualunque siano $x_1, \ldots, x_n$*. Quindi se A^* è un postulato, una definizione o un teorema, applicando quanto precede ad $A_{(\eta)}$ e considerando η come variante solo in $EUFP$ si ha che l'affermazione di A^* va intesa come equivalente a quella che A^* sia fisicamente necessaria. Chiamerò quest'ultima affermazione la *chiusura modale* di A^*.

Le precedenti considerazioni di carattere generale sono utili per esplicitare e discutere i due sensi della proposizione Σ_1 considerati nel n. 7.

A tale scopo indichiamo con Γ la condizionale (periodo ipotetico) figurante nella condizione 7.1, ossia la

PROPOSIZIONE Γ – *Se all'istante t_0, P_0 è posizione semplice di M e $\boldsymbol{v}_0$ la sua velocità, allora M passa per P.*

Per chiarezza si può anche dire che, nel suo senso materiale, Γ equivale alla seguente

PROPOSIZIONE $\overset{m}{\Gamma}$ – *O M passa per P_1, o all'istante t_0 M ha velocità nulla, oppure P_0 non è una posizione semplice di M (a tale istante).*

Intendendo la Γ in tale senso (e solo in questo caso), Σ_1 risulta vera (dunque così essa va intesa quando la si consideri come appartenente a $\mathfrak{T}^a$).

Nella interpretazione ordinaria di Σ_1, Γ è però intesa come implicazione causale ossia come equivalente alla [36]) seguente

PROPOSIZIONE $\overset{f}{\Gamma}$ – *Se all'istante t_0, ..., allora come conseguenza*

---

[36]) È bene osservare che il senso fisico delle proposizioni Σ_1 si può precisare semplicemente sostituendo in Σ_1 la condizionale Γ con $\overset{f}{\Gamma}$ per il fatto che i punti materiali e i punti geometrici si pensano come conoscibili indipendentemente dalle $EUFP$ -evoluzioni, e per il carattere fisicamente non contingente delle relazioni geometriche fra i punti (geometrici).

fisica M passa per P_1, ovvero alla proposizione « $\overset{m}{\Gamma}$ *è fisicamente necessaria* ».

Che di solito la detta distinzione non sia riflessa da alcun segno grammaticale ed il senso vada suggerito dal contesto è conforme a cose note — V. [3] N. 2.4 —.

Conveniamo di intendere le condizionali « se, ... allora... » al modo indicativo, come implicazioni materiali anche nel caso che esse *appartengano al linguaggio fisico* $\mathfrak{L}^*$.

Indichiamo con $\overset{m}{\mathcal{S}}{}^*$ la Σ_1 stessa (con l'intenzione di intenderla appunto nel suo senso materiale), magari dopo averla posta in una forma simbolica facendo uso delle espressioni $(1)_1$, $(1)_2$ e di altre analoghe (essa appartiene al linguaggio fisico $\mathfrak{L}^*$).

Indichiamo poi con $\overset{f}{\mathcal{S}}{}^*$ la proposizione ottenuta da Σ_1 sostituendovi Γ con $\overset{f}{\Gamma}$ e magari applicando la precedente simbolizzazione.

Indichiamo infine con $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ e $\mathcal{S}^f_{(\eta)}$ le traduzioni di $\overset{m}{\mathcal{S}}{}^*$ e rispettivamente $\overset{f}{\mathcal{S}}{}^*$ in $\mathfrak{L}$. Per forma esplicita di $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ si può assumere la seguente

PROPOSIZIONE $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ – *Per ogni punto* P_0 *ed ogni istante* t_0 *esiste un punto* P_1 *soddisfacente la seguente condizione* $K_{P_0,t_0P_1,\eta}$.

CONDIZIONE $K_{P_0,t_0,P_1,\eta}$ – $P_0 \neq P_1$, inoltre, qualunque siano il punto materiale M ed il vettore non nullo $\boldsymbol{v}_0$, se nella $EUFP$-evoluzione η, all'istante t_0, P_0 è posizione semplice di M e $\boldsymbol{v}_0$ è la sua velocità, allora nell'evoluzione η, M passa per P_1.

La forma esplicita di $\mathcal{S}^f_{(\eta)}$ si ottiene dalla proposizione Σ_1 sostituendo la condizione 7.1 con la seguente

CONDIZIONE 8.1 – Qualunque siano il punto materiale M, il vettore $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$ e la $EUFP$-evoluzione η, se in tale evoluzione, all'istante t_0, P_0 è la posizione semplice di M e $\boldsymbol{v}_0$ la sua velocità, allora, nell'evoluzione η, M passa per P_1.

Osserviamo che Σ_1 appare una proposizione chiusa rispetto a tutte le variabili, e tali appaiono anche $\overset{m}{\mathcal{S}}{}^*$, $\overset{f}{\mathcal{S}}{}^*$ e $\mathcal{S}^f_{(\eta)}$, mentre

$\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ è aperta solo rispetto a η. Dunque $\overset{m}{\mathcal{S}}{}^*$ è modalmente aperta e $\overset{f}{\mathcal{S}}{}^*$ è modalmente chiusa.

Naturalmente, detta $\mathcal{T}^e_\eta$ la teoria ottenuta dalla $\mathcal{T}^a$ in un modo conforme alla precedente trasformazione del linguaggio $\mathcal{L}^*$ in $\mathcal{L}$, secondo l'osservazione 7.1 $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ è dimostrabile in $\mathcal{T}^e_\eta$, e senza fare uso di postulati non matematici (per ottenere una tale dimostrazione basta sostituire $(1)_1$ con (7) ecc... nella dimostrazione di Σ_1 in $\mathcal{T}^a$ e nelle definizioni e nei teoremi usati in tale dimostrazione). Inoltre η figura al più come parametro in $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ e nei teoremi e definizioni usati per dimostrare $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ in $\mathcal{T}^e_\eta$. Di conseguenza, in $\mathcal{T}^e_\eta$ si può dimostrare che, qualunque sia l'*EUFP*-evoluzione η, $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$ sussiste. Ossia conformemente all'osservazione 8.2, in $\mathcal{T}^a$ il teorema asserente Σ_1 va inteso come l'affermazione della chiusura di $\mathcal{S}^m_{(\eta)}$.

Per meglio confrontare ${}^m\mathcal{S}^*$ con ${}^f\mathcal{S}^*$ conviene allora osservare che la considerata chiusura di $\mathcal{S}^m_\eta$ equivale alla seguente

PROPOSIZIONE $\overline{\mathcal{S}}^m$ – *Per ogni punto P_0, istante t_0 e per ogni EUFP-evoluzione η, esiste un punto P_1 tale che la precedente condizione $K_{P_0,t_0,P_1,\eta}$ è soddisfatta.*

D'altro canto la $\mathcal{S}^f_\eta$ equivale alla seguente

PROPOSIZIONE $\overline{\mathcal{S}}^f$ – *Per ogni punto P_0 ed istante t_0 esiste un punto P_1 tale che per ogni EUFP-evoluzione η la condizione $K_{P_0,t_0,P_1,\eta}$ è soddisfatta.*

Con ciò la differenza fra i due considerati sensi della proposizione Σ_1, ossia quello materiale reso da ${}^m\mathcal{S}^*$ e quello fisico (ordinario) reso da ${}^f\mathcal{S}^*$ è stata ricondotta, prima, alla differenza fra $\mathcal{S}^m_\eta$ ed $\mathcal{S}^f_\eta$, poi a quella fra $\overline{\mathcal{S}}^m$ ed $\overline{\mathcal{S}}^f$, ossia alla inversione che muta « *per ogni EUFP-evoluzione η esiste un punto P_1 tale che* » in « *esiste un punto P_1 tale che per ogni EUFP*-evoluzione η », inversione che fa appunto passare da $\overline{\mathcal{S}}^m$ a $\overline{\mathcal{S}}^f$.

La natura di questo passaggio testè osservato rende fra l'altro conto di come $\overline{\mathcal{S}}^f$ implichi $\overline{\mathcal{S}}^m$ ma non avvenga il viceversa, e quindi del fatto che ${}^f\mathcal{S}^*$ sia falsa mentre è fisicamente necessario che ${}^m\mathcal{S}^*$ sia vera.

9. Sull'assiomatizzazione connessa con teorie di classe Γ_2 o Γ_3 in relazione alla precedente diretta traduzione estensionale di una esplicita concezione modale della meccanica.

Come ho già detto si sono costruite varie *teorie meccaniche assiomatiche in senso stretto, di classe Γ_2 o Γ_3 e basate su concetti primitivi contingenti quali per es.* (1), *a*) ed *a'*)[37]. *Sia $\mathcal{T}'$ la generica di tali teorie.*

A quanto mi consta tali sono tutte le teorie assiomatiche in senso stretto che posson pensarsi come forme strettamente assiomatiche di teorie informali di classe Γ_3, ossia di teorie del tipo di $\mathcal{T}_{P17}$ o $\mathcal{T}_{S23}$.

La precedente teoria $\mathcal{T}'$ (è di tipo completamente matematico ma) non è semanticamente unitaria [38]). In particolare accade un fatto del seguente tipo: Sia η una *EUFP*-evoluzione; allora una sua opportuna idealizzazione, fatta magari in vista di particolari problemi, *determina una* (*intesa*) *interpretazione fisica delle costanti assiomatiche di $\mathcal{T}'$* — V. nota (11) —, in altre parole essa determina le estensioni che hanno in η i concetti primitivi di $\mathcal{T}'$. *Identificando*, per semplicità, *η con la sua accennata idealizzazione*, si può dire che *η determina la classe $\mathcal{V}_\eta$ di proposizioni chiuse* appartenenti a $\mathcal{T}'$, le *quali* (*grazie agli usuali processi di approssimazione, semplificazione ed estrapolazione*) *possono ritenersi come vere nell'evoluzione* (*idealizzata*) *η*. Per ogni assegnamento *VA* di valori [39]) alle variabili di $\mathcal{T}'$, *è pure determinata*

---

[37]) Tali sono, per es., $\mathcal{T}_{MK14}$, $\mathcal{T}_{H8}$, $\mathcal{T}_{H9}$ e la trattazione assiomatica autonoma dei corpi rigidi svolta in [1].

[38]) Per es. in [1], pg. 259, righe 18-20 si parla di insiemi di intesi modelli in relazione a teorie sostanzialmente del tipo della $\mathcal{T}'$.

[39]) Per concetti precisi su assegnamento *VA* di valori (value-assignement) v. [5], pg. 15, 17, 42, 96.

Per quanto riguarda la teoria $\mathcal{T}'$ ora in considerazione, nell'evoluzione η, la eventuale costante assiomatica « punto materiale » esprime la classe $PM_{(\eta)}$ dei corpi dotati, in η, di posizione puntiforme e al finito.

Le variabili possono assumere per valori tutti e soli gli enti *logicamente basati* sugli oggetti o classi di oggetti espressi dalle costanti assiomatiche di $\mathcal{T}'$, ossia gli *enti che si possono considerare come legati ai detti oggetti e alle dette classi mediante nessi appartenenti alla teoria degli insiemi*

la classe $\mathfrak{V}_\eta$ *(VA) delle proposizioni eventualmente aperte rispetto a qualche variabile*, appartenenti a $\mathfrak{T}'$, e che nel senso precedente possono ritenersi come *vere nell'evoluzione* η *rispetto all'assegnamento VA di valori.*

Per semplicità identifichiamo *EUFP* con l'*insieme delle EUFP-evoluzioni in cui* (secondo comuni criteri di idealizzazione e approssimazione) *non si svolgono fatti esprimibili in* $\mathfrak{T}'$ *ed esterni al campo di validità della* $\mathfrak{T}'$, campo che qui intendo come determinato in modo autonomo (quanto più si sa determinare tale campo indipendentemente dai postulati ai $\mathfrak{T}'$, tanto maggiore è il valore gnoseologico della teoria $\mathfrak{T}'$, in particolare tanto più gli assiomi hanno il carattere di leggi fisiche) [40]).

Allora la precedente teoria $\mathfrak{T}'$ *è* (approssimativamente) *vera* in quanto i *suoi assiomi appartengono alla classe* $\mathfrak{V}_\eta$, *per ogni* $\eta \in EUFP$.

La teoria $\mathfrak{T}'$ può considerarsi come appartenente alla parte puramente estensionale del linguaggio ordinario e usuale $\mathfrak{L}^*$. Nel passaggio da $\mathfrak{L}^*$ al precedente linguaggio $\mathfrak{L}$ (ordinario ma non completamente in uso), $\mathfrak{T}'$ si trasforma automaticamente in una $\mathfrak{T}_\eta$ avente gli assiomi, definizioni e teoremi aperti rispetto ad η. Naturalmente sono da ritenersi come vere e da affermarsi le chiusure rispetto ad η dei detti assiomi, e come da porsi quelle delle

---

astratti. Una variabile M può, per es., designare in $\mathfrak{T}'$ un elemento di $PM_{(\eta)}$, un'altra una coppia di tali elementi ecc...

[40]) Una condizione che si afferma come soddisfatta dal campo di validità delle teorie fisiche classiche è, per es., quella di non contenere moti di particelle con velocità relative troppo alte.

In relazione a $\mathfrak{T}_{H9}$ si può pensare che la considerata evoluzione η concerna un universo (sistema isolato) completamente particellare. Non occorre far questo in connessione con la teoria $\mathfrak{T}_{MN14}$ contenente una costante assiomatica « P » avente per intesa interpretazione fisica la classe dei punti materiali — v. [14], n. 2, pg. 256 — classe che in base agli assiomi del numero 3 di [14] può appunto non costituire un sistema isolato.

Naturalmente anche se il campo di validità della teoria $\mathfrak{T}'$ fisicamente interpretata, venisse dato solo tramite gli assiomi, il valore gnoseologico di $\mathfrak{T}'$ non sarebbe ridotto a zero, in quanto i teoremi di $\mathfrak{T}'$ possono esser sempre utili per la conoscenza della realtà. Gli assiomi di $\mathfrak{T}'$ perderebbero però il carattere di leggi fisiche.

dette definizioni. Sono allora dimostrabili le chiusure rispetto ad η dei detti teoremi. Sia $\overline{\mathcal{T}}$ la teoria dotata degli assiomi e delle definizioni ottenute mediante le dette chiusure.

Tutti i teoremi appartenenti a $\mathcal{T}'$, dopo esser tradotti in $\mathfrak{L}$ riguardano una sola generica *EUFP*-evoluzione η. Ciò non accade per $\overline{\mathcal{T}}$ che, per es., contiene (propriamente) i seguenti enunciati TMB_1 e TMB_2 traducenti la nota forma (fisica) del teorema del moto del baricentro, in cui si usa un periodo ipotetico della irrealtà:

ENUNCIATO TMB_1 – *Se nella EUFP-evoluzione η, ad ogni istante t, $\mathcal{C}(t)$ è il baricentro del sistema materiale $\mathcal{S}$ di massa totale m, e $\mathbf{R}(t)$ è il risultante delle forze esterne agenti su $\mathcal{S}$, allora detta η_1 una qualunque EUFP-evoluzione in cui un punto materiale M di massa m si trovi ad un istante t_0 in $C(t_0)$ con velocità $\dot{\mathcal{C}}(t_0)$ e sia sollecitato ad ogni istante t con la forza totale $\mathbf{R}(t)$, di conseguenza, in η_1, ad ogni istante t, M si trova in $\mathcal{C}(t)$.*

ENUNCIATO TMB_2 – *Se nell'EUFP-evoluzione η, ad ogni istante t, $C(t)$ è il baricentro del sistema $\mathcal{S}$, di massa m, e $\mathbf{R}(t)$ è il risultante delle forze esterne agenti su $\mathcal{S}$, allora esiste una EUFP-evoluzione η_1 in cui un punto materiale M ha, al generico istante t, $\mathcal{C}(t)$ per posizione e $\mathbf{R}(t)$ per risultante delle forze che lo sollecitano.*

La detta forma fisica del teorema del moto del baricentro si può in certo senso tradurre, usando la teoria $\mathcal{T}'$ (basata su una logica estensionale) solo con proposizioni aventi carattere di metateorema [41]).

---

[41]) Ha appunto carattere di metateorema il teorema 3 a pg. 263 di [14], esprimente in certo senso quello del baricentro « whithout using the subjunctive mood », come notano gli Autori.

La teoria $\mathcal{T}_{MK14}$ si basa su un sistema di oggetti $\langle P,T,m,s,f\rangle$ ove « P » sta per « classe di punti materiali » e « m, s e f » può stare per « funzioni rappresentanti le masse, le posizioni e le forze totali (considerate conformemente all'ipotesi 7.1 in relazione alla classe P di punti materiali e all'intervallo T di tempo) ».

Mi sembra bene osservare che il teorema 3 raggiunge il suo scopo in quanto si faccia la seguente ammissione: Dato un qualunque modello matematico particolare del precedente sistema di oggetti $\langle P,T,m,s,f\rangle$,

Mi sembra che osservare ciò sia importante in quanto il fatto determina una differenza fra le precedenti assiomatizzazioni in senso stretto nel campo delle classi Γ_2 e Γ_3 da un lato e quelle nel campo geometrico dall'altro.

Gli enunciati TMB_1 e TMB_2 mostrano come il metodo estensionale costruito per risolvere il precedente paradosso PE_1 permetta di eliminare tale differenza.

Il paradosso PE_1 ha luogo in $\mathcal{T}'$ ossia la proposizione Σ_1 intesa nel suo senso naturale, fisico, non è traducibile in una propriamente appartenente a $\mathcal{T}'$, proprio in quanto Σ_1 in tale senso si riferisce a varie $EUFP$-evoluzioni, cfr. $S^f_{(\eta)}$ al n. 8.

10. Continuazione delle considerazioni precedenti in connessione con teorie di classe Γ_3.

Se la precedente teoria $\mathcal{T}'$ è di classe Γ_2, si potranno magari incontrare difficoltà cercando di definire in modo fisicamente soddisfacente, per es., sistema meccanico soggetto a forze dipendenti (in modo specificato con date equazioni) da configurazione, stato cinetico e tempo (a quanto mi consta, questo problema non è stato finora considerato nè in $\mathcal{T}_{MK14}$ nè in altre teorie dello stesso tipo). Però se $\mathcal{T}'$ è di classe Γ_2, i suoi assiomi possono ottenersi da quelli di una teoria informale mediante il metodo estensionale MEA di astrazione; essi possono non avere carattere di meta-assiomi e allo stesso tempo nemmeno alcun carattere restrittivo — vedi per es. quelli di $\mathcal{T}_{MK14}$ —.

Diversamente vanno le cose per le teorie di classe Γ_3, (per loro natura molto più complesse), cosicchè le teorie informali di tale classe appaiono come le più lontane da corrispondenti teorie

---

si può mutare l'interpretazione di « P » in modo che, tramite i soli corrispondenti mutamenti subiti da m, s ed f, si ottenga una interpretazione fisica di « $\langle P, T, m, s, f \rangle$ » che sia fisicamente possibile; cioè esista una $EUFP$-evoluzione η, per cui in questa interpretazione P è la classe dei corpi che in η son considerati come punti materiali ed inoltre le funzioni m, s ed f rappresentino in un prefissato riferimento inerziale K_0 le masse dei detti corpi, le loro posizioni e le forze totali su essi agenti nell'evoluzione η e nell'intervallo di tempo rappresentato in K_0 da T.

assiomatiche in senso stretto, e come quelle che in certo senso fanno maggiormente avvertire la differenza fra le assiomatizzazioni nei campi geometrico e fisico.

Tra le più note trattazioni assiomatiche informali di classe Γ_3 va incluso il volumetto [17] di P. Painlevè (1922). La teoria meccanica $\mathcal{T}_{P17}$ ivi esposta (che naturalmente è conforme al principio di causalità senza però contenerlo) si basa, fra l'altro, sulle nozioni di spazio-tempo e triedro di riferimento intese, mi sembra, in un senso indipendente dalle nozioni di misura (precisamente metodo di misura) dello spazio e del tempo. Nella teoria $\mathcal{T}_{P17}$, triedro di riferimento associato a una misura del tempo può venire inteso, mi sembra, per es. come corrispondenza biunivoca fra i punti eventi e le quaderne di numeri reali (punti di S_4). La $\mathcal{T}_{P17}$ appare poi basarsi sul concetto di punto materiale e su un concetto di posizione che si può considerare come avente la struttura espressa in $(1)_1$. $\mathcal{T}_{P17}$ non è una teoria astratta, può quindi considerarsi come basata su una opportuna logica modale.

In $\mathcal{T}_{P17}$ si assume che i punti materiali (da indicarsi con M, M_1, ...) abbiano costituzione fisica e stato fisico invariabili ossia *vi si considera il caso puramente meccanico.*

Si definisce poi *accelerazione di M causata da* (*dovuta a*) M_1 mediante una certa convenzione e in un modo che interessa qui riportare:

PASSO 10.1 – « ... considérons un élément M infiniment éloigné de tous les autres: son accélération est nulle. Supposons maintenant qu'un second élément matériel M_1 soit voisin de M; le point M, à l'instant t, a une certaine accéleration γ; je conviens de dire que γ est l'accélération de M causée par M_1. Si maintenant M est en présence non plus du seul élément M_1, mais d'un milieu matériel qui comprend M_1, j'appelle accélération de M causée par M_1 l'accélération qu'aurait M au même instant si (M et M_1 occupant les mêmes positions avec les mêmes vitesses) tous les autres élément étaient écartés à l'infini. » [17], p. 64.

Ecco ora come nella $\mathcal{T}_{P17}$ sono enunciati gli assiomi della Meccanica:

PASSO 10.2 – « On peut (une fois pour toutes) définir une mesure des distances et du temps et un trièdre de reference tels

que les mouvements des élément matériels de notre univers satisfassent aux axiomes qui suivent.

Axiome de l'inertie. Un élément matériel infiniment éloigné de tous les autres décrit une droite avec une vitesse constante.

Axiome de l'action et de la réaction. I° Si M et M_1 sont deux élément matériel, l'accélération γ de M causée par M_1 et l'accélération γ_1 de M_1 causée par M au même instant t sont directement opposées.

2°) Elles sont de plus parfaitement déterminées en grandeur et sens quand on connait (à l'instant t) la distance r des deux points et leur vitesse relative dr/dt.

3°) Le rapport γ/γ_1 est indépendant de la position et de la vitesse relatives de M et de M_1. Ce rapport constant m sera dit *masse relative* de M_1 par rapport à M.

4°) Soit M, M_1, M_2 trois éléments, matériels quelconques: la masse relative de M_2 par rapport à M_1 est le quotient de la masse relative de M_2 par rapport à M par la masse relative de M_1 par rapport à M.

Axiome de l'indépendance des effets des éléments matériels. L'accélération d'un élément matériel M en présence d'un milieu formé des éléments $M_1, M_2, \ldots, M_n$, est la somme géométrique des accélération de M causées respectivement par $M_1, M_2, \ldots, \ldots, M_n$. », [17], pg. 65.

Dello stesso tipo di $\mathcal{T}_{P17}$ è la teoria $\mathcal{T}_{S23}$; V. [23] C. X [42]).

---

[42]) In $\mathcal{T}_{S23}$ nell'adattamento allo schema microscopico della Lex II si tiene conto di « quello che spetta a Galileo, cioè l'idea che le circostanze atte ad influire sul moto direttamente specifichino l'accelerazione » [23] pg. 12-13. Detta $\boldsymbol{a}^*$ l'accelerazione di un elemento $\mathcal{E}$ di materia influenzata da N altri $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$, si afferma poi che « ...caso per caso le circostanze determinatrici di $\boldsymbol{a}^*$ vanno ricercate nella mutua posizione di $\mathcal{E}$ e degli $\mathcal{E}_s$, nella loro costituzione e condizione fisica, magari in « divari di velocità »; voglio dire, in differenze tra $\boldsymbol{v}^*$ e le omologhe velocità degli $\mathcal{E}_s$. Leggi notissime della fisica macroscopica fanno presupporre che ognuna di tali circostanze possa riuscire essenziale ».

A pg. 14 si ritiene che in Meccanica vada considerato il caso puramente meccanico e inoltre si afferma « ... le circostanze determinatrici di $\boldsymbol{a}^*$ possono sempre intendersi precisate dai valori di un certo numero $\overline{N}$ di parametri $p_1, p_2, \ldots, p_N$ di carattere geometrico, cinematico, fisi-

Interessa qui notare che pur senza parlare di accelerazione di M causata da M_1, tale concetto di accelerazione si usa anche in $\mathcal{T}_{S23}$ dove assieme ad altri concetti analoghi essa viene definita sempre mediante una condizionale (periodo ipotetico) della irrealtà; V. [23], pg. 15, righe 12-21.

Appare subito intuitivamente (e del resto la cosa verrà confermata fra poche righe) che è restrittivo applicare alle teorie (o $\mathcal{T}_{S23}$) $\mathcal{T}_{P17}$ il precedente metodo estensionale di astrazione (MEA), direttamente, o magari dopo aver tradotto la suddetta condizionale della irrealtà in una implicazione al modo indicativo nella forma seguente:

DEFINIZIONE 10.1 – *Dati due punti materiali M e M_1, due punti geometrici P e P_1 e due velocità (vettoriali) $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_1$, si dice che $\boldsymbol{a}^*$ — oppure $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_{MM_1PP_1vv_1}$ — è l'accelerazione di M causata da M_1 nel caso che P e $\boldsymbol{v}$ (P_1, $\boldsymbol{v}_1$) sian la posizione e la velocità di M (M_1), se, nell'ipotesi che ad un istante t il detto caso si verifichi e inoltre M ed M_1 siano isolati, allora (come conseguenza fisica) $\boldsymbol{a}^*$ è l'accelerazione di M all'istante t.*

Si osservi che d'altro canto, conformemente alla concezione modale della Meccanica sviluppata in modo esplicito nei numeri precedenti, la definizione 10.1 può accettarsi se, in primo luogo il periodo ipotetico « nell'ipotesi che..., allora... » in essa contenuto si considera come non riducibile ad un'implicazione materiale ma come una implicazione causale, precisamente una implicazione fisica (cosicchè la def. 10.1 risulta basata sul concetto di possibilità fisica), e in secondo luogo si presuppone un'ammissione come la seguente, contenente un'affermazione di possibilità fisica ed una di necessità fisica (quest'ammissione può considerarsi, nella precedente esplicita concezione modale della Meccanica, come

---

co..... basta far capo al concetto generale di funzione, quale ormai viene fissato in ogni corso di Analisi, per concludere che sullo schema microscopico l'accelerazione assoluta attuale $\boldsymbol{a}^*$ è da considerarsi come una ben determinata funzione $\boldsymbol{L}$ dei simultanei valori di tutti i parametri p:

$$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{L}\,(p_1, p_2, \dots p_{\overline{N}}).$$

una conseguenza della parte 2ª del secondo assioma del passo 10.2):

AMMISSIONE 10.1 – *Dati* M, M_1, P, P_1, $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{v}_1$ *come nella def.* 10.1, *di conseguenza sono soddisfatte le due seguenti condizioni*:

CONDIZIONE 10.1 – È fisicamente possibile che, ad un istante, M e M_1 siano isolati ed M (M_1) si trovi in P (P_1) con velocità $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}_1$).

CONDIZIONE 10.2 – Esiste un'accelerazione (un vettore) $\boldsymbol{a}$ tale che se all'istante t, M ed M_1 sono isolati ed M (M_1) si trova in P (P_1) con velocità $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}_1$), allora (come conseguenza fisica) $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione di M all'istante t.

La validità della condizione 10.1 nelle ipotesi dell'ammissione 10.1 equivale all'esistenza di almeno un valore $\boldsymbol{a}$ per l'accelerazione $\boldsymbol{a}^*$ considerata nella Def. 10.1. L'analoga validità della Cond. 10.2 (in cui la condizionale « se ... allora ... » sia intesa come implicazione fisica) equivale all'unicità del valore dell'accelerazione $\boldsymbol{a}^*$.

È importante osservare che se nella Def. 10.1 e nei Passi 10.1 e 10.2 si considerano tutte le implicazioni come materiali, di conseguenza l'accelerazione $\boldsymbol{a}^*$ — ovvero $\boldsymbol{a}^*_{M,M_1,P,P_1,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1}$ — è determinata solo se proprio *si verifica* ciò che nella Cond. 10.1 è considerato come fisicamente possibile, in particolare solo se M ed M_1 ad almeno un istante t sono isolati.

Volendo far uso di sole implicazioni materiali, ed intendendo i passi 10.1 e 10.2 da questo punto di vista, nell'ammissione 10.1 va tolta dalla Cond. 10.1 la frase « È fisicamente possibile che » e dalla Cond. 10.2 la frase « (come conseguenza fisica) ». Ridotta a tale forma materiale, l'ammissione 10.1 va ancora considerata come conseguenza della parte 2ª del secondo assioma del passo 10.2, come si può verificare applicando procedimenti del tipo di quelli usati per dimostrare nel nº 7 la proposizione Σ_1 intesa in senso materiale.

Ponendosi decisamente da quest'ultimo punto di vista (materiale) sono stati dati i primi contributi all'assiomatizzazione in senso stretto connessa con teorie di classe Γ_3, alludo alle teo-

rie $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ che, sebbene presentate in forma logistica, sono strettamente connesse a quella $\mathcal{T}_1$, di tipo matematico e presentata in questo lavoro, per la equivalenza, generalmente ammessa, fra le teorie matematicamente formali e quelle logisticamente formali.

Come mostrerò più esplicitamente al numero seguente, $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ contengono assiomi non di possibilità fisica ma di esistenza, assiomi del tipo dell'ammissione 10.1 posta in forma materiale (si ammette cioè che proprio si verifichino certi urti o certi altri fenomeni).

Come appare direttamente dalla suddetta forma materiale dell'ammissione 10.1 e come risulta da $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ — V. per es. [19] — tali postulati impongono grosse restrizioni, sensibili specialmente quando si voglia definire la forza.

La concezione modale della Meccanica basata sulla possibilità fisica e usata in forma esplicita in questo lavoro, evita tali difficoltà e mi sembra costituisca una naturale precisazione della concezione della Meccanica insita in $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ [43]).

Può darsi che in $\mathcal{T}_{P17}$ (e $\mathcal{T}_{S23}$) gli assiomi di possibilità fisica si sottintendano sistematicamente, forse dando implicitamente alle implicazioni della irrealtà un valore differente da quello ad esse esplicitamente attribuito in questo lavoro (e in [3]) [44]).

Si consideri, per es., l'assioma d'inerzia nel Passo 10.2. Conformemente alla concezione esplicitata nei paragrafi precedenti, esso

---

[43]) È stato proposto recentemente qualche assioma modale per definire la massa, ma sono stati simultaneamente segnalati alcuni svantaggi di tali assiomi, confr. nota [24])c.

Il metodo estensionale delineato per risolvere il paradosso esterno PE_1 permette fra l'altro di tradurre rigorosamente e direttamente gli assiomi del passo 10. 2, opportunamente completati, in una teoria strettamente assiomatica (di tipo completamente matematico e semanticamente unitaria).

[44]) Nell'assiomatizzazione in senso stretto si evita con cura l'uso di implicazioni della irrealtà — cfr. nota [41]) —. È scritto poi in [14] a pg. 263, righe 11-14 « Recent philosophical literature indicates how unsatisfactory an analysis we yet have of such assertions, and it consequently seems desirable to eliminate all use of them in a precisely formulated axiomatisation of mechanics ».

va inteso nel senso che *se un punto materiale è isolato, allora come conseguenza fisica esso descrive...* L'analogo vale per l'assioma della indipendenza degli effetti degli elementi materiali, detto anche principio del parallelogramma delle forze.

Si consideri ora il seguente passo che segue in [17] immediatamente il passo 10.2.

PASSO 10.3 – « Tels sont les axiomes qui sont nécessaires et suffisants pour fonder la Mécanique moderne. Ces axiomes une fois admis, convenons d'appeler trièdre absolu tout trièdre de réference qui répond à ces axiomes. Il est facile de démontrer que, si un trièdre est absolu, tout trièdre animé d'une translation rectiligne et uniforme par rapport au premier est encore absolu, et réciproquement. » [17], pg. 66 righe 10-16.

Il reciproco considerato in tale passo non si può dimostrare rigorosamente a partire dagli assiomi del passo 10.2 (neanche intendendo tutti i periodi ipotetici come implicazioni materiali). La dimostrazione del detto reciproco riesce sottintendendo opportune ammissioni di possibilità fisica, per es. la seguente, che può aggiungersi all'assioma d'inerzia del passo 10.2 come 2ª parte di un più completo assioma d'inerzia:

AMMISSIONE 10.2 – *Per ogni concepibile moto che sia rettilineo ed uniforme rispetto al triedro considerato, è fisicamente possibile che esso sia compiuto da un punto materiale isolato.*

Un'ammissione analoga verrà fatta nella teoria $\mathcal{T}_1$ esposta in questo lavoro. Incidentalmente si può osservare che anche aggiungendo tale ammissione *non risulta completamente determinata la misura dello spazio*; e inoltre non è necessario affermare la completa validità dell'ammissione 10.1 per determinare l'accelerazione $\boldsymbol{a}^*$; infatti in $\mathcal{T}_1$ sostanzialmente si afferma che l'ammissione 10.1 vale nel caso $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$ (in modo da poter determinare il rapporto delle masse), ma per quanto riguarda il caso generico la si sostituisce con un'ammissione meno restrittiva che tenga conto anche del principio del parallelogramma delle forze, (ammissione che appunto permette di determinare le forze ed anche la misura dello spazio).

Mi sembra importante notare che in $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S22}$ va sottinteso, per es., un'assioma come la ammissione 10.2, ma specialmente che in $\mathcal{T}_{P17}$ o in $\mathcal{T}_{S22}$ non c'è mai un esplicito assioma di possibilità fisica, nè la possibilità fisica vi viene mai usata esplicitamente (nonostante essa vi vada considerata come largamente usata in forma implicita).

Mi sembra importante notare che i postulati di possibilità fisica hanno nei sistemi di assiomi di classe Γ_3 un ruolo importante e analogo a quello dei postulati di esistenza in geometria. Però, come risulta indirettamente, per es., da $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$, mentre è apparso chiaro che un qualche analogo di tali postulati va sottinteso, la esplicitazione completa di tali sottintesi sembra un problema piuttosto difficile e critico nei riguardi della assiomatizzazione in senso stretto, un problema la cui risoluzione è connessa, da un lato, con la natura del metodo di assiomatizzazione, e, dall'altro, con l'analisi di concetti, basilari per la fisica ma poco esplicitati, quali quello di possibilità fisica e quelli su questo basati.

Si può poi osservare che è vero che nella parte 2ª dell'assioma d'inerzia (nel passo 10.2), si afferma fra l'altro che l'accelerazione $\gamma = \boldsymbol{a}^*$ di M causata da M_1 dipende solo da $r = |MM_1|$ e dr/dt, il che implica che essa sia determinata dalle posizioni P, P_1 e dalle velocità $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1$ di M ed M_1, ed è vero che la detta affermazione implicitamente implica che l'accelerazione $\gamma = \boldsymbol{a}^*$ esiste. Ma in [17] la definizione di accelerazione causata è data prima della detta parte 2ª, vedi i passi 10.1 e 10.2, inoltre sia secondo la concezione basata sulla possibilità fisica su cui si fonda il presente lavoro, sia secondo quella basata sull'implicazione materiale e applicata per es. in $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$, in $\mathcal{T}_{P17}$ *è proprio sottointeso un assioma di possibilità o di esistenza* (per es. l'assioma 10.2) *occorrente per giustificare il passo* 10.3. Ciò fa pensare che, forse, secondo i criteri di assiomatizzazione seguiti nella costruzione di teorie informali del tipo di $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S22}$, la detta parte 2ª serve solo a specificare la dipendenza di γ (ossia $\boldsymbol{a}^*$) da P, P_1, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_1$ e che se non fosse per questa specificazione, tale parte sarebbe stata omessa. Tali omissioni sembrano cioè sistematiche.

Ad ogni modo l'ammissione 10.1 fornisce una possibile pre-

cisazione di un senso in cui si può intendere che l'accelerazione $\gamma = \boldsymbol{a}^*$ (definita mediante una implicazione della irrealtà) sia perfettamente determinata.

Si osservi che benchè la possibilità fisica non figuri esplicitamente nella detta parte 2ª, essa vi figura implicitamente (e, tramite γ, in modo molto esteso) in quanto figura nell'ammissione 10.1 la quale, a quanto mi consta, costituisce l'unica precisazione, del tipo suddetto, non implicante forti restrizioni.

* * *

A proposito dell'affermazione (di una certa evidenza) che la possibilità fisica sia insita nelle teorie di classe Γ_3, informali oppure formali ma esenti da grosse restrizioni del tipo di quelle notate in $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$, mostro ora come l'analoga affermazione per la classe Γ_2 sia meno evidente.

A tale scopo si riprenda il metodo per tradurre le implicazioni fisiche del linguaggio $\mathfrak{L}^*$ nel linguaggio $\mathfrak{L}$ usando le $EUFP$-evoluzioni. Mediante esso si traducano in $\mathfrak{L}$ la def. 10.1 e l'ammissione 10.1. Quindi il passo 10.2. A tale passo si può allora dare la forma seguente in cui « A_η » sta per il complesso degli assiomi figuranti nel passo 10.2 in forma materiale — ossia con le implicazioni intese come implicazioni materiali —;

PASSO 10.2′ – *Esiste una misura delle distanze e del tempo ed un riferimento per cui, qualunque sia l'$EUFP$-evoluzione η, sussiste A_η (ovvero A^* è fisicamente necessario).*

Il passo 10.2′, che può dirsi forma fisica del passo 10.2, è più forte della chiusura rispetto ad η del passo 10.2 tradotto in $\mathfrak{L}$ considerandovi tutte le implicazioni come materiali, in altre parole la *forma fisica del passo* 10.2 *è più forte della chiusura modale della forma materiale del passo* 10.2 *stesso* (tale chiusura modale consistendo — secondo una definizione insita nell'osservazione 8.1 — nell'affermazione che è fisicamente necessario che sussista il passo 10.2 nel considerato senso materiale). Infatti la precedente chiusura rispetto ad η del passo 10.2 tradotto (da $\mathfrak{L}^*$) in $\mathfrak{L}$,

può esplicitarsi nella forma seguente, di agevole confronto con il passo 10.2′:

PASSO 10.2″ – *Qualunque sia la EUFP-evoluzione* η, *esiste una misura...*, *per cui vale* A_η.

Ciò mette in luce una differenza fra gli assiomi della teoria $\mathcal{T}_{P17}$ di classe Γ_3 e quelli delle teorie di classe Γ_2. Infatti queste ultime contengono (propriamente) assiomi e molti teoremi *le cui forme fisiche equivalgono perfettamente alle chiusure modali delle loro rispettive forme materiali.*

In altre parole, la validità della traduzione in $\mathfrak{L}$ di uno di tali assiomi e teoremi, considerato intendendovi le implicazioni come implicazioni fisiche, equivale perfettamente alla validità in ogni *EUFP*-evoluzione η del medesimo assioma o teorema considerato intendendovi le implicazioni come materiali. Quest'ultima equivalenza si può agevolmente verificare per es. riguardo all'enunciato E considerato nella nota 22.

Quanto precede, specialmente in connessione con l'uso di enunciati aperti notato nella Osserv. 8.2 e la grande diffusione di teorie di classe Γ_2, spiega come sia poco sentita la differenza nel senso (o, se si vuole, nell'uso) fra le condizionali appartenenti al linguaggio geometrico e quelle del linguaggio fisico. Si può dire che il concetto di possibilità fisica, pur essendo insito tanto nelle leggi appartenenti a teorie di classe Γ_3 quanto in quelle relative alla classe Γ_2, appare con molta più evidenza nelle prime in quanto *nelle seconde la presenza della possibilità fisica è molto spesso in parte mascherata da un giuoco di quantificatori* [45]) (precisamente dalla trasformazione nella cosiddetta prenex forma, V. [11], pg. 167), *dalla regola per cui la frase « è fisicamente possibile che... » di* $\mathfrak{L}^*$ *è tradotta in* $\mathfrak{L}$ *mediante la frase « qualunque sia* η *... », e dall'uso di tacere i quantificatori universali* [Osserv. 8.2].

A tal punto va però ricordato che anche in teorie di classe Γ_2 vi sono teoremi non del tipo sopra considerato, per es. quello del moto del baricentro [n. 9], in particolare gli enunciati TMB_1

---

[45]) La frase « qualunque sia x... » [« esiste un x tale che... »] si dice quantificatore universale [esistenziale].

e TMB_2 di esso. Inoltre le negazioni di proposizioni come le Σ_1 e Σ_3 considerate al n. 7 e molte altre proposizioni dello stesso tipo vanno pure considerate come teoremi di tali teorie, anche se non interessa dimostrarle in quanto considerate come ovvie.

La possibilità fisica interviene poi nelle definizioni o caratterizzazioni delle nozioni di vincolo e campo di forza — si pensi al comunissimo modo di introdurre il campo elettrico, basato su una condizionale della irrealtà —.

Anche prescindendo dalle teorie di classe Γ_2 contenenti, per es., una definizione di campo di forza del tipo di quella data in $\mathfrak{T}_1$ al n. 27, ossia assumendo le nozioni di vincolo e di campo come primitive, la loro accennata caratterizzazione mostra che il concetto di possibilità fisica è alla base delle teorie di classe Γ_2 e Γ_1.

11. Su particolari recenti assiomatizzazioni in senso stretto della meccanica.

Premetto che la lettura di questo numero — nella cui seconda parte si considera brevemente una recente assiomatizzazione dei sistemi continui, che anzi è ancora in fase di sviluppo — non è necessaria per la comprensione dei numeri seguenti. Nella prima parte del presente numero cerco di rendere in un linguaggio comune (mediante concetti comuni) ed in forma, mi sembra, semplificata ma logicamente accettabile ciò che può considerarsi il modo in cui nella teoria $\mathfrak{T}_{H8}$ di H. Hermes si risponde a cosa significhi che l'accelerazione $\gamma = \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a}^*_{M,M_1,P,P_1,v,v_1}$, considerata nel numero precedente, è determinata [46]).

Come ho già detto, la teoria $\mathfrak{T}_{H8}$, pubblicata già nel 1938, concerne i sistemi continui secondo la teoria della relatività ristretta e nel caso puramente meccanico. $\mathfrak{T}_{H8}$ è di tipo completamente matematico (addirittura logisticamente formale). Essa tratta concetti contingenti, del tipo dei concetti (1), a) e a') ecc.,

---

[46]) Dei lavori di H. HERMES sugli assiomi della Meccanica si è giovato HAMEL nel suo trattato « Theoretische Mechanik » come risulta, per es., da citazioni a pg. 509.

e si basa sulla comune logica estensionale (ossia, considerata come teoria astratta, $\mathcal{T}_{HS}$ può pensarsi come ottenuta applicando il metodo *MEA* ad una teoria informale dotata di concetti del tipo di quelli (1), teoria che secondo la concezione modale della Meccanica esplicitata in precedenti paragrafi va considerata come basata su una logica modale).

Poichè i concetti usati in $\mathcal{T}_{HS}$ non sono comuni [47]) e la teoria è molto complessa (contenendo anche definizioni concernenti la forza) cerco ora, parlando di punti eventi ed in modo relativamente semplice, di dare un'idea di come in $\mathcal{T}_{HS}$ si definisca ciò che d'ordinario si chiama il rapporto ϱ_{E_1,E_2} delle densità di massa a riposo che la materia ha nei punti eventi E_1 ed E_2 (supposto tale rapporto come esistente).

Premetto a tale scopo la seguente

DEFINIZIONE 11.1 – *Si dice che E_1 ed E_2 sono a densità direttamente confrontabili e che il loro rapporto è ϱ_{E_1,E_2} se, detti Σ_1 e Σ_2 due riferimenti spazio temporali inerziali dotati delle stesse unità di misura e tali che rispetto a Σ_1 (Σ_2) la materia abbia in E_1 (E_2) velocità nulla, allora per $i = 1, 2$, esiste una successione $\mathcal{R}_1^i, \mathcal{R}_2^i, \ldots$ di regioni tridimensionali del cronotopo, contemporanee a E_i rispetto a Σ_i, in modo che valgano le seguenti tre condizioni*

a) $\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_n^i = E_i \quad (i = 1, 2)$.

b) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\,(\mathcal{R}_n^1)/\mathrm{vol}\,(\mathcal{R}_n^2) = 1$.

c) Per $i = 1. 2$; $r = 1, 2, \ldots$ si dica C_r^i il corpo (la porzione di materia) occupante la regione $\mathcal{R}_r^i$ (all'istante caratterizzato da E_i rispetto ad un osservatore solidale con Σ_i). Ciò premesso esistono una semplice infinità $\{\sigma_r\} = \{\sigma_r^{E_1,E_2}\}$ di sfere solidali a Σ_1 e di raggi complessivamente limitati, inoltre esistono quattro doppie infinità $\{\vartheta_{rs}\}$, $\{a_{rs}^i\}$ e $\{\varepsilon_{rs}\}$ e due semplici infinità $\{a_r^i\}$ di numeri reali ($r, s = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2$) per cui in primo

---

[47]) Tale è, per es., quello di genidentità. Cfr. con la nota [33]). Si osservi che « E_1 ed E_2 sono genidentici » esprime un fatto contingente al pari delle proposizioni (1).

luogo, è

$$(8)\quad \begin{cases} a_r^i = \lim\limits_{s\to\infty} a_{rs}^i\,, \quad \lim\limits_{s\to\infty} \varepsilon_{rs} = 0\,, \qquad (i = 1, 2;\, r = 1, 2, \ldots), \\ \varrho_{E_1, E_2} = \lim\limits_{r\to\infty} (a_r^2/a_r^1)\,, \end{cases}$$

e in secondo luogo, per r, $s = 1, 2, \ldots$, rispetto al riferimento Σ_1, all'istante $\vartheta_{r,s}$, C_r^1 e C_r^2 si trovano dentro la sfera σ_r in posizioni separate e indipendenti da s, e per $i = 1, 2$ gli elementi di C_r^i hanno velocità nulle e accelerazioni differenti (in modulo) da a_r^i per meno di ε_{rs}.

Ecco tre assiomi che permettono di dimostrare l'esistenza ed unicità del rapporto $\bar{\varrho}_{E_1, E_2}$ delle densità a riposo in due punti eventi E_1 ed E_2, per E_1 ed E_2 in posizioni qualunque ma fuori da ipersuperfici di discontinuità (posizioni costituenti un insieme dotato della potenza del continuo).

ASSIOMA 11.1 – *Se E_1 ed E_2 sono a densità direttamente confrontabili, il loro rapporto ϱ_{E_1, E_2} è unico. Se tali sono anche E_2 ed E_3, allora è*

$$(9)\qquad \varrho_{E_1, E_3} = \varrho_{E_1, E_2}\, \varrho_{E_2, E_3}\,.$$

ASSIOMA 11.2 – *Si può dividere mediante ipersuperfici (regolari) la regione spazio temporale occupata dalla materia in regioni quadrimensionali aperte $A_1, A_2, \ldots$ in modo che esistano una base* [48]) *B per la riunione $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ di queste ed una funzione $\bar{\varrho}_{E_1, E_2}$ definita per E_1 ed E_2 varianti in A, soddisfacente le seguenti due condizioni:* [49]):

---

[48]) Una base B di A è un insieme numerabile la cui chiusura contiene A.

[49]) Non si potrebbe sopprimere la condizione *a*) e sostituire l'ipotesi che B sia una base di A con quella che B sia « *quasi tutto* A » o con qualunque altra implicante che B abbia la potenza del continuo.

Infatti se B ha la potenza del continuo, basandosi sull'assioma 11.2 ed un ovvio assioma che affermi la continuità della posizione degli ele-

a) A_i è un insieme di continuità per $\bar{\varrho}_{E_1, E_2}$, sia pensata come funzione di E_1 che di E_2 ($i = 1, 2, \ldots$).

b) Se E_0 ed E appartengono a B, esiste ivi (almeno) una successione finita $E_1, \ldots, E_n$ tale che $E_n = E$ e per $i = 1, \ldots, \ldots, n$, E_{j-1} ed E_j sono a densità confrontabili inoltre, usando le precedenti notazioni ,è

$$\bar{\varrho}_{E_0, E} = \varrho_{E_0, E_1} \cdot \varrho_{E_1, E_2} \cdot \ldots \cdot \varrho_{E_{n-1}, E_n} \,. \tag{10}$$

Come è stato osservato da B. Rosser in [19], l'assioma $A8.1$ di $\mathcal{T}_{H38}$, corrispondente al precedente Ass. 11.2, impone grosse restrizioni al moto degli elementi materiali. Infatti dagli Assiomi 11.1 e 11.2 risulta che quelle particolari situazioni sopra considerate in corrispondenza agli istanti ϑ_{r_s} proprio si verificano (e non, per es., che possono verificarsi).

Il lavoro di H. Hermes [9] (1959) è simile al precedente [8] per precisione, ma si riferisce a sistemi particellari classici entro i quali si definiscono le masse relative mediante urti (che si ammette avvengano). Non vi si considerano forze, nè il metodo degli urti sembra adatto alla definizione di queste, sia pur limitandosi al caso puramente meccanico.

In [9] le accennate particolari situazioni che si postula avvengano sono ridotte ad un numero finito, ciò nonostante ci sono. Per evitare le dette restrizioni pare opportuno modificare radicalmente il metodo stesso (cfr. nota 14,*c*).

Si noti che dell'assioma $A8.1$ di $\mathcal{T}_{H8}$, analogo al precedente Ass. 11.2, B. Rosser in [19] scrive precisamente « It is quite pos-

---

menti materiali come funzione del tempo, è applicabile il seguente

PARADOSSO 11.1 – Se in B la velocità di qualche elemento materiale assume una infinità continua di valori, esiste un insieme $\mathfrak{J}$ avente la potenza del continuo, i cui elementi sono insiemi aperti dello spazio euclideo S_4 delle quaderne di numeri reali, a due a due disgiunti.

L'osservazione che nel caso considerato sia applicabile il paradosso 11.1, non è immediata. Fatti analoghi accadono poi quando in modo simile si voglia definire la forza. È dunque importante dimostrare la compatibilità delle teorie del tipo qui considerato con casi possibili e non banali.

sible that, in writing $A8.1$, Hermes really had in mind some sort of conditional statement to the effect that if the corpuscles behave in certain very peculiar fashions, then other would happen. However, as stated, $A8.1$ is distinctly not conditional ». Conformemente a cose già dette nel numero precedente, ponendo $A8.1$ in forma condizionale opportuna, si potrebbe dimostrare l'unicità del rapporto ϱ_{E_1, E_2} delle densità a riposo in E_1 ed E_2 ma non la sua esistenza. La teoria diverrebbe incompleta allo stesso modo della $\mathcal{T}_{P17}$ in relazione all'assioma d'inerzia [n. 10]. Le citate parole di Rosser rafforzano la congettura fatta nel n. 10 circa il carattere accidentale dell'affermazione che l'accelerazione $\gamma = \boldsymbol{a}^*$ esista, affermazione implicitamente contenuta nella parte 2° del secondo assioma del passo 10.2.

Il precedente citato contribuisce a mostrare che il punto oscuro e critico è proprio il problema dell'esistenza e della determinazione di γ, e, direi, quello del senso in cui tale determinazione va intesa.

L'unico modo di evitare le dette restrizioni è quello (applicato in $\mathcal{T}_1$, e) delineato nell'ammissione 10.2 la quale contiene un'affermazione di possibilità fisica ed una di necessità fisica (precisamente una implicazione fisica e non materiale); perciò è opportuno — mi sembra il caso di notarlo — aver cercato di mettere particolarmente in evidenza la differenza fra le due dette implicazioni mediante il precedente paradosso PE_1.

* * *

Mi sembra utile notare come al fatto che il precedente paradosso PE_1 abbia luogo in teorie di classe Γ_2, Γ_3 ma non in teorie di classe Γ_1 — per cui fra l'altro solo ordinarie teorie (autonome) di classe Γ_1 possono considerarsi come semanticamente unitarie e al tempo stesso di tipo completamente matematico — faccia riscontro una certa assiomatizzazione in senso stretto della meccanica dei sistemi continui (usualmente trattati con teorie di classe Γ_2) fatta mediante teorie matematiche astratte di classe

Γ_3 (aventi appunto il carattere autonomo della $\mathcal{C}_{MA}$ considerata nei nn. 3, 6).

Si tratta di una assiomatizzazione di tipo Hilbertiano, astratto, in cui rispetto a $\mathcal{C}_{P17}$ e $\mathcal{C}_{S23}$ si dà più peso all'aspetto matematico che a quello fisico. Non si danno esplicite precisazioni di qualche « intesa interpretazione » appunto conformemente al metodo di D. Hilbert, secondo cui gli assiomi stessi devono precisare il senso dei termini primitivi.

Il primo lavoro di tale tipo è [16] [50]) dove l'Autore intende dare « precise definizioni assiomatiche dei concetti base usati in [15] » — V. [15], pg. 200 riga 7 —.

Interessa qui notare brevemente che con tali definizioni assiomatiche — contenenti appunto assiomi (come condizioni) — in [16] si introducono i concetti base di CORPO, insieme Φ di CONFIGURAZIONI del corpo B, funzione m di DISTRIBUZIONE della MASSA di B, MOTO di B, QUANTITÀ di MOTO relativa ad un dato moto di B, ..., quelli di SISTEMA DI FORZE DI MASSA per B, SISTEMA DI FORZE DI CONTATTO per B, SISTEMA DI FORZE per B e PROCESSO DINAMICO.

Si può dire che la trattazione [16] è di tipo completamente

---

[50]) Recentemente — v. [15] (1959), pg. 209 e [16] (1959), pg. 280 — è stato enunciato il principio d'indifferenza materiale — principle of objectivity — di W. Noll. Tale principio è importante per trattazioni generali dei sistemi ereditari; esso è pure utile per trattare rigorosamente l'elasticità, per es. per dimostrare che l'energia libera $\mathcal{F} = u\text{-}EsT$, il potenziale termodinamico u e l'entropia s dipendono dalla configurazione tramite le caratteristiche di deformazione. Va notato che vi sono però trattazioni rigorose dell'elasticità che ne fanno completamente a meno. Per es. in [24], pg. 109 si dimostra che $\mathcal{F}$ e poi s, quindi anche u, non possono dipendere che dalle dette caratteristiche e dalla temperatura, servendosi di una nota espressione lagrangiana del lavoro delle forze interne.

In occasione della enunciazione del detto principio, in [16] l'Autore dà un « brief outline of an axiomatic scheme for continuum mechanics » cercando di introdurre « the same level of rigor and clarity as is now customary in pure mathematics », pg. 266, il che è conforme alla affermazione « ...no serious attempt was made for a long period to put continuum mechanics on a rigorous axiomatic basis », pg. 266.

matematico [51]) e fino ad un certo punto semanticamente unitaria [52]).

---

[51]) Mi sembra occorra giustificare in qualche modo questa affermazione che equivale a quella che la trattazione assiomatica fatta in [16] è basata su un sistema di oggetti. Si può osservare che una teoria formale $\mathcal{T}$ di solito è presentata formando un elenco di concetti o meglio termini primitivi $\langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$ e un elenco di assiomi nei quali si può far anche uso di definizioni appartenenti alla $\mathcal{T}$. Si può ritenere che all'incirca in tal modo si proceda nel trattato [7] di Hamel.

Talvolta — v. per es. in [14] o [1] — si definisce (mediante una sola definizione) la generica n-pla $\langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$ che costituisce il sistema di oggetti su cui la $\mathcal{T}$ è basata, e invece di usare n termini primitivi si usano n lettere.

Può forse sorgere qualche dubbio su quale sia di preciso la teoria formale « brevemente delineata » in [16], precisamente quali siano i termini primitivi e specialmente quali siano i veri assiomi — ossia cosa si potrebbe considerare come assiomi se si usasse una esposizione normale senza « definizioni assiomatiche » —. Tali dubbi potrebbero forse sorgere specialmente se si vuole una teoria assiomatica (semanticamente unitaria) capace di una interpretazione data con una certa precisione e un certo rigore (per es., usando la possibilità fisica come al n. 6 per la $\mathcal{T}_{MA}$), una interpretazione in cui poi, per es., i principi del risultante e del momento risultante abbiano veramente il carattere di leggi che fanno sapere qualcosa sulla realtà. Un semplice modo di raggiungere questo scopo potrebbe essere quello di considerare in [16] parte delle accennate definizioni assiomatiche (o magari tutte) come veri assiomi nel senso precedente. La cercata interpretazione può far nascere questioni delicate ma, mi sembra, è possibile.

[52]) La interpretazione fisica accennata in nota [51]) non involge concetti contingenti quali gli analoghi per i sistemi continui dei concetti (1), a) e a'), ma concetti del tipo di quello di possibile moto naturale per il sistema $\mathcal{S}$ — $\mathcal{M}_2(\mathcal{S})$ —, concetto appartenente alla teoria $\mathcal{T}_{MA}$ [n. 6].

Allora in analogia di quanto accade per $\mathcal{T}_{MA}$, la accennata interpretazione della teoria delineata in [16], escluso il numero 7, descrive da sola tutti i possibili casi per cui la teoria è stata costruita.

La trattazione fatta in [16] è semanticamente unitaria ma solo fino ad un certo punto, in quanto nel N. 7 è detto « An axiom that characterizes the particular material properties of a body is called a CONSTITUTIVE ASSUMPTION. It restricts the class of dynamical processes the body can undergo. A familiar example is the assumption that the body is rigid ». Dunque in [16], nel N. 7 si delinea una teoria per un corpo rigido ed un'altra, per es., per un fluido viscoso di date caratteristiche ecc...

12. Sull'opportunità del metodo estensionale traducente direttamente la precedente concezione modale della meccanica rispetto all'alternativa di basarsi direttamente su una conveniente logica modale.

Ci si può chiedere se non convenga costruire le teorie di classe Γ_3 usando esplicitamente il concetto di possibilità fisica e quelli con esso connessi come si è fatto, per es., nell'ammissione 10.1; così il linguaggio fisico, ordinario ed usuale verrebbe solo completato ($\mathfrak{L}^*$) ma non alterato come nel passaggio al linguaggio $\mathfrak{L}$. Si posson certamente fare tali costruzioni, anzi la teoria $\mathfrak{T}_1$ (o la $\mathfrak{T}_2$) può facilmente tradursi in $\mathfrak{L}^*$, inteso nella sua forma modale completa — dirò in seguito $\mathfrak{T}_1^*$ tale traduzione —, ma è proprio l'introduzione delle *EUFP*-evoluzioni (più precisamente quella dei *CMP*-casi, costituenti una specificazione del resto non essenziale delle dette evoluzioni) che precisa sia il senso che l'uso dei nessi direttamente basati sulla possibilità fisica.

Si noti che anzi a tali precisazioni concorre, in $\mathfrak{T}_1$, anche un opportuno uso del concetto di proprietà fisica (intrinseca, ossia non cinematica).

Sta poi di fatto che, finora, entro nessuna teoria fisica assiomatica moderna rigorosa si parla esplicitamente di possibilità e si evitano con cura le implicazioni della irrealtà.

Chi si occupa di assiomatizzazione in senso stretto, in generale guarda con sospetto a procedimenti basati su una logica modale — V. note 24 *c* e 41 —. Si ha sfiducia nei riguardi di teorie di logica modale, in particolare di quelle basate sul calcolo proposizionale di Lewis, che sembrerebbe uno fra i più adatti ad applicazioni. Si dice che tali teorie sono poco sviluppate, e che, fra l'altro, non si può basare su di esse una aritmetica (e at-

---

Va però notato che nei lavori d'assiomatizzazione in corso, fatti sviluppando le idee poste in [16], sembra vengan introdotti altri concetti base in modo da ottenere maggior generalità ed anche maggiore unità.

Incidentalmente notiamo che in [16], a pg. 280, il principio di indifferenza materiale è enunciato come condizione sugli assiomi costituenti ipotesi costitutive e quindi ha carattere di meta-assioma.

tualmente, a quanto mi consta, non è stata ancora pubblicata alcuna teoria dei numeri basata su tale logica, atta ad essere applicata alla fisica in modo soddisfacente).

Qualcuno anche dubita della possibilità di un buono sviluppo della logica modale, ma altri, per es. R. Carnap, sono di altra opinione [53]).

L'attuale stato poco sviluppato della logica modale (specialmente per quanto riguarda il calcolo superiore dei predicati, l'uso degli operatori lambda e iota [54]), e appunto la teoria dei numeri), e inoltre il fatto che al solo calcolo proposizionale estensionale di Russel corrispondano più calcoli proposizionali modali, riflettono quanto poco rigorosamente sian di solito precisati i vari concetti basati sulla possibilità insiti in teorie fisiche, quanto possano variare le loro regole d'uso, e che tali regole potrebbero forse fissarsi in vari modi.

Se la teoria $\mathcal{T}_1$ venisse presentata solo nella sua forma modale $\mathcal{T}_1^*$, per essere rigorosi occorrerebbe fra l'altro precisare in qualche modo le leggi o meglio gli schemi o le *regole concernenti la possibilità fisica* a cui si intende attenersi. Ciò sarebbe utile anche per chiarificare il tipo di possibilità a cui ci si riferisce.

Supposte rigorosamente stabilite tali regole (il che determinerebbe a quale calcolo proposizionale modale ci si riferisce) il

---

[53]) In [6] CARNAP costruisce certi linguaggi modali e dà per essi delle regole semantiche (ossia di interpretazione) estensionali, basate sulle state-descriptions, che rappresentano un concepibile stato (spazio-temporale) dell'universo, logicamente possibile.

Egli a pg. 115 mostra come definire in uno di tali linguaggi i numeri naturali 0, 1, 2, ... presi singolarmente. A pg. 116 Egli definisce la proprietà NC di essere un numero cardinale (mi sembra però che per poter fare un'applicazione alla fisica anzi ad una teoria di classe Γ_3 occorra non solo sviluppare questi concetti ma introdurne certi altri).

È da notarsi la seguente affermazione di R. Carnap « The world of concrete things and the conceptual world of numbers are dealt with in the modal language just as well as in the extensional one » pg. 202 riga 15.

[54]) Gli operatori lambda (λ) e iota (ι) sono usati secondo i seguenti esempi: « $(\lambda x)(P_x \& Q_x)$ », ove P e Q sono proprietà (funzioni) e « & » sta per « e » (« moltiplicato per »), esprime $P_x \& Q_x$ *pensata come una proprietà (funzione) di* x. « $(\iota x)\, P_x \& Q_x$ », ove P e Q sono proprietà, esprime l'x *tale che sussistano* P_x *e* Q_x.

rigore risentirebbe ancora del suddetto incompleto sviluppo della logica modale [55]). *Il livello del rigore di* $\mathfrak{T}_1^*$ *apparirebbe inferiore a quello delle teorie estensionali assiomatiche in senso stretto*, perchè, in primo luogo, $\mathfrak{T}_1^*$ *non avrebbe modelli matematici diretti* ossia del tipo di quelli delle teorie assiomatiche, appartenenti alla matematica [per es. l'espressione « posizione » verrebbe usata in contesti del tipo $(1)_1$, ma non potrebbe venire interpretata in un particolare modello matematico mediante una funzione particolare avente anch'essa la struttura (1)]. Si noti che la costruzione di un tale modello — per es., quello considerato nel n. 30 — involgerebbe almeno in parte appunto il processo di estensionalizzazione insito nel passaggio da $\mathfrak{L}^*$ a $\mathfrak{L}$. Ciò fra l'altro mostra l'utilità del rigoroso carattere di teoria (estensionale) basata su di un sistema di oggetti che attraverso il presente lavoro riceve la $\mathfrak{T}_1$-*astratta*.

In secondo luogo, potrebbe contribuire a far apparire $\mathfrak{T}_1^*$ come meno rigorosa di $\mathfrak{T}_1$ il fatto che, a causa dell'attuale insufficiente sviluppo della logica modale, nella teoria $\mathfrak{T}_1^*$, a differenza di quanto accade per le teorie estensionali $\mathfrak{T}_1$ o $\mathfrak{T}_2$, le *deduzioni non potrebbero essere verificate a prescindere dal significato delle proposizioni che ne costituiscono i passi, mediante noti procedimenti logistici.*

Infine ammesso che venga costruito un calcolo logico modale sufficientemente generale *ML*, affinchè la costruzione della $\mathfrak{T}_1^*$ sia utile come quella della $\mathfrak{T}_1$ per discutere per es. questioni di compatibilità, indipendenza ecc. ..., occorre che, per es., *ML* venga dotato di regole semantiche estensionali, magari che esso sia tradotto appunto in un opportuno linguaggio estensionale [56]).

---

[55]) V. ove la nota [54]) è posta. Si osservi poi che occorrerebbe, fra l'altro, rendere conto del fatto che in $\mathfrak{T}_1$, per es., la proposizione « M *è un punto materiale* » non viene considerata come contingente.

[56]) Una tale traduzione, essendo fatta non solo per la particolare teoria $\mathfrak{T}_1$, sarebbe oltre che più generale anche più complessa di quella di $\mathfrak{L}^*$ in $\mathfrak{L}$ qui considerata — cfr. fra l'altro, nota [55]) —.

Nella accennata traduzione generale, ad un designatore δ^* di $\mathfrak{L}^*$ [per es. « posizione »] avente una data struttura σ^*, per es. quella determinata da $(1)_1$, ne potrebbe corrispondere un altro δ di $\mathfrak{L}$, di struttura σ determinata dalla sola σ^*, e più complessa di questa.

È naturale che vengano in seguito proposti metodi migliori di quello con cui qui è stata costruita la teoria $\mathcal{T}_1$, però a quanto mi consta esso per ora è l'unico che permette di risolvere completamente il *problema della costruzione di una teoria $\mathcal{T}$ di classe Γ_3, in cui* come in $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ *si definiscano massa e forza per sistemi particellari classici, che sia esente da forti restrizioni e che sia inoltre di tipo completamente matematico* (ma eventualmente non semanticamente unitaria).

Col detto metodo si costruiscono la $\mathcal{T}_1$ e la $\mathcal{T}_2$ che sono appunto come la precedente $\mathcal{T}$, e sono anche semanticamente unitarie.

PARTE II

Una teoria assiomatica classica dei punti materiali liberi. Definizione di massa, forza e riferimento inerziale.

13. Considerazioni introduttive alla Parte II.

Nella presente seconda parte viene introdotta la preannunciata teoria $\mathcal{T}_1$ di classe Γ_3 e concernente i sistemi di punti materiali liberi. Essa è esposta in modo che possa considerarsi sia come una teoria informale (oggettiva) quale la geometria degli antichi Greci, sia come una teoria matematica astratta (esprimibile facendo uso solo della teoria generale degli insiemi e, se si vuole, dell'analisi matematica), del tipo della Grundlagen der Geometrie di D. Hilbert.

A questo scopo, si indica rapidamente ma esplicitamente (e facendo uso del simbolismo della detta teoria degli insiemi) il tipo logico dei sette concetti base di $\mathcal{T}_1$ (includenti i concetti primitivi di $\mathcal{T}_1$).

Una completa formalizzazione di $\mathcal{T}_1$, basata su una teoria logica assiomatica di tipo ordinario non involgerebbe alcuna difficoltà. Si farà qualche breve osservazione in proposito.

Per quanto riguarda il lato oggettivo della teoria $\mathcal{T}_1$, varie

pagine sono spese per caratterizzare i suaccennati concetti base partendo da concetti includenti, in primo luogo, certi concetti geometrico-cinematici ordinari concernenti lo spazio-tempo e il moto dei punti materiali in esso. Si tratta dei punti eventi (PE), la relazione di precedenza temporale tra essi (Preced.), gli istanti (Ist.), i punti materiali (PM) e la relazione binaria intercorrente fra E e M quando E è un punto evento occupato dal punto materiale M ($E \in PEO^*(M)$). In secondo luogo i detti concetti di partenza includono la classe PrF^* delle proprietà fisiche non cinematiche ed infine il concetto di possibilità fisica.

La classe PrF^* è l'unico dei precedenti concetti che non ha riscontro in una teoria $\mathcal{T}_2$, che costituisce una versione semplificata della $\mathcal{T}_1$ ed è brevemente caratterizzata basandosi su quest'ultima. Più precisamente $\mathcal{T}_2$ può considerarsi la riduzione di $\mathcal{T}_1$ al *caso puramente meccanico*, in cui cioè le proprietà fisiche dei punti materiali sono considerate costanti.

Quanto alla possibilità fisica, in $\mathcal{T}_1$ (e $\mathcal{T}_2$) se ne tiene conto introducendo la classe CMP dei casi meccanicamente possibili, o CMP-casi. Questi possono identificarsi con le $EUFP$-evoluzioni introdotte nella parte prima per « risolvere » il considerato paradosso PE_1 mediante la traduzione del linguaggio (modale) ordinario ed usuale $\mathfrak{L}^*$ in uno estensionale $\mathfrak{L}$, ordinario ma assai poco usato.

Da quanto è stato detto nella prima parte risulta che i CMP-casi così intesi non costituiscono un vero concetto nuovo, figurante nella $\mathcal{T}_1$ e non contenuto in altre teorie. Esso, considerato nel senso precedente, non è che una forma estensionale del concetto di possibilità fisica la quale, a meno di accettare grosse restrizioni, va considerata come essenzialmente implicita in teorie assiomatiche informali quali le $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ (teorie, delle quali le $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ possono considerarsi, fra l'altro, come precisazioni e sviluppi).

Conformemente al metodo di estensionalizzazione determinato dalla detta traduzione di $\mathfrak{L}^*$ in $\mathfrak{L}$, mediante i CMP-casi vengono date forme opportune (PEO e PrF) ai precedenti concetti PEO^* e PrF^*. Per es., invece che « *E è un punto-evento occupato dal punto materiale M* » — ossia « $E \in PEO^*(M)$ » — si

dirà « *E è un punto evento occupato da M nel CMP-caso* γ » — ossia « $E \in PEO(M, \gamma)$ » —.

Si sostituisce così ad una particolare parte L^* del linguaggio $\mathfrak{L}^*$, una parte L di $\mathfrak{L}$.

Si mostra poi che anche intendendo i *CMP*-casi in un senso più particolare e preciso, per così dire circoscritto alla teoria $\mathfrak{T}_1$, la classe *CMP* si può definire usando esplicitamente la possibilità fisica, a partire da concetti molto comuni (onde nemmeno in tale senso *CMP* può apparire come un concetto essenzialmente nuovo). Ciò viene mostrato al n. 16 — interpretando la teoria $\mathfrak{T}_1$ (e la $\mathfrak{T}_2$) in un modo che la avvicina alla classe Γ_3. Più in particolare, senza naturalmente alterare la relativamente semplice struttura dei concetti primitivi di $\mathfrak{T}_1$ (o $\mathfrak{T}_2$), si dà ad essi un senso schematico, non contingente e relativamente complesso, che però non involge minimamente i concetti di massa, forza, riferimento inerziale, e misura dello spazio e del tempo, concetti che invece vengono poi realmente definiti in $\mathfrak{T}_1$ (e $\mathfrak{T}_2$).

Mediante un primo gruppo di assiomi involgenti i sei concetti base *PE*, Ist, Preced, *PM*, *PEO* e *CMP* si definiscono gli spazi inerziali (intesi come speciali classi di punti inerziali), gli ∞^{17} sistemi di coordinate affini includenti gli ordinari sistemi euclidei per il generico dei detti spazi, e gli ∞^2 sistemi ordinari di ascisse temporali (quindi le ∞^1 metriche temporali ordinarie).

Un altro assioma involgente gli stessi concetti permette di definire le masse (relative) dei punti materiali.

Ulteriori assiomi, involgenti in $\mathfrak{T}_1$ anche il concetto di proprietà fisica, precisamente proprietà *PrF*, permettono di definire

a) la forza che un punto materiale M_1 esplica su un altro M ad un istante ϑ e in un *CMP*-caso γ (anzi il campo, dovuto alle proprietà *PrF* attualmente possedute da M_1 ed M, della forza che M_1 può esplicare su M in corrispondenza delle possibili posizioni e velocità mutue di M_1 ed M),

b) gli ∞^7 ordinari sistemi di coordinate euclidee del generico spazio inerziale, in particolare le sue ∞^1 ordinarie metriche euclidee, ossia le misure dello spazio aventi interesse fisico.

Infine si considera brevemente ma compiutamente, come semplificare la $\mathcal{T}_1$ in una teoria $\mathcal{T}_2$ trattante il caso puramente meccanico e contenente come primitivi solo concetti matematici e cinematici (non si parla in $\mathcal{T}_2$ di proprietà PrF).

Le proprietà PrF sostanzialmente coincidono con le possibili *costituzioni fisiche e i possibili stati fisici dei punti materiali*, considerati anche in noti testi di meccanica — per es. [23] —. Il concetto di proprietà PrF è naturalmente più generale di quello di forza, come mostra, per es., il fatto che l'uso della classe PrF in $\mathcal{T}_1$ è utile non solo per trattare casi più generali di quello puramente meccanico ma anche per definire concetti complessi su cui si basa la meccanica analitica. Come esempio di tali concetti, nel n. 27 (parte 3ª) è definito appunto un concetto di campo di forze dipendenti da configurazione, stato cinetico e tempo.

Come si è detto, la teoria $\mathcal{T}_1$ (come la $\mathcal{T}_2$) è di classe Γ_3 e di tipo completamente matematico, e in essa non hanno luogo le accennate restrizioni insite, a quanto mi consta, più o meno in tutte le precedenti teorie dello stesso tipo. La $\mathcal{T}_1$ è anche semanticamente unitaria, a differenza delle teorie assiomatiche in senso stretto di classe Γ_2 o Γ_3. Queste ultime sono dotate appunto di infinite (intese) interpretazioni fisiche aventi carattere estensionale. (Volendo, si possono considerare queste interpretazioni come le estensioni fisicamente possibili di una unica interpretazione modale) [57]). Per quanto precede, a quanto mi consta, $\mathcal{T}_1$ è la teoria di classe Γ_3 più simile alle teorie geometriche informali e formali [58]).

D'altro canto, presentando la teoria $\mathcal{T}_1$ sia come teoria informale, che come teoria formale (astratta), si è inteso dare alla $\mathcal{T}_1$ il livello di rigore dei « Grundlagen der Geometrie » di D.

---

[57]) In nessuna delle dette infinite interpretazioni trova però posto la negazione della suaccennata proposizione Σ_1 (su Σ_1 intesa nel suo senso naturale si basa il paradosso PE_1 [n. 7]).

[58]) La teoria $\mathcal{T}_1$ espressa nel linguaggio ordinario L poco in uso, diviene una normale teoria di classe Γ_3 quando la si metta in forma modale traducendola (come è lecito) in L^* nel modo sostanzialmente determinato al n. 15.

Hilbert (e nella parte 3ª si fornisce una dimostrazione della sua coerenza logica, anzi della compatibilità degli assiomi di $\mathcal{T}_1$ col verificarsi di casi non banali).

Oltre a fornire una soluzione dei problemi di assiomatizzazione accennati nella prefazione e concernenti una certa accelerazione potenziale $\gamma = \boldsymbol{a}^*$ e la ricerca di un analogo di certi postulati di esistenza ed unicità della geometria — v. nota (4) —, si può osservare che, all'incirca come si fa in $\mathcal{T}_{P17}$, anche in $\mathcal{T}_1$ si parte da concetti non involgenti quelli di massa, forza, riferimento inerziale e misura dello spazio e del tempo (come del resto si è già detto), ma in $\mathcal{T}_1$ tali concetti vengon precisati rigorosamente, inoltre si formulano assiomi in modo che anche i riferimenti inerziali e le ∞^1 misure euclidee dello spazio risultino davvero completamente determinati dagli assiomi stessi.

Anche riguardo alla terza parte si può pure osservare che in alcuni punti, la teoria $\mathcal{T}_1$ potrebbe essere più semplice, pur conservando una certa compiutezza; ma in tali punti si è preferito dare la precedenza alla generalità e fare ipotesi di una certa complessità ma forse nuove o per lo meno tali che sia utile richiamarle. Ciò vale, mi sembra, per es. per le condizioni di regolarità del generico moto supposte valide nell'assioma 18.2 [59]) (se ne è però indicata anche una forma molto semplice).

Nello stesso ordine di idee si è data una doppia forma ad alcuni assiomi di $\mathcal{T}_1$ in modo da determinare una teoria $\overline{\mathcal{T}}_1$ (in cui massa, forza ecc... risultano determinabili come nella $\mathcal{T}_1$), più generale della $\mathcal{T}_1$ fra l'altro per quanto segue:

a) a differenza della $\mathcal{T}_1$, nella teoria $\overline{\mathcal{T}}_1$ possono esservi forze [n. 23] compatibili solo con una isotropia fisica debole [n. 28] dello spazio (per cui questo può non esser fisicamente simmetrico rispetto ad ogni piano),

b) la parte del principio di azione e reazione concernente

---

[59]) Ciò si può dire anche per certe condizioni considerate nel n. 27 (parte III) a proposito degli accennati campi di forza, in vista di applicare noti teoremi di esistenza ed unicità di Caratheodory relativi a sistemi di equazioni differenziali ordinarie, e loro generalizzazioni.

il risultante vale integralmente in $\mathcal{T}_1$, ma può valere nel solo caso di punti materiali con velocità relative nulle in $\overline{\mathcal{T}}_1$.

14. Su certi concetti comuni della fisica classica, con cui verranno caratterizzati i concetti base della teoria assiomatica $\mathcal{T}_1$ da costruirsi.

Considero ora sei concetti della fisica classica che sono molto usati e che (assieme al concetto di caso meccanicamente possibile, introdotto nel paragrafo seguente e sostanzialmente implicito nelle teorie meccaniche che, come la $\mathcal{T}_1$, siano semanticamente unitarie) serviranno a caratterizzare i concetti base della $\mathcal{T}_1$.

Comincio dal concetto di *punto evento* ordinariamente caratterizzato come localizzazione spazio-temporale di un evento brevissimo e occupante una regione pressochè puntiforme (rispetto ad un qualunque osservatore).

Si consideri ora la relazione di *precedenza temporale* fra i punti eventi; essa permette di definire facilmente la *contemporaneità* di due punti eventi e quindi gli istanti [60]).

Per la teoria $\mathcal{T}_1$ interessa osservare che nella fisica classica i punti eventi e gli istanti sono enti assoluti — nel senso che esistono criteri generali, ordinariamente basati sull'ipotesi di euclideità dello spazio tempo ed involgenti uno o più osservatori — che permettono di identificare i punti eventi indipendentemente dai fenomeni che possono aver luogo nel cronotopo [61]).

Volendo limitarsi per semplicità ad una teoria dei sistemi materiali costituiti da corpi di costituzione tale per cui possano occupare solo regioni di dimensioni trascurabili (ed essere dotati solo di proprietà indipendenti dalla propria orientazione) si usa introdurre la locuzione « *punto materiale* ».

---

[60]) Il concetto di istante, costituente il terzo dei suddetti sei concetti base, viene qui identificato con quello di sezione spaziale del cronotopo, ossia con la classe di punti eventi contemporanei con un dato punto-evento.

[61]) Tali fenomeni potrebbero anche spostare comunque gli osservatori (rispetto agli spazi inerziali).

Poichè la natura di certi problemi e il grado di approssimazione nella rappresentazione della realtà fisica che nella loro soluzioni ci si propone di raggiungere, permette di schematizzare in un punto materiale sia un elettrone che un atomo, o molecola, o un piccolo corpo direttamente osservabile, o anche pianeti o stelle, si può anche parlare di *possibili punti materiali* e anzi conviene identificare i *punti materiali* con le attuali *porzioni* (proprie) [62]) *di materia* (o anche con quelle ottenibili da queste mediante reazioni chimiche).

Tali porzioni di materia — la cui classe sarà indicata con PM — sono considerate come enti assoluti; ossia ciascuna di esse potrà venire considerata come esistente in ogni caso (precisamente in ogni $EUFP$-evoluzione, comunque idealizzata). Ogni porzione di materia sarà però considerata come dotata di *posizione puntiforme* e *al finito* solo in alcune evoluzioni dell'universo, fisicamente possibili ed idealizzate nel modo consentito da qualche problema.

Volendo basarsi su i punti-eventi anzichè sui punti geometrici e gli istanti, invece della seguente relazione ternaria:

il *punto geometrico* P *appartenente a un dato spazio* Σ (per es., quello solidale alla terra) è *la posizione puntiforme e al finito del punto materiale* M, *nello spazio* Σ *e all'istante* ϑ — brevemente $P = \mathrm{pos}^*_\Sigma\,(M, \vartheta)$ —, si userà la seguente relazione binaria:

E *è un punto evento occupato dal punto materiale* M, brevemente: $E \in PEO^*(M)$. [La notazione adottata è dovuta al fatto che $PEO^*(M)$ è una classe che si può chiamare la *traiettoria* — o moto — *di* M *nel cronotopo*].

Si osservi che « $\mathrm{pos}^*_\Sigma\,(M, \vartheta)$ » — quindi anche $PEO^*(M)$ — esprimono enti non assoluti ma dipendenti dalle contingenze dei fatti o dalla possibile evoluzione dell'universo che si considera. Anzi si può ritenere come fisicamente possibile che la posizione $\mathrm{pos}^*_\Sigma\,(M, \vartheta)$ di M all'istante ϑ, coincida con un punto dello spazio Σ comunque prefissato.

---

[62]) Una porzione di materia è detta propria quando non è di massa nulla nè coincide con l'intero universo.

A tale proposito si noti che si riterrà la $\mathrm{pos}^*_\Sigma\,(M, \vartheta)$ come non esistente (solo) nei seguenti due casi:

1°) All'istante ϑ la porzione M di materia non ha la costituzione di punto materiale, per es., in quanto, nella idealizzazione schematica che si considera, la regione R appartenente a Σ e occupata da M, non è puntiforme, oppure M è solo una parte effettiva di una porzione di materia costituente (nella detta idealizzazione schematica) un punto materiale.

2°) La precedente regione R è così lontana dal sistema meccanico studiato nel problema che si sta considerando, che M non lo influenza, cosicchè si può ritenere che M si *trovi all'infinito.*

AVVERTENZA – Poichè per semplicità si dice punto materiale in luogo di possibile punto materiale — ossia porzione di materia —, allora, per es., invece di dire « nell'CMP-caso γ allo istante ϑ esistono tre punti materiali », in $\mathcal{T}_1$ si dirà: « esistono tre punti materiali (porzioni di materia) dotati in γ e all'istante ϑ di posizioni (puntiformi e al finito) ».

* * *

Come ho detto nella prefazione, nella teoria $\mathcal{T}_1$ (a differenza della $\mathcal{T}_2$, che verrà brevemente caratterizzata riportandosi alla $\mathcal{T}_1$) non ci si limita al caso puramente meccanico. In $\mathcal{T}_1$ si tien conto anche della eventuale variabilità dello stato fisico dei punti materiali mediante l'introduzione di una classe PrF costituente una forma opportuna, basata sui CMP-casi, della classe PrF^* delle *proprietà fisiche* dei punti materiali *non cinematiche.* Ognuna Π^* delle proprietà PrF^* può essere posseduta al più da qualche punto materiale M a qualche istante ϑ, cosicchè si può considerare Π^* come una classe, eventualmente vuota, di coppie $\langle M, \vartheta \rangle$ formate da un punto materiale e un istante. Ovviamente tali classi non sono assolute ma dipendono dalle contingenze dei fatti, ovvero dalla possibile evoluzione dell'universo che si considera.

Possedere, all'istante ϑ, una Π^* delle proprietà di tipo PrF^* equivale ad una condizione di uno dei due seguenti tipi:

a) M ha all'istante ϑ una certa *costituzione fisica* o è in un certo *stato fisico* [63]) (non includente proprietà cinematiche macroscopiche: per es., una data grandezza fisica $\mathcal{M}$ — che può essere la carica elettrica (o magnetica), o la temperatura — assume in M un dato valore (all'istante ϑ) [64]).

b) Per M, all'istante ϑ, è verificato un certo gruppo di condizioni di tipo *a*) [65]).

Avere una data proprietà PrF^* può equivalere ad essere fatto di una data sostanza, in quanto ciò sia da intendersi come equivalente ad avere certe proprietà costitutive, ossia avere la disposizione a reagire in dati modi a certi agenti esterni, o essere atto a conservare certi stati fisici, o a farli variare con certe modalità.

Fra le proprietà PrF^* hanno grande importanza le costituzioni fisiche dei punti materiali e i loro stati fisici influenti sul moto. Più precisamente, dato un sistema isolato $M_1, \ldots, M_n$ di particelle, secondo una concezione che può farsi risalire a Kirchhoff, Newton e Galileo [66]), tali proprietà, assieme alle posizioni e velocità attuali di $M_1, \ldots, M_n$ determinano le accelerazioni attuali di $M_1, \ldots, M_n$. Queste proprietà PrF^* posono dirsi circostanze strutturali determinanti il campo di forza attuale (agente su $M_1, \ldots, M_n$).

---

[63]) Cfr. con [23], pg. 14, righe 14-21.

[64]) Tale grandezza non può essere posizione, velocità, accelerazione, ecc. del punto materiale a cui si riferisce.

[65]) Si potrebbero distinguere le proprietà PrF_1^* del tipo *a*) da quelle PrF_2^* del tipo *b*) (comprendenti le prime). Si potrebbe poi considerare la minima classe PrF_3^* contenente PrF_2^* e la proprietà fisica, opposta ad ogni proprietà fisica contenuta nella PrF_3^* stessa, e la congiunzione (intersezione) delle proprietà appartenenti ad un qualunque sottoinsieme di se stessa.

Ho però preferito costruire la teoria $\mathcal{T}_1$ in modo che tali distinzioni non siano essenziali, in quanto $\mathcal{T}_1$ non contenga alcun postulato corrispondente alla chiusura della classe PrF^* rispetto al passaggio al complementare e alla riunione (o all'intersezione). Si potrà pensare PrF^* coincidente, per es., con PrF_2^*.

[66]) Vedi [23], pg. 12, riga 2 dal basso e pg. 13, riga 3. Vedi anche pg. 13 righe 6-1 dal basso.

Nella teoria $\mathfrak{T}_1$ mediante le proprietà PrF^*, come ho detto, si possono definire, oltre che le forze, anche i campi di forze interne ad un sistema $M_1, \ldots, M_n$ e dipendenti dal tempo (in modo determinato). Tali campi intervengono in vari problemi concernenti sistemi meccanici naturali isolati, come il sistema solare — eventualmente aumentato di qualche pianeta artificiale — o come un qualunque corpo considerato dal punto di vista microscopico [67]).

In tali problemi si usa spesso schematizzare questi sistemi naturali in un sistema particellare $M_1, \ldots, M_n$, ove $M_1, \ldots, M_n$ hanno date masse e ad ogni istante sono soggetti a un campo di forze (attuale) *indipendente* dal moto del sistema $M_1, \ldots, M_n$, o meglio, dipendente da esso solo in quanto, rispetto a un riferimento inerziale K, per tali forze vale una legge della forma

$$f_i = f_i(P_1, \ldots, P_n, v_1, \ldots, v_n, \vartheta) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

ove per $i = 1, \ldots, n$, f_i è il vettore rappresentante la forza che sollecita M_i all'istante ϑ nel caso che P_j e v_j siano (rispetto a K) la posizione e la velocità di M_j all'istante ϑ ($j = 1, \ldots, n$).

Si ricordi, per es., il sistema solare e la corrispondente legge (11) nella quale la dipendenza delle f_i dal tempo ϑ non è effettiva. Tale legge, che determina il campo di forze [espresso da (11)] che agirà sul sistema solare anche in tempi futuri e molto lontani, si ritiene nota. Ordinariamente si ritiene che (almeno in prima approssimazione) per es., non compariranno in due pianeti — a causa di qualche fenomeno naturale — cariche elettriche per cui la considerata legge della forza risulti alterata.

È ragionevole e conforme ad una particolare forma di determinismo considerare la cosa come dovuta alla attuale struttura dei corpi costituenti il sistema solare e al loro attuale stato fisico e non alle loro posizioni e velocità attuali. In altre parole, per il

---

[67]) Cfr. per es. con [23], pg. 11, righe 6-10 « ... dentro ai confini della Meccanica razionale ogni corpo $\mathcal{N}$ va originariamente pensato come un insieme di un numero immenso di « elementi di materia » sempre rappresentabili con altrettanti punti materiali liberi: schema microscopico di $\mathcal{N}$ ».

sistema solare la corrispondente legge (11) vale e varrà in quanto i corpi C che lo costituiscono hanno certe proprietà costitutive e certi stati fisici (non involgenti proprietà puramente cinematiche), ossia in quanto i corpi C hanno certe proprietà PrF^*.

Dunque ci sono delle proprietà PrF^* che se sono possedute da un sistema particellare ad un istante, individuano le circostanze strutturali di questo influenti sul campo di forze (attuale) negli istanti successivi. Appunto tale classe di proprietà PrF^* — che può sostanzialmente definirsi in $\mathcal{T}_1$ — permette la definizione dei sistemi (olonomi) di particelle libere soggette ad un dato campo di forza interno dipendente dal tempo.

Conviene osservare che $\mathcal{T}_1$ è conforme alla concezione secondo cui, anche in relazione ai fenomeni ereditari [68]) il comportamento attuale dei corpi è sempre determinato dal loro stato attuale. Però, stante le imperfezioni della nostra tecnica, in certi casi conviene conoscere tale stato osservando la storia passata di certe proprietà di questi corpi [69]).

15. Introduzione dei casi meccanicamente possibili. Concetti base della teoria $\mathcal{T}_1$ nella forma definitiva.

Come si è osservato nel n. 5 della parte 1ª, « *P è la posizione* — pos^*_Σ (M, ϑ) — *del punto materiale M all'istante ϑ nello spazio Σ* » o « *M occupa il punto evento E* » — « $E \in PEO^*(M)$ » — esprimono fatti contingenti.

Conformemente a quanto si è detto nella parte 1ª, non appare possibile la costruzione di una teoria meccanica $\overline{T}$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1°) *$\overline{T}$ tratta lo stesso argomento di $\mathcal{T}_1$ e appartiene allla classe Γ_3* (nn. 3 e 6).

---

[68]) Tale concezione è esposta nel paragrafo « Influence du passé sur l'avenir des systèmes matériels » di [17], pg. 39.

[69]) Si osservi da ultimo che non è essenziale per la Teoria $\mathcal{T}_1$ se avere una data massa inerziale (o una data massa gravitazionale) sia una proprietà di tipo PrF^*, in quanto il rapporto delle masse inerziali di due punti materiali qualsiasi viene definito a prescindere da tali proprietà.

2°) $\overline{T}$ è *semanticamente unitaria* [def. 6.2].

3°) $\overline{T}$ è *una teoria assiomatica e di tipo completamente matematico, quindi si può formalizzare completamente basandosi su una teoria logica estensionale.*

4°) $\overline{T}$ ha per concetti base, per es., i concetti *PE*, *PM*, Ist, Preced., *PEO** e *PrF**, *ossia i concetti considerati nel numero precedente al fine di definire i concetti base della teoria* $\mathcal{T}_1$, *e ivi espressi in un linguaggio ordinario. Inoltre, conformemente agli ordinari criteri di assiomatizzazione (o formalizzazione) usuali nel campo matematico* — V. metodo *MEA* nel n. 1 — (*nella* $\mathcal{T}_1$*-astratta*) *PE e PM sono precisamente considerati classi, PEO* una funzione che muti punti materiali in classi di punti eventi, infine PrF* una famiglia di classi di coppie* $\langle M, \vartheta \rangle$ (o di coppie $\langle M, E \rangle$) *formate da un punto materiale M e da un istante* ϑ (o da un punto-evento *E*).

Infatti in primo luogo, conformemente a cose dette nella parte 1ª, almeno a quanto mi consta, finora sono state costruite teorie soddisfacenti solo alcune delle precedenti quattro condizioni, delle quali quelle soddisfacenti 1), 3) e 4) contengono certi assiomi restrittivi che d'altro canto a causa del metodo impiegato, sembrano essenziali per la definizione della massa e della forza [70]).

In secondo luogo in una teoria $\overline{T}$ soddisfacente le condizioni 3) e 4) sorgono dei paradossi esterni che naturalmente è preferibile evitare; e ciò accade indipendentemente dagli assiomi non puramente matematici di $\overline{T}$ (nn. 7, 8)).

Si noti ora che come si è osservato nella 1ª parte il concetto di possibilità (fisica) appare essere alla base delle teorie fisiche e sembra utile un suo uso esplicito in teorie soddisfacenti le condizioni 1), 3) e 4) per evitare le dette restrizioni [nn. 10 e 11].

Sembrerebbe opportuno basarsi su una logica modale. Però le ricerche logiche in questo campo finora pubblicate (almeno a quanto mi consta) non sono sufficienti allo scopo [n. 12] — vedi

---

[70]) È questo il caso delle teorie $\mathcal{T}_{H8}$ e $\mathcal{T}_{H9}$ che sono basate su concetti del tipo di quelli considerati nella precedente condizione 4. V. prima parte del n. 10.

però la nota (53) —, inoltre usualmente si consiglia di basarsi su una logica estensionale. Tenendo conto anche di questo, mi è sembrato utile e interessante introdurre la classe *CMP* dei casi meccanicamente possibili, o *CMP*-casi, analoghi alle state-descriptions considerate in [6] o agli states da quelle espressi.

I *CMP*-casi considerati nella teoria $\mathfrak{T}_1$ possono essere identificati con la idealizzazione (fatta secondo i processi di schematizzazione, estrapolazione, e semplificazione usuali nella Meccanica Razionale) della generica evoluzione (o processo) η dell'universo (o di una sua parte isolata, che può pure dirsi un universo) soddisfacente le due seguenti condizioni:

a) η è fisicamente possibile.

b) Nell'evoluzione η l'universo può considerarsi (idealmente) come un normale (ossia classico) insieme di punti materiali (in tale evoluzione non sono rilevanti fenomeni poco comuni quali, per es., una sensibile influenza della luce sul moto dei corpi).

Dunque il generico *CMP*-caso γ può identificarsi con la generica *EUFP*-evoluzione η considerata nella 1ª parte, soddisfacente anche la condizione *b*) che serve per precisare il dominio di validità della $\mathfrak{T}_1$.

Naturalmente nella $\mathfrak{T}_1$ si può anche intendere che il precedente *CMP*-caso γ sia ridotto alla parte della precedente *EUFP*-evoluzione η, pensabile facendo uso (oltre che dei nessi logici) solo degli enti che cadono sotto i sei concetti considerati nel paragrafo precedente.

Sia L^* la parte del linguaggio usuale $\mathfrak{L}^*$ (considerato nella parte 1ª) la quale contenga i simboli logici di $\mathfrak{L}^*$ (inclusi quelli modali riferentesi alla possibilità fisica), i sei termini (costanti assiomatiche) *PE*, Ist, Preced, *PM*, *PEO** e *PrF** precedentemente introdotti, e quelli definiti a partire da questi.

L^* si muta in un linguaggio L, ordinario ma poco in uso (e costituente una parte di $\mathfrak{L}$), quando $\mathfrak{L}^*$ è tradotto in $\mathfrak{L}$ secondo quanto è detto nel n. 8. Più precisamente nella traduzione di L^* in L i concetti *PE*, Inst, Preced e *PM* rimangono inalterati mentre invece i concetti *PEO** e *PrF** prendono rispettivamente le forme *PEO* e *PrF*, tali che, per es., alla proposizione Q_1^* (Q_2^*)

di L^* corrisponde la Q_1 (Q_2) di L, ove Q_1^*, Q_1, Q_2^* e Q_2 sono determinate come segue:

Q_1^*) « *E è un punto evento occupato dal punto materiale M* » — ossia « $E \in PEO^*(M)$ » —,

Q_1) « *E è occupato da M nel CMP-caso γ* » — in simboli « $E \in \in PEO(M, \gamma)$ » —,

Q_2^*) « *La proprietà fisica Π^* vale per il punto materiale M all'istante ϑ* » — o « $\langle M, \vartheta \rangle \in \Pi^*$ » —.

Q_2) « *La proprietà fisica Π vale per M all'istante ϑ nel CMP-caso γ* » ovvero « $\langle M, \vartheta, \gamma \rangle \in \Pi$ ».

Consideriamo ora una proposizione P^* appartenente al precedente linguaggio (modale) L^*, la quale non involga nessi modali, come per es. « *è fisicamente possibile che...* » o « *è fisicamente necessario che...* » o « *... è conseguenza fisica di---* ». Allora conformemente a quanto si è detto nel n. 8, a P^* corrisponde (naturalmente, ossia nel senso precedente) una proposizione P — o P_γ — di L (anch'essa puramente estensionale).

Si osservi ora che conformemente al n. 8 la proposizione modale di L^*

Q_3^*) « *P è fisicamente possibile* »

corrisponde, ovvero si traduce in L, nella seguente (puramente estensionale):

Q_3) « *Esiste un CMP-caso γ per cui P_γ si verifica* ».

Naturalmente, come sostanzialmente si è già detto al n. 8, ciò basta per tradurre nel linguaggio estensionale L ogni proposizione di L^* anche se effettivamente modale, o almeno ogni proposizione di tal tipo, che sia usata nella trattazione della teoria $\mathfrak{T}_1$ iniziante al n. 17 del precedente lavoro. Per es., sono proposizioni corrispondenti di L^* ed L le seguenti:

Q_4^*) « *P^* è fisicamente necessario* »,

Q_4) « *Per ogni CMP-caso γ, P_γ si verifica* »,

e le

Q_5^*) « *Q^* è conseguenza fisica di P^** », o « *Se P^*, allora, come conseguenza fisica, Q^** »,

Q_5) « *Per ogni CMP-caso γ, P_γ implica (materialmente) Q_γ* »,

ove anche Q^* e Q_γ si corrispondano a lor volta nel considerato senso.

Come il lettore potrà constatare leggendo la accennata trat-

tazione della teoria $\mathcal{T}_1$, viceversa, ogni proposizione di L, usata in tale trattazione, può tradursi in L^*. Di solito questa traduzione è diretta; per es., la legge fondamentale della dinamica — V. nota 22 e Osservazione 8.2 — si traduce meccanicamente in L^* mediante una proposizione del tipo Q_5, opportunamente qualificata — ossia, in sostanza, mediante una « universal causal implication » secondo Burks — vedi [3] —.

Talvolta però tale traduzione richiede qualche trasformazione logica preliminare, come nel caso che in L si parli di vari CMP-casi $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — cfr. ad es. nota (82) —.

La teoria $\mathcal{T}_1^*$, espressa in L^*, che così si ottiene si basa sui sei concetti PE, Ist, Preced, PM, PEO^* e PrF^*, e non su CMP, ma in $\mathcal{T}_1^*$ si usa la possibilità fisica, onde $\mathcal{T}_1^*$ va considerata come basata su una opportuna logica modale.

OSSERVAZIONE 15.1 – Conviene osservare che l'espressione « $E \in PEO(M, \gamma)$ » [$\langle M, \vartheta, \gamma \rangle \in \Pi$] appartenente a L è vera se e solo se la corrispondente « $E \in PEO^*(M)$ » [$\langle M, \vartheta \rangle \in \Pi^*$], appartenente ad L^*, è vera nel CMP-caso γ.

Come si è visto, le espressioni appartenenti ad L, che contengono una occorrenza esplicita di γ, grazie a ciò, non hanno il carattere contingente delle loro corrispondenti e perciò, a differenza delle ultime, sono atte ad essere impiegate in una teoria rigorosamente assiomatica estensionale (di tipo completamente matematico) quale la $\mathcal{T}_1$.

Per concetti base della teoria $\mathcal{T}_1$ si possono dunque assumere i seguenti sette:

punto materiale (PM), *punto evento* (PE), *istante*, o *sezione spaziale del cronotopo* (*Ist*), relazione di *precedenza temporale* fra i punti eventi (Preced), *CMP-caso* (CMP), *punto evento* — $PEO(M, \gamma)$ — *occupato in un CMP-caso* γ *da un punto materiale* M, *pensato come funzione di* M *e* γ (PEO), infine *proprietà* PrF, ossia *proprietà fisica* non cinematica e *concernente un punto materiale ad un istante ed in un CMP-caso* (PrF).

Quando $\mathcal{T}_1$ si consideri come teoria astratta ($\mathcal{T}_1^*$), PM, PE, *Ist* e CMP vanno considerati come classi. Per uniformità, come si è già accennato, conviene identificare gli istanti con le cosi-

dette sezioni spaziali del cronotopo. Così si viene a pensare *Ist* come famiglia di sottoclassi di punti eventi, cosicchè si può scrivere $Ist \in SC(PE)$. Ciò, come è lecito, verrà fatto nella esposizione oggettiva della teoria $\mathcal{T}_1$ data nei paragrafi seguenti.

Inoltre Preced va considerata come una classe di coppie di elementi di PE, ossia Preced $\in PE^{(2)}$ [71]).

PEO va pensata come funzione che muta un PM e un CMP in una classe di PE, ossia $PEO \in [PM \times CMP \rightarrow SC(PE)]$ — V. nota (71) —.

PrF è una famiglia di classi di terne, ciascuna delle quali è formata con un PM, un Ist — un istante, cioè una sottoclasse di PE — e un CMP; ossia $PrF \subset SC\,[PM \times Ist \times CMP]$ (e anche $PrF \subset SC[PM \times SC(PE) \times CMP]$).

* * *

Volendo si può precisare la struttura dei concetti PEO^* e PrF^* di $\mathcal{T}_1^*$, non ancora considerati, scrivendo

$$PEO^* \in [PM \rightarrow SC(PE)]\,, \qquad PrF^* \subset SC[PM \times Ist]\,,$$

ma a causa dell'esplicito uso in $\mathcal{T}_1^*$ della possibilità fisica e dei concetti su di essa direttamente basati, $\mathcal{T}_1^*$ non si può trattare come una teoria astratta, basata su un sistema di oggetti; nè gioverebbe rendere implicito l'uso della detta possibilità fisica giacchè allora, conformemente a cose dette nella parte 1ª, la $\mathcal{T}_1^*$-*astratta* differirebbe notevolmente dalla $\mathcal{T}_1$-*oggettiva* riguardo alle regole di deduzione (e conseguentemente riguardo alle proposizioni considerate come teoremi).

Si osservi, che, come si è mostrato nella prima parte, in varie teorie fisiche, fra cui $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$ [n. 10], l'uso della possibilità fisica è da ritenersi come essenziale, a meno di non accettare

---

[71]) Se $A_1, \ldots, A_n$ sono insiemi, con « $A_1 \times \ldots \times A_n$ » si intende il prodotto cartesiano B di $A_1 \ldots A_n$, ossia la classe delle n-ple $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ con $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Per $A = A_1 = \ldots = A_n$ si scrive $B = A^{(n)}$. Con « $A \rightarrow B$ » si indica poi la classe delle funzioni di dominio A e codominio appartenente a B.

grosse restrizioni — V. prima parte del n. 11 —, ciò nonostante tale uso è in esse implicito, ad eccezione, se si vuole, per quello indirettamente fatto attraverso certe condizionali delle irrealtà, uso che per altro non mi sembra molto chiaro.

La $\mathcal{T}_1^*$ può considerarsi fra l'altro come una diretta esplicitazione (modale) di $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$, nella quale si usa un concetto di possibilità chiarificato mediante le *EUFP*-evoluzioni. La $\mathcal{T}_1$ è basata sui *CMP*-casi (che possono sostanzialmente riguardarsi come coincidenti con le dette evoluzioni) e può quindi considerarsi come una forma estensionale della $\mathcal{T}_1^*$, utile specialmente in quanto almeno attualmente le regole seguite da tale possibilità non sembrano tutte note col rigore proprio delle buone assiomatizzazioni estensionali [n. 12].

Si consideri ora che i *CMP*-casi sono stati caratterizzati riportandosi alle *EUFP*-evoluzioni, largamente usate nella parte 1ª, e stabilendo l'equivalenza delle proposizioni estensionali $Q_1, Q_2, \ldots, \ldots, Q_5$, involgenti i *CMP*-casi, ordinatamente alle $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_5^*$, involgenti la possibilità fisica; inoltre mediante l'equivalenza di Q_1 a Q_1^* e quella di Q_2 a Q_2^* si son pure caratterizzati i concetti *PEO* e *PrF* di $\mathcal{T}_1$. Dunque, specialmente *se*, secondo quanto si è detto, *si considera la classe CMP* (usata in $\mathcal{T}_1$) *come una estensionalizzazione di un concetto modale* (*quello di possibilità fisica*) *già usato implicitamente in trattazioni ben note, le precedenti caratterizzazioni dei concetti PE, Ist, Preced, PM, CMP, PEO e PrF appaiono sufficienti*, mi sembra, *per poter ritenere oggettiva* (*informale*) *la teoria* $\mathcal{T}_1$.

16. Relazione fra la teoria estensionale $\mathcal{T}_1$ e la sua forma modale $\mathcal{T}_1^*$.

I concetti *CMP*, *PEO* e *PrF* sono stati caratterizzati a partire da quelli base di $\mathcal{T}_1^*$ e dalla possibilità fisica, in parte mediante equivalenze aventi carattere di definizioni operative.

In questo numero, la cui lettura non è necessaria per la comprensione del seguito, mostro come mediante i concetti base di $\mathcal{T}_1^*$ e la possibilità fisica si possono caratterizzare i concetti *CMP*, *PEO* e *PrF* in un modo costituente una loro precisa defi-

nizione, enunciata in L^* (o $\mathfrak{L}^*$), ossia una definizione appartenente alla teoria (modale) $\mathfrak{T}_1^*$ e indipendentemente da tutti gli assiomi di questa. Ciò costituisce un ulteriore chiarimento dei CMP-casi intesi nel detto senso particolare, e permette di darne qualche altro.

Nella suddetta caratterizzazione, il generico CMP-caso γ è considerato come l'insieme (o una schematizzazione dell'insieme) delle affermazioni non effettivamente modali, che si possono fare nel linguaggio L^* e che sono vere in una data $EUFP$-evoluzione η [magari soddisfacente anche la precedente condizione b), v. n. 15].

È proprio pensando al senso che la classe MPC deve avere nelle considerazioni fatte in questo numero, che tale classe è stata introdotta nella seconda parte, nonostante la classe $EUFP$ fosse già stata considerata nella prima.

Le dette considerazioni, benchè non necessarie per la comprensione del seguito, mi sembrano tuttavia interessanti perchè, in primo luogo, l'accennata rigorosa definizione rafforza la tesi che i CMP-casi (al pari delle $EUFP$-evoluzioni) non costituiscono un concetto nuovo (nemmeno se intesi nel detto senso particolare), e, in secondo luogo, si mette in luce una certa relazione fra $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_1^*$.

DEFINIZIONE 16.1 – *Si dice che γ è un CMP-caso ($\gamma \in MPC$) se γ è una coppia $\langle \eta, \overline{\Pi}^* \rangle$ di funzioni verificanti le seguenti tre condizioni*:

CONDIZIONE 16.1 – η muta il generico punto materiale M in una classe $\eta(M)$ di punti-eventi. [Questa fungerà da possibile traiettoria di M nel cronotopo onde, per semplicità, può supporsi o vuota o estendentesi in corrispondenza ad ogni istante].

CONDIZIONE 16.2 – $\overline{\Pi}^*$ fa corrispondere al generico punto materiale M e al generico istante ϑ relativo a qualche punto evento appartenente alla classe $\eta(M)$, una classe $\overline{\Pi}^*(M, \vartheta)$ di proprietà PrF^*, la quale può essere vuota.

CONDIZIONE 16.3 – A meno di suddetti processi di idealizzazione, è fisicamente possibile che il CMP-caso γ si verifichi nel senso che, per ogni punto materiale M ed ogni punto evento E

appartenente ad $\eta(M)$, $\eta(M)$ sia la traiettoria di M nel cronotopo — ossia la classe dei punti eventi occupati da M — e inoltre, all'istante ϑ in cui M occupa E, M possieda tutte e sole le proprietà PrF^* che appartengono alla classe $\overline{\Pi}^*(M, \vartheta)$ [72]).

Si osservi che η caratterizza il moto dell'universo particellare $\mathfrak{U}_\gamma$ nel CMP-caso γ; $\overline{\Pi}^*$ caratterizza l'evoluzione in γ delle proprietà fisiche di $\mathfrak{U}_\gamma$.

Per semplicità si può anche ritenere che se η e $\overline{\Pi}^*$ soddisfano le precedenti tre condizioni, la traiettoria $\eta(M)$ non è vuota solo per M variante in un insieme finito o al più numerabile di punti materiali.

Volendo, si può dare ai CMP-casi un senso più generale sostituendo nella definizione 16.1, la Cond. 16.1 con la seguente:

CONDIZIONE 16.4 – Esiste un intervallo non nullo $\overline{\vartheta}$ di tempo eventualmente infinito (anche nei due sensi), tale che o $\eta(M)$ è un insieme vuoto, o contiene punti-eventi in corrispondenza di tutti e soli gli istanti di $\overline{\vartheta}$.

In tal caso conviene però aggiungere la seguente condizione di non prolungabilità di γ.

CONDIZIONE 16.5 – Non esistono due funzioni $\eta_1(M)$ e $\overline{\Pi}_1^*(M)$ e un intervallo temporale $\overline{\vartheta}_1$, analoghi a $\eta(M)$, $\overline{\Pi}^*(M)$ e $\overline{\vartheta}$, tali che $\overline{\vartheta}$ sia una parte effettiva di $\overline{\vartheta}_1$ e η e $\overline{\Pi}^*$ siano subordinate da η_1 e $\overline{\Pi}_1^*$ in corrispondenza di $\overline{\vartheta}$.

Possiamo ora definire schematicamente, ma rigorosamente, PEO e la classe PrF delle proprietà fisiche e non cinematiche riferentisi a punti materiali (proprietà PrF):

DEFINIZIONE 16.2 – *Si dice che il punto evento E è occupato da M in γ — $E \in PEO(M, \gamma)$ — se, detta $\langle \eta, \overline{\Pi}^* \rangle$ la coppia di funzioni costituenti* (secondo la def. 16.1) *il CMP-caso γ, E appartiene alla classe $\eta(M)$ di punti eventi.*

---

[72]) La considerata classe $\overline{\Pi}(M,\vartheta)$ può chiamarsi lo *stato fisico* (non involgente proprietà cinematiche) *posseduta da* M *allo istante ϑ nel considerato CMP-caso γ.*

DEFINIZIONE 16.3 – *Si dice che la proprietà Π, a tre argomenti, è una proprietà PrF* (oppure che $\Pi \in PrF$), *se c'è una proprietà fisica Π^* tale che, per ogni terna $\langle M, \vartheta, \gamma \rangle$, Π intercorre fra M, ϑ e γ* (ossia $\langle M, \vartheta, \gamma \rangle \in \Pi$) *se e solo se M è un punto materiale, ϑ un istante e γ un CMP-*caso *costituito da una coppia $\langle \eta, \Pi^* \rangle$ di funzioni, per cui $\Pi^* \in \overline{\Pi}^*(M, \vartheta)$.*

Se $\langle M, \vartheta, \gamma \rangle \in \Pi$ (e $\Pi \in PrF$), si dirà che *la proprietà Π vale per M all'istante ϑ nel CMP-caso γ.*

Si osservi che in conformità di cose già dette a proposito dei CMP-casi, considerati praticamente come coincidenti con le $EUFP$-evoluzioni, per la definizione 16.3, quanto precede equivale al verificarsi, nel CMP-caso γ, della condizione: *Π^* vale per M all'istante ϑ* (ove Π^* corrisponde a Π come nella def. 16.3).

Si consideri ora la seguente:

AMMISSIONE 16.1 – *È fisicamente necessario che un CMP-caso γ si verifichi nel senso chiarito nella condizione* 16.3 (ossia ogni $EUFP$-evoluzione η contiene un CMP-caso γ).

Come si può facilmente verificare leggendo nei prossimi numeri gli assiomi della teoria $\mathcal{T}_1$, valgono le due seguenti affermazioni concernenti l'accennata relazione fra $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_1^*$:

a) Grazie alla definizione 16.1 la teoria $\mathcal{T}_1$ (verbale) può anche considerarsi come appartenente al linguaggio ordinario ed usuale L^*.

b) Fatta inoltre l'ammissione 16.1, ogni assioma A di $\mathcal{T}_1$ pensato come appartenente ad L^* (ed interpretato in conformità di ciò) equivale al corrispondente assioma di $\mathcal{T}_1^*$, ossia alla proposizione di L^* tradotta in L da A.

L'accennato ulteriore chiarimento dei CMP-casi consiste nella loro seguente caratterizzazione (schematica) basata, anzichè sulla possibilità fisica, direttamente sulla possibilità tecnica intesa in un senso molto lato, come possibilità dovuta a possibili azioni (umane) le quali, in particolare possono opporsi al determinismo fisico (la detta caratterizzazione ha valore fisico solo in quanto il tempo sia per es. fisicamente omogeneo [n. 28], oppure più

generalmente, goda di qualche proprietà di periodicità fisica [n. 29]).

A tale scopo si fissi un particolare riferimento spazio temporale K_A effettivamente usato dagli astronomi. Ebbene *si può chiamare un CMP-caso la generica coppia*

$$\tilde{\gamma} = \langle \tilde{\eta}, \tilde{\Pi}^* \rangle = \langle \tilde{\eta}(M), \tilde{\Pi}^*(M, t) \rangle$$

tale che la funzione $\tilde{\eta}$ muta punti materiali in classi (eventualmente vuote) di quaderne di numeri reali, la funzione $\tilde{\Pi}^*$ muta coppie, formate da un punto materiale ed un numero reale, in classi (eventualmente vuote) di proprietà fisiche (PrF^*), infine $\tilde{\gamma}$ è verificabile nel senso seguente:

Si fissi comunque un numero reale r, si dica σ_r la sfera di S_4 con centro nell'origine di S_4 e raggio r, ed F_r il fenomeno espresso (tramite le ordinarie idealizzazioni) dall'insieme delle due seguenti affermazioni:

a) Per ogni $M \in MP$ con $\tilde{E} \in \tilde{\eta}(M)$ e $\tilde{E} \in \sigma_r$, M occupa il punto-evento $E = \tilde{E}_A$ caratterizzato da $\tilde{E}$ nel riferimento K_A.

b) Per ogni M ed $\tilde{E}$ fissati come in *a*), posto $\tilde{E} = \langle x_1, x_2, x_3, t \rangle$, all'istante t_A, di ascissa t in K_A, M gode di tutte e sole le proprietà fisiche costituenti la classe $\tilde{\Pi}^*(M, t)$.

Allora F_r è riproducibile nel senso considerato nel n. 4 a proposito delle EUFP-evoluzioni, ossia, in sostanza, è producibile un fenomeno F'_r ottenuto (mentalmente) da F_r mediante una traslazione temporale, e svolgentesi su un sistema materiale il quale poi non è influenzato da altri nel caso che la sfera σ_r racchiuda tutti i punti materiali considerati in $\tilde{\gamma}$ — ossia nel caso che per ogni $M \in PM$ con la classe $\eta(M)$ non vuota, non sia vuota nemmeno l'intersezione di $\eta(M)$ con σ_r —.

17. Alcuni assiomi di $\mathcal{T}_1$ sostituibili con definizioni.

Assumiamo i precedenti sette concetti base della teoria $\mathcal{T}_1$ come suoi concetti primitivi (volendo ricordare ciò si parlerà della teoria $\mathcal{T}_{1,7}$).

DEFINIZIONE 17.1 – *I punti eventi E_1 ed E_2 si dicono simultanei se ciascuno di essi non precede temporalmente l'altro.*

In $\mathcal{T}_{1,7}$ occorrono i seguenti assiomi di appartenenza:

ASSIOMA 17.1 – *Se E_1 precede temporalmente E_2, allora E_1 ed E_2 sono punti-eventi.*

ASSIOMA 17.2 – *ϑ è un istante* — ovvero una sezione spazio — temporale del cronotopo — *se e solo se ϑ è la classe dei punti-eventi simultanei ad un dato punto-evento E.*

Avvertendo che non occorre leggere quanto rimane del presente numero per comprendere i successivi, osservo che volendo ridurre il numero dei concetti primitivi, il che è vantaggioso anche per ridurre quello degli assiomi (in quanto di conseguenza, alcuni di questi possono andar sostituiti da opportune definizioni), anzichè considerare il concetto di istante (*Ist*) come primitivo, si può — passando da $\mathcal{T}_{1,7}$ a una teoria $\mathcal{T}_{1,6}$ — definire istante trasformando l'assioma 17.2 in una definizione, per es. della seguente forma.

DEFINIZIONE * 17.2 – *Gli istanti — o sezioni spaziali (del cronotopo) — sono le classi di equivalenza della relazione di simultaneità temporale.*

Andando oltre — passando ad una teoria $\mathcal{T}_{1,5}$ — si può togliere anche l'assioma 17.1 e definire, oltre *Ist*, anche *PE*, come segue:

DEFINIZIONE * 17.3 – *Si dicono punti eventi i membri della relazione Preced di precedenza temporale* [73]).

Per amore di completezza del lato logico della presente trattazione di $\mathcal{T}_1$, osservo inoltre che anche i punti materiali e i *CMP*-casi potrebbero definirsi — in $\mathcal{T}_1$ — a partire solamente da Preced, *PEO* e *PrF* mediante le seguenti definizioni:

---

[73]) Se la relazione n-aria R intercorre fra $x_1, \ldots, x_n$, per $i = 1, \ldots n$, x_i è detto un membro di essa, precisamente un suo membro i-mo.

DEFINIZIONE * 17.4 – *Si dice che M è un punto materiale — $M \in PM$ — se per qualche γ la classe PEO (M, γ) dei punti eventi occupati da M in γ non è vuota.*

DEFINIZIONE * 17.5 – *Si dice che γ è un CMP-caso ($\gamma \in CMP$) se o per qualche (punto materiale) M la classe $PEO(M, \gamma)$ non è vuota, o vi è qualche proprietà fisica $\Pi(\Pi \in PrF)$ valida per una terna della forma $< M, \vartheta, \gamma >$.*

Con $\mathcal{T}_{1,6}$, $\mathcal{T}_{1,5}$ e $\mathcal{T}_{1,3}$ si intendono precisamente le teorie ottenute dalla $\mathcal{T}_{1,7}$ mediante i cambiamenti sopra esplicitamente considerati. Quanto alla $\mathcal{T}_{1,3}$, dotata dei soli concetti primitivi Preced, PEO e PrF, si può osservare che oltre a contenere tutte le definizioni del presente numero e nessun assioma, essa può avere per assiomi quelli della $\mathcal{T}_{1,7}$ scritti nei numeri seguenti (ossia gli assiomi della $\mathcal{T}_{1,5}$) oppure, invece di questi, quelli che da essi si ottengono, apportando ovvie semplificazioni agli assiomi 18.1 e 22.1 basati sulle definizioni 17.4 e 17.5.

18. Primi assiomi essenziali della teoria $\mathcal{T}_1$. Spazi inerziali.

Dapprima considero un fondamentale assioma di appartenenza, concernente il concetto $PEO(M, \gamma)$ di punto evento occupato da un punto materiale M in un CMP-caso γ.

ASSIOMA 18.1 – *Se E è (un punto evento) occupato da M in γ, allora E è un punto evento, M un punto materiale e γ un CMP-caso.*

Con simbolismo atto a mettere in luce l'aspetto logico del presente assioma ed opportuno quando si voglia considerare la $\mathcal{T}_1$ come una teoria astratta, tale assioma può enunciarsi brevemente scrivendo che $E \in PEO$ (M, γ) implica $E \in PE$ e $\gamma \in CMP$.

Si osservi che conformemente al senso dato ad « istante » mediante la def. 17.2, per altro non appartenente a $\mathcal{T}_1$, in $\mathcal{T}_1$ possiamo identificare il generico punto inerziale P_1 con la classe P dei punti-eventi costituenti le sedi degli eventi elementari che possono aver luogo in P_1.

Tenendo conto della legge d'inerzia possiamo allora porre la

seguente definizione di punto inerziale la quale naturalmente non esaurisce affatto la precedente legge: [74])

DEFINIZIONE 18.1 – *Si dice che P è un punto inerziale se soddisfa le due seguenti condizioni*:

a) P è una classe di punti eventi intersecanti in un punto evento ogni sezione spaziale del cronotopo;

b) esistono un CMP-caso γ e un punto materiale M tale che, in primo luogo, P è la classe dei punti eventi occupati da M in γ — ossia $P = PEO\ (M, \gamma)$ — e, in secondo luogo, ad ogni istante ϑ, M è isolato in γ, ossia M è l'unico punto materiale occupante in γ qualche punto-evento [appartenente a ϑ].

Ecco ora un assioma che traduce la *legge d'inerzia* e allo stesso tempo l'esistenza di spazi da chiamarsi inerziali.

ASSIOMA 18.2 – *Esiste una corrispondenza biunivoca K fra i punti-eventi e le quaderne di numeri reali $\langle x_1, \ldots, x_4 \rangle$, verificante le seguenti condizioni*:

a) se ai punti-eventi E ed E' corrispondono mediante K le rispettive quaderne $\langle x_1, \ldots, x_4 \rangle$ e $\langle y_1, \ldots, y_4 \rangle$, allora è $x_4 < y_4$ se e solo se E precede temporalmente E' [75]).

b) I punti inerziali sono i trasformati, mediante K^{-1}, delle rette dell'ordinario spazio euclideo S_4 — formato con le quaderne di numeri reali — non parallele all'iperpiano $x_4 = 0$.

Una qualunque corrispondenza soddisfacente le condizioni su K, considerate nel precedente assioma si dirà *inerziale* (o inerziale affine).

Se K è una qualsiasi corrispondenza biunivoca fra punti eventi E e punti $\langle x_1, \ldots, x_4 \rangle$ di S_4, si dirà anche che K è un *sistema di coordinate* del cronotopo e x_i la i^{ma} coordinata di E in K, per

---

[74]) La classe dei punti inerziali secondo la definizione 18.1 potrebbe, per es., essere vuota.

[75]) Per tale condizione ogni punto-evento è un membro della relazione Preced, il che, assieme all'assioma 17.1 giustifica la def. 17.2 appartenente a $\mathcal{T}_{1,6}$, $\mathcal{T}_{1,5}$ e $\mathcal{T}_{1,3}$.

$i = 1, \ldots, 4$, e si useranno le notazioni

$$E = pE^K(x_1, \ldots, x_4)\,, \quad x_i = \mathrm{coord}_i^K(E) \quad (i = 1, \ldots, 4). \tag{12}$$

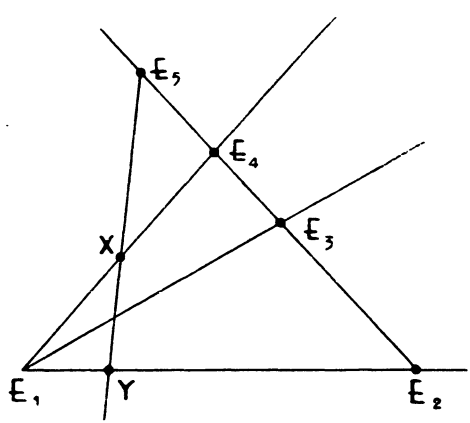
Si osservi ora che i punti E ed E' considerati in a) sono simultanei se e solo se è $x_4 = y_4$. Si riconosce allora facilmente che se anche E ed E'' sono simultanei, tali sono pure E' ed E'', ossia la *relazione di simultaneità è transitiva*; anzi gli istanti sono le sue classi di equivalenza. Poichè al variare di x_1, x_2, x_3, $E = pE(x_1, x_2, x_3, t)$ descrive un istante ϑ, t si dirà ascissa di ϑ in K e si scriverà

$$\vartheta = \Theta_t^K\,. \tag{13}$$

Usando una nomenclatura usuale in un senso piuttosto schematico, si chiamerà cronotopo l'insieme dei punti eventi (cioè PE), inoltre si diranno rette temporali i punti inerziali.

È utile definire le rette spaziali senza fare intervenire le corrispondenze inerziali, per es. come segue:

DEFINIZIONE 18.2 – *Si dice che r è una retta spaziale se è una classe di punti-eventi appartenenti a uno stesso istante ϑ, sotto la condizione, che presi comunque cinque punti eventi distinti $E_1, \ldots, E_5$,*



dei quali E_1 ed E_2 stiano su r ed E_2, E_3, E_4, E_5 stiano su una stessa retta temporale, r sia descritta dall'intersezione Y di ϑ con la retta temporale $E_5\,X$, quando X descrive le due rette E_1, E_3 ed E_1, E_4, private dei loro punti eventi, simultanei con E_5 — ved. figura —.

È facile riconoscere che queste rette spaziali sono le classi di punti-eventi mutate nelle rette di S_4 parallele all'iperpiano $x_4 = 0$ mediante una qualunque corrispondenza inerziale.

Per l'assioma 18.2 le rette spaziali del cronotopo sono ∞^5. Inoltre, come è facile riconoscere, la generica corrispondenza inerziale muta le rette del cronotopo, spaziali e temporali, nelle rette di S_4. Da ciò, per l'assioma 18.2 e ben noti teoremi di geometria affine, segue il

TEOREMA 18.1 – *Se H è una corrispondenza inerziale, la generica K di tali corrispondenze si ottiene* [76]) *da H mediante la generica trasformazione lineare*

$$(14) \qquad \begin{cases} y_i = \sum_{s=1}^{4} a_{is} x_s + b_i & (i = 1, 2, 3) \\ y_4 = \tau x_4 + b_4 , \end{cases}$$

soddisfacente le condizioni

$$(15) \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 , \qquad \tau = a_{44} > 0 .$$

Se è $D > 0$, K sarà detta *equi-orientata con H*.

Si osservi che ogni corrispondenza inerziale K è determinata dall'origine $E_0 = E_0^K = pE^K(0, 0, 0, 0)$ e i quattro punti unità $E_r = E_r^K = pE^K(\delta_{r,1}, \ldots, \delta_{r,4})$ ove $\delta_{r,i}$ è il simbolo di Kronecker. E_0, E_1, E_2 ed E_3 sono simultanei e a tre a tre non complanari, E_4 è ad essi temporalmente successivo.

Viceversa, dati comunque $E_0, \ldots, E_4$ soddisfacenti queste condizioni, $E_0, \ldots, E_4$ individuano la corrispondenza inerziale K per cui è $E_r = E_r^K$ $(r = 1, \ldots, 4)$.

Dal precedente teorema 18.1 risulta poi che le rette temporali

---

[76]) Ossia, se H è una corrispondenza inerziale, esistono i numeri a_{ij}, b_i, τ e b_4 $(i, j = 1, 2, 3)$ soddisfacenti le (15) e tali che (14) equivale alla condizione $pE^H(x_1, \ldots, x_4) = pE^K(y_1, \ldots y_4)$ — v. $(12)_1$ — per $x_1, \ldots, x_4$, $y_1, \ldots, y_4$ numeri reali qualsiasi; inoltre (15) implica l'esistenza di una corrispondenza inerziale K che dia luogo alla precedente equivalenza.

e spaziali del cronotopo sono rette di uno spazio affine a quattro dimensioni. Restano così determinati nel cronotopo i piani, gli iperpiani e le varie relazioni di parallelismo fra rette piani e iperpiani e quella di equipollenza tra due coppie qualsiasi $\langle E_1, E_2 \rangle$ ed $\langle E_3, E_4 \rangle$ di punti eventi. Quindi sono determinati i vettori del cronotopo [77]).

Nel cronotopo risultano determinati pure la somma e differenza di due vettori e il prodotto di un vettore per un numero reale.

È dunque determinato il rapporto tra segmenti paralleli del cronotopo e in particolare la relazione di uguaglianza tra essi.

Poichè poi si sono identificati gli istanti con le sezioni spaziali del cronotopo e queste hanno in ogni corrispondenza inerziale K una equazione della forma $x_4 = \text{cost.}$, resta determinato il rapporto di due intervalli temporali non degeneri qualsiasi [78]).

Però i precedenti postulati da soli non forniscono i mezzi per introdurre il rapporto di due segmenti spaziali generici del cronotopo. Quindi non è ancora possibile determinare le varie relazioni di perpendicolarità nè determinare, a meno dell'unità di misura, i prodotti scalari e vettoriali di vettori spaziali (ossia paralleli a rette spaziali).

DEFINIZIONE 18.3 – *Se K è una corrispondenza inerziale e Σ la classe dei punti inerziali aventi in K equazioni della forma $x_i = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ con c_1, c_2 e c_3 costanti, allora si dirà che Σ è uno spazio inerziale, e che K è un sistema di coordinate inerziali solidale con Σ. Si scriverà pure $\Sigma = \Sigma^K$.*

Si osservi che Σ^K *è lo spazio inerziale un cui punto (inerziale) P contiene i punti eventi E_0^K e E_4^K.*

---

[77]) Un vettore è qui inteso come la classe di coppie (ordinate) di punti-eventi equipollenti ad una data di esse.

[78]) Ovviamente, degli istanti ϑ_1 e ϑ_2, si dirà che ϑ_1 precede ϑ_2 se E_1 precede E_2 per $E_1 \in \vartheta_1$ e $E_2 \in \vartheta_2$. Per intervallo temporale $\overline{\vartheta}$ non degenere, si intenderà poi la classe degli istanti ϑ preceduti da ϑ_1 e precedenti ϑ_2, ove ϑ_1 e ϑ_2 sono due istanti dei quali il primo precede il secondo.

Si può anche osservare che uno spazio inerziale Σ è solidale con ∞^{14} sistemi di coordinate inerziali e che la generica trasformazione fra tali coordinate è data dalla (14) ove oltre (15) valgono le

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0 \,. \tag{16}$$

Un altro possibile modo di definire gli spazi inerziali è fornita dal seguente

TEOREMA 18.1 – *Il generico spazio inerziale è il generico insieme di punti inerziali costituenti le rette temporali parallele ad una data.*

Si osservi ora che per ogni punto inerziale P e sezione spaziale ϑ è determinato il *punto evento* $E = E_{P,\vartheta}$ *intersezione di* P *con* ϑ; inoltre per ogni spazio inerziale Σ e ogni punto evento E è determinato il *punto* (*inerziale*) $P = P_{\Sigma,E}$ *di* Σ *che contiene* E.

Sia K un sistema di coordinate spazio-temporali solidale a Σ ($\Sigma = \Sigma^K$). Allora per ogni punto P di Σ e ogni istante ϑ, $E = E_{P,\vartheta}$ ha in K le prime tre coordinate x_1, x_2, x_3 indipendenti da ϑ; onde fra l'altro, esse possono assumersi per *coordinate spaziali* in Σ; Indicherò con $K^{[3]}$ il sistema da esse individuato e lo dirò subordinato da K su Σ.

Dirò poi *retta di* Σ (naturalmente) *associata alla retta spaziale* r_4, la classe r_3 descritta dal punto $P = P_{\Sigma,E}$ di Σ, quando E descrive r_4. Detta poi R_ϑ^Σ la classe delle rette di Σ associate alle rette della sezione spaziale ϑ del cronotopo, R_ϑ^Σ risulta indipendente da ϑ.

È facile riconoscere che (rispetto alla classe R_ϑ^Σ di rette) il precedente sistema $K^{[3]}$ di coordinate spaziali in Σ è affine.

Dato uno spazio inerziale Σ e una sezione spaziale ϑ qualsiasi, le rette, i piani, le relazioni di parallelismo e di equivalenza, in ϑ subordinano rette, piani, ecc. su Σ.

Di più, se le coppie $\langle P_1, P_2 \rangle$ e $\langle P_3, P_4 \rangle$ di punti di Σ sono equipollenti e ϑ e ϑ' sono due sezioni spaziali qualunque, allora, nel cronotopo, le coppie $\langle E_{P_1,\vartheta}, E_{P_2,\vartheta} \rangle$ e $\langle E_{P_3,\vartheta'}, E_{P_4,\vartheta'} \rangle$ sono equipollenti. Ciò equivale a dire che i vettori di Σ corrispondono naturalmente ai vettori spaziali del cronotopo. Inoltre

se $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ sono i vettori del cronotopo corrispondenti ai vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ di Σ, $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ corrisponde a $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, e $m\boldsymbol{w}_1$ corrisponde a $m\boldsymbol{v}_1$ per ogni numero reale m.

Si osservi infine che ordinariamente il sistema spazio-temporale K individuato da $E_0, \ldots, E_4$ viene determinato dando i quattro punti $P_0, \ldots, P_3$ dello spazio inerziale Σ^K, con $P_r = P_{\Sigma^K, E_r}$ per $r = 0, \ldots, 3$ (cosicchè essi sono tre a tre non allineati), e inoltre gli istanti θ_0^K e θ_1^K relativi a E_0 ed E_1 (ossia contenenti E_0 ed E_1).

19. Assiomi concernenti la regolarità dei moti. Velocità e accelerazione.

L'unicità del punto-evento occupato da un punto materiale M ad un istante, il principio di genidentità [79]) e alcune proprietà di regolarità del moto sono stabilite mediante il seguente

ASSIOMA 19.1 – *La traiettoria $PEO(M, \gamma)$, descritta nel cronotopo dal punto materiale M nel CMP-caso γ non sia vuota. Allora esiste una corrispondenza inerziale K e tre funzioni reali (univoche) $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ verificanti le seguenti sei condizioni $a), \ldots, f)$* [80]):

a) φ_1, φ_2 e φ_3 son definite e continue in un intervallo $V = \mathcal{V}_{M,\gamma}^K$ di numeri reali avente estremi non necessariamente finiti (per semplicità si potrebbe fare coincidere V con l'asse reale).

b) Le derivate prime di φ_1, φ_2 e φ_3 esistono in V salvo un insieme di punti finito o numerabile e sono a variazione limitata nella generica porzione limitata V_1 di V. Per $i = 1, 2, 3$ vale poi la decomposizione $\dfrac{d\varphi_i}{dt}(t) = \overline{\varphi}_i(t) + \overline{\varphi}_i^*(t)$ ove $\overline{\varphi}_i$ è la funzione

---

[79]) Il principio di genidentità si può enunciare dicendo che se il punto materiale M occupa nel CMP-caso γ i punti eventi distinti E_1 e E_2, allora M passa con continuità da E_1 a E_2.

[80]) Le condizioni *a*)...*f*) incluse nell'assioma 19.1 sono molto generali. Si potrebbe semplificare sostituendo a queste le *a*), *b*), *e*) e la condizione seguente:

g) Le derivate prime e seconde di $\varphi_i(t)$ sono continue ($i = 1, 2, 3$).

dei salti di φ_i [81]), e φ_i^* è assolutamente continua in ogni porzione limitata di V.

c) Le derivate prime di φ_1, φ_2 e φ_3 esistono e sono continue in t almeno se, all'istante t, M non è sovrapposto ad un altro punto materiale (in particolare se M non subisce un urto).

d) Le derivate seconde di φ_1, φ_2 e φ_3 esistono in quasi tutto V e sono ivi sommabili.

e) Le equazioni di $PEO(M, \gamma)$ nel sistema K sono le:

$$x_i = \varphi_i(x_4) \quad \text{per} \quad x_4 \in V \qquad (i = 1, 2, 3),$$

f) O l'estremo destro t''_V di V è $= +\infty$, o esistono una successione crescente $t_1, t_2, \ldots$, tendente a t''_V, ed un punto $M_1 \neq M$, tali che $PEO(M_1, \gamma)$ abbia in K equazioni $x_i = \psi_i(x_4)$ $(i = 1, 2, 3)$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi_i(t_n) - \psi_i(t_n)] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Si osservi che per le proprietà di regolarità delle trasformazioni (14) fra corrispondenze inerziali, *se* $M \in PM$, $\gamma \in CMP$ *e* $PEO\,(M, \gamma)$ *non è vuoto, allora qualunque sia la corrispondenza inerziale* K, *esistono le precedenti* φ_1, φ_2, φ_3 *soddisfacenti a*), ..., *f*)

Dalla condizione *a*) dell'assioma 19.1 segue che, definita la *vita* $v_{M,\gamma}$ *di* M *in* γ come *l'insieme degl'istanti* ϑ *contenenti qualche punto evento* E *occupato da* M *in* γ, si ha che $v_{M,\gamma}$ è un intervallo.

La condizione *e*) dell'assioma 19.1 implica che *per ogni* ϑ *in* $v_{M,\gamma}$ *c'è un solo punto evento* E *occupato da* M *in* γ *e appartenente a* ϑ; lo si dirà *punto evento occupato da* M *all'istante* ϑ *nel* CMP*-caso* γ e si scriverà

$$E = pEO(M, \vartheta, \gamma) \qquad (\vartheta \in v_{M,\gamma})\,. \tag{17}$$

Inoltre, per ogni spazio inerziale $\Sigma = \Sigma^k$ [Def. 18.3], il punto $P = P_{\Sigma,E}$ di Σ contenente E si dirà posizione in Σ di M all'istante ϑ e in γ, e si scriverà

$$P = \mathrm{pos}_\Sigma(M, \vartheta, \gamma) = \mathrm{pos}_K(M, \vartheta, \gamma) \qquad (\vartheta \in v_{M,\gamma})\,. \tag{18}$$

---

[81]) V. [25], Def. 13 a pg. 92.

Osserviamo che per ogni corrispondenza inerziale K, punto materiale M e CMP-caso γ l'intervallo $V = \mathcal{V}^K_{M,\gamma}$ — eventualmente vuoto — e le funzioni φ_1, φ_2 e φ_3 considerate nell'assioma 19.1 sono univocamente determinate. Per $i = 1, 2, 3$, se $x_4 \in V$, dirò che il numero $x_i = \varphi_i(x_4)$ è la *i-ma coordinata in K di M all'istante* $\theta^K_{x_4}$ e in γ, inoltre scriverò

$$x_i = \mathrm{coord}^K_i\,(M, \vartheta, \gamma) \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{19}$$

Posto poi

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{K}{v}_i = \varphi'_i(x_4)\,, \qquad a_i = \varphi''_i(x_4) \\ \overset{K}{v}{}^+_i = \varphi'_1(x_4^+) = \lim\limits_{t\to x_4^+} \dfrac{\varphi_i(t) - \varphi_i(x_4)}{t - x_4}\,, \quad \overset{K}{a}{}^+_i = \lim\limits_{t\to x_4^+} \dfrac{\varphi'_i(t) - \varphi'_i(x_4)}{t - x_4}\,, \end{array}\right. \tag{20}$$

$\overset{K}{v}_i$, $\overset{K}{a}_i$, $\overset{K}{v}{}^+_i$ e $\overset{K}{a}{}^+_i$ si diranno nell'ordine l'*i-ma* componente in K della velocità, accelerazione, velocità destra e accelerazione destra di M, all'istante ϑ, in γ. Conviene introdurre le notazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{K}{v}_i = \mathrm{vel}^K_i\,(M, \vartheta, \gamma)\,, \quad \overset{K}{a}_i = \mathrm{accel}^K_i\,(M, \vartheta, \gamma) \\ \overset{K}{v}{}^+_i = \mathrm{vel}^{(K)+}_i\,(M, \vartheta, \gamma)\,, \ \overset{K}{a}{}^+_i = \mathrm{accel}^{(K)+}_i\,(M, \vartheta, \gamma)\ (i = 1, 2, 3). \end{array}\right. \tag{21}$$

Analogamente si definiscono $\overset{K}{v}{}^-_i = \mathrm{vel}^{(K)-}_i\,(M, \gamma, \vartheta)$ e $\overset{K}{a}{}^-_i = \mathrm{accel}^{(K)-}_i\,(M, \gamma, \vartheta)$. Fissati M e γ, le (21) hanno senso per ogni x_4 in $V = \mathcal{V}^K_{M,\gamma}$, eccettuato al più un insieme numerabile.

Si osservi che a causa della trasformazione (14), dati gl'istanti ϑ e ϑ', se per una particolare corrispondenza inerziale H si ha

$$\mathrm{vel}^H_i\,(M', \vartheta', \gamma') = \mathrm{vel}^H_i\,(M, \vartheta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{22}$$

allora l'analogo vale per ogni altra K di tali corrispondenze.

Dunque si può parlare di eguaglianza della velocità vettoriale di M relativa a ϑ e γ con quella di M' relativa a ϑ' e γ'.

L'analogo dicasi per le velocità sinistre o destre.

Nel prossimo numero si farà uso del seguente

TEOREMA 19.1 – *Dati gli istanti ϑ e ϑ', i CMP-casi γ e γ', e il numero reale ϱ, se*

$$\mathrm{accel}^K_i\,(M', \vartheta', \gamma') = \varrho\,\mathrm{accel}^K_i\,(M, \vartheta, \gamma)\,, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{23}$$

vale per una particolare corrispondenza inerziale K, allora (23) *vale per ogni corrispondenza inerziale K.*

Anche questo teorema è una semplice conseguenza della trasformazione (14). Esso è valido anche per le accelerazioni destre e sinistre ma non per le velocità, eccettuato il caso $\varrho = 1$ in cui tale teorema si riduce alla precedente osservazione — vedi (22) —.

Questo teorema permette di parlare dell'eventuale parallelismo fra l'accelerazione di M a ϑ in γ e quella di M' a ϑ' in γ' e del rapporto (con segno) fra tali accelerazioni (supposte parallele).

Se le dette accelerazioni non sono parallele, per ora non si può definire il rapporto dei loro moduli.

20. Introduzione della massa inerziale.

Non volendo escludere che ogni porzione di materia possa in un dato problema meccanico ritenersi come costituente un punto materiale, non si è esclusa l'esistenza di possibili punti materiali M_1 ed M_2 costituiti da porzioni di materia distinte ma dotate di una parte in comune, cosicchè a nessun istante ϑ e in nessun CMP-caso γ, M_1 ed M_2 possono essere punti materiali l'uno in presenza dell'altro.

Per questo pongo, per definire la massa, il seguente

ASSIOMA 20.1 ($20.\overline{1}$) – *Esiste una corrispondenza inerziale K e una funzione reale $\mu(M)$* — detta funzione rappresentante la massa — *definita per il generico punto materiale M mediante le seguenti tre condizioni*:

a) $\mu(M) > 0$ per $M \in PM$.

b) Se M_0 e M sono punti materiali distinti, allora esistono n di tali punti materiali $M_1, \ldots, M_n$, n istanti $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ ed n CMP-casi $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ [82]) tali che $M_n = M$ e per $r = 1, \ldots, n$, nel

[82]) Per tradurre la condizione *b*) nel linguaggio ordinario L^*, conviene porla preliminarmente sotto la forma « ...., allora esistono n punti materiali $M_1, \ldots, M_n$, per cui, se r è un intero $\geqslant 1$ e $\leqslant n$, esiste un CMP-caso γ ed un istante ϑ tale che in γ, all'istante ϑ, M_{r-1} e M_r costituiscono un sistema isolato, inoltre (24) e (25) valgono per $\gamma_r = \gamma$ e $\vartheta_r = \vartheta$.

CMP-caso γ_r e all'istante ϑ_r, M_{r-1} e M_r costituiscono un sistema isolato [83]), (hanno la stessa velocità vettoriale) [84]), inoltre si ha

$$\mu(M_{r-1})\,\mathrm{accel}_i^K\,(M_{r-1}, \vartheta_r, \gamma_r) = \\ = -\,\mu(M_r)\,\mathrm{accel}_i^K\,(M_r, \vartheta_r, \gamma_r) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{3}[\mathrm{accel}_i^K\,(M_r, \vartheta_r, \gamma_r)]^2 > 0\,. \tag{25}$$

c) Se nel CMP-caso γ e all'istante ϑ i punti materiali M_0 e M costituiscono un sistema isolato (e hanno la stessa velocità), allora si ha

$$\mu(M_0)\,\mathrm{accel}_i^K\,(M_0, \vartheta, \gamma) = -\,\mu(M)\,\mathrm{accel}_i^K\,(M, \vartheta, \gamma)\,. \tag{26}$$

Si osservi che, per il teorema 19.1, se la funzione reale $\mu(M)$ definita per $M \in PM$ *soddisfa le condizioni a*), *b*) *e c*) *per una particolare corrispondenza inerziale* K, *ciò accade per* K *generica* (purchè inerziale).

Si osservi ora che *se anche* $\underset{1}{\mu}(M)$ *è una funzione rappresentante la massa* (nel senso precedente), *si ha*

$$\frac{\mu(M)}{\mu(M_0)} = \frac{\underset{1}{\mu}(M)}{\underset{1}{\mu}(M_0)}\,, \qquad \text{per } M,\, M_0 \in PM \tag{27}$$

Infatti le suddette funzioni μ e $\underset{1}{\mu}$ soddisfino le condizioni *a*), *b*) e *c*) dell'assioma 20.1 ($20.\overline{1}$) e M_0 e M siano punti materiali distinti. Allora la validità della condizione *b*) per μ implica

---

[83]) Ossia nessun punto materiale occupa all'istante ϑ un punto evento, ad eccezione di M_{r-1} ed M_r.

[84]) L'ipotesi che M_{r-1} e M_r abbiano la stessa velocità vettoriale rispetto ad uno quindi ad ogni sistema di coordinate inerziali è intesa come non inclusa (come inclusa) nelle condizioni *b*) e *c*) dell'assioma 20.1 ($20.\overline{1}$). Nell'assioma $20.\overline{1}$, da considerarsi come appartenente alla teoria $\overline{\mathfrak{S}}_1$, tali inclusioni permettono di definire massa e forza ammettendo solo una debolissima validità del principio di azione e reazione, ossia che le forze che mutuamente si esplicano due punti materiali M e M_1 non aventi la stessa velocità, possano essere, oltre che non dirette secondo la retta $M\,M_1$, anche non eguali e contrarie.

l'esistenza di n punti materiali $M_1, \ldots, M_n$, tali che $M_n = M$, inoltre per $r = 1, \ldots, n$, M_{r-1} e M_r costituiscono un sistema isolato verificante (24) e (25) (e hanno la stessa velocità vettoriale).

Di conseguenza in base alla validità della condizione c) con μ sostituita da $\underset{1}{\mu}$, si ha

$$(24') \qquad \underset{1}{\mu}(M_{r-1})\,\mathrm{accel}_i^K\,(M_{r-1}, \vartheta_r, \gamma_r) = \\ = -\,\underset{1}{\mu}(M_r)\,\mathrm{accel}_i^K\,(M_r, \vartheta_r, \gamma_r) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Per (15) vi è un valore di i per cui $a_i^K = \mathrm{accel}_i^K\,(M_r, \vartheta_r, \gamma_r) \neq 0$. Allora, per la validità di a) per μ e $\underset{1}{\mu}$, da (24) e (24') segue

$$(28) \qquad \frac{\mu(M_r)}{\mu(M_{r-1})} = \frac{\underset{1}{\mu}(M_r)}{\underset{1}{\mu}(M_{r-1})} \qquad (r = 1, \ldots, n).$$

Poichè $M_n = M$, (28) implica (27). c.d.d.

Assodato che il rapporto $m = \mu(M)/\mu(M_0)$ dato da (27) non dipende dalla funzione μ rappresentante la massa, che si considera, si può chiamare m massa (relativa) di M rispetto a M_0, e si può scrivere

$$(29) \qquad m = \frac{\mu(M)}{\mu(M_0)} = \mathrm{mass}_{M_0}(M)\,.$$

Ne segue

$$(30) \qquad \mathrm{mass}_{M_0}(M) = 1/\mathrm{mass}_M(M_0) \qquad \text{per } M_0, M \in PM\,,$$

$$(31) \qquad \mathrm{mass}_{M_0}(M) = \mathrm{mass}_{M_0}(M_1)\,\mathrm{mass}_{M_1}(M) \qquad \text{per } M_0, M_1 \in PM\,.$$

21. Considerazioni preliminari sulle corrispondenze inerziali.

Per ogni corrispondenza inerziale H, sia δ_H la funzione binaria — da chiamarsi *metrica del cronotopo associata ad H* — tale che $\delta^H_{E,E'}$ ha senso se e solo se E ed E' sono punti-eventi, e in tal caso si ha — v. $(12)_1$ —

$$(32) \qquad \delta^H_{E,E'} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x'_i - x_i)^2} \quad \text{per}$$

$$E = pE^H(x_1, \ldots, x_4)\,, \quad E' = pE^K(x'_1, \ldots, x'_4)\,.$$

Se Σ è uno spazio inerziale, P e P' sono due suoi punti, ϑ è un istante, ed E (E') è il punto-evento relativo [85]) a P (P') e ϑ, allora $\delta^H_{E,E'}$ non dipende da ϑ onde si può definire la metrica subordinata da H su Σ mediante l'eguaglianza.

$$\delta^{H,\Sigma}_{P,P'} = \delta^H_{E,E'} \,. \tag{33}$$

In base a teoremi ben noti la *corrispondenza* (inerziale [86])) K è *isometrica con* H — cioè $\delta^K = \delta^H$ — *se e solo se la trasformazione di* K *in* H *ha la forma*

$$\begin{cases} y_i = \lambda \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j + a_{i4} x_4 + b_i & (i = 1, 2, 3) \\ y_4 = \tau x_4 + b_4 \,, \end{cases} \tag{34}$$

ove $\lambda = \pm 1$, $\tau = 1$, *e inoltre*

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ri} \alpha_{si} = \delta_{rs} \qquad r, s = 1, 2, 3 \,. \tag{35}$$

K *è equiorientata* [87]) *con* H *nel caso* $\lambda > 0$.

L'insieme delle corrispondenze inerziali isometriche (isometrice ed equi-orientate) con H si indicherà con I_H (I^*_H) e tale insieme si dirà *isometrico* (*isometrico orientato*).

È facile riconoscere che se Σ è uno spazio inerziale, E_0 un punto evento e $\mathfrak{J}$ un insieme isometrico (orientato), in $\mathfrak{J}$ c'è un sistema K di coordinate solidali a Σ e di origine E_0.

K si dirà *isosferica con* H se si ottiene da H mediante le trasformazioni (34), per λ e τ qualsiasi purchè $\lambda \neq 0$ e $\tau > 0$.

Per H e K isosferiche, le metriche subordinate da δ^K e δ^H sulle sezioni spaziali (onde sugli spazi inerziali) sono fra loro proporzionali, precisamente è

$$\delta^K_{E,E'} = |\lambda| \, \delta^H_{E,E'} \tag{36}$$

---

[85]) Si suppone cioè che E (E') sia l'intersezione di P (P') con la sezione spaziale ϑ del cronotopo.

[86]) L'ipotesi che K sia inerziale è superflua. Poiché la trasformazione (34) è un caso particolare della (14) e H è inerziale, anche K risulta tale.

[87]) V. dopo teorema 18.1.

per E simultaneo con E'; onde *le sfere rispetto ad* δ^K *sono quelle rispetto a* δ^H (da cui la denominazione adottata) [88]).

L'insieme delle corrispondenze inerziali isosferiche (e anche equiorientate) con H si indicherà con $\overline{I}_H$ ($\overline{I}^*_H$) e tale insieme si dirà *isosferico* (*isosferico orientato*).

Se K non appartiene ad $\overline{I}_H$ le sfere rispetto ad δ^K sono ellissoidi rispetto a δ^K (e viceversa).

Nel n. 31 riuscirà utile il seguente

TEOREMA 21.1 – *Gli insiemi isometrici* (*eventualmente orientati*) $\mathfrak{I}$ *e* $\mathfrak{J}$ *non appartengono ad uno stesso isosferico. Inoltre* Σ *sia uno spazio inerziale,* E_0 *un punto evento e si abbia* $a_1 > 0$ *ed* $\varepsilon > 0$. *Allora si possono trovare due sistemi di coordinate* H_1, H_2 *in* $\mathfrak{I}$ *e altri due* K_1 *e* K_2 *in* $\mathfrak{J}$, *per cui* H_1, H_2, K_1, K_2 *hanno la comune origine* E_0 *e sono solidali a* Σ, *inoltre esistono due punti eventi* E_1 *ed* E_2 *e due numeri reali positivi* $\bar{\varrho}$ *e* a_2 *tali che*

$$0 < a_1 < a_2 < a_1 + \varepsilon\,, \tag{37}$$

$$E_1 = pE^{H_1}(\bar{\varrho}, 0, 0, 0) = pE^{K_1}(a_1, 0, 0, 0)\,, \tag{38}$$

$$E_2 = pE^{H_2}(\bar{\varrho}, 0, 0, 0) = pE^{K_2}(a_2, 0, 0, 0)\,, \tag{39}$$

cosicchè, in particolare, mentre le distanze di E_1 ed E_2 da E_0 associate a H_1 o H_2, hanno il comune valore $\bar{\varrho}$, quelle associate a K_1 o K_2 hanno i valori distinti a_1 e a_2.

Infatti, si prenda un H in $\mathfrak{I}$ e un K in $\mathfrak{J}$, di origine E_0 e solidali a Σ. Si consideri poi la superficie σ_ϱ dipendente dal parametro ϱ ($0 < \varrho < \infty$) rappresentata dalle equazioni

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \varrho^2 \qquad y_4 = 0\,, \tag{40}$$

nelle coordinate del sistema H. Mentre rispetto alla metrica δ^H le σ_ϱ sono sfere, rispetto a δ^K esse sono effettivi ellissoidi aventi i minimi assi su una stessa retta spaziale r contenente E_0.

---

[88]) Nel caso generale anziché $\lambda = \pm 1$ e $\tau = 1$ si ha $\lambda \neq 0$ e $\tau > 0$; le (35) valgono sempre. In tal caso si può dire che δ^K si ottiene da δ^H dividendo l'unità di lunghezza per $|\lambda|$ e quella dei tempi per τ.

Si prendano ora un H_1 in $\mathfrak{J}$ e un K_1 in $\mathfrak{Z}$, di comune origine E_0, solidali a Σ e aventi i primi assi concordi e sovrapposti alla r. Scelto su r il punto evento E_1 definito da $(38)_2$ e posto $\bar{\varrho} = \delta^{H_1}_{E_0,E_1}$, vale anche $(38)_1$.

Poichè rispetto alla metrica δ^{K_1} il segmento $E_0\,E_1$ è un minimo semiasse di $\sigma_{\bar{\varrho}}$, esiste certo un numero a_2 verificante (37) e un punto evento E_2 su $\sigma_{\bar{\varrho}}$, per cui la distanza $\delta^{K_1}_{E_0,E_2}$ eguaglia a_2.

Si prendano ora un H_2 in $\mathfrak{J}$ e un K_2 in $\mathfrak{Z}$, di origini E_0, solidali a Σ, e aventi $E_0\,E_2$ per primo asse coordinato. Poichè $\sigma_{\bar{\varrho}}$ è una sfera rispetto a δ^{H_1} onde anche rispetto a δ^{H_2}, si ha $\bar{\varrho} = \delta^{H_1}_{E_0,E_2} = \delta^{H_2}_{E_0,E_2}$, quindi per la scelta del primo asse di H_2 vale $(39)_1$.

Essendo poi $a_2 = \delta^{K_1}_{E_0,E_2} = \delta^{K_2}_{E_0,E_2}$, vale anche $(39)_2$.

c.d.d.

Nel seguito riuscirà utile la seguente

CONVENZIONE 21.1 – *a*) si indicherà con $\mathcal{S}_1$ la classe dei numeri reali e con $\mathcal{S}_3$ quella delle loro terne. Nel caso $x, y \in \mathcal{S}_3$ e $m \in \mathcal{S}_1$, si sottintenderanno anche le posizioni

$$\begin{cases} x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle, \quad -x = \langle -x_1, -x_2, -x_3 \rangle, \quad x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ mx = \langle mx_1, mx_2, mx_3 \rangle, \quad x + y = \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 \rangle. \end{cases}$$

b) Spesso in luogo di « $f(\ldots, x_1, x_2, x_3)$ », specialmente quando x_1, x_2 e x_3 siano le coordinate di una posizione o le componenti di un vettore, si scriverà brevemente « $f(\ldots \mid x)$ » e si intenderà $x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, onde $x \in \mathcal{S}_3$. Si scriverà anche « $f(\ldots \mid 0)$ » in luogo di « $f(\ldots, 0, 0, 0)$ ».

c) Nei casi in cui si usino terne di funzioni numeriche $f_i(\ldots)$ $(i = 1, 2, 3)$ — per es., $\mathrm{vel}^K_i\,(M, \vartheta, \gamma)$ o $\mathrm{accel}^K_i\,(M, \vartheta, \gamma)$ — si sottintenderanno talvolta posizioni del tipo

$$(41) \qquad \begin{cases} f(\ldots) = \langle f_1(\ldots), f_2(\ldots), f_3(\ldots) \rangle \\ \mid f(\ldots) \mid = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [f_i(\ldots)]^2}\,. \end{cases}$$

Si osservi che, considerate due corrispondenze inerziali isosferiche H e K legate dalle (34), se vale (35), $\tau > 0$ e λ è qualunque ma $\neq 0$, si ha

$$(42) \qquad \mid \mathrm{accel}^K\,(M, \vartheta, \gamma) \mid = \mid \lambda \mid \tau^{-2} \mid \mathrm{accel}^H\,(M, \vartheta, \gamma) \mid;$$

se inoltre H e K son solidali ad uno stesso spazio inerziale Σ (ossia $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$), è

$$(43) \qquad | \operatorname{vel}^K (M, \vartheta, \gamma) | = | \lambda | \tau^{-1} | \operatorname{vel}^H (M, \vartheta, \gamma) | .$$

22. Assioma di appartenenza per PrF, assiomi dinamici e definizioni di riferimento galileiano e di forza.

Finora non si è usata la classe PrF — i cui elementi sono detti anche proprietà PrF —. Essendo essa essenziale per la definizione di forza (totale) e di riferimento galileiano, conviene cominciare col postulare la seguente proprietà di appartenenza involgente appunto la classe PrF.

ASSIOMA 22.1 – *Se Π è una proprietà PrF, essa è una relazione ternaria* (classe di terne), *e se Π vale per M, ϑ e γ, allora M è un punto materiale, ϑ un istante e γ un CMP-caso* (brevemente $\Pi \in PrF$ e $\langle M, \vartheta, \gamma \rangle \in \Pi$ *implica* $M \in PM$, $\vartheta \in Ist$ e $\gamma \in MPC$).

DEFINIZIONE 22.1 – *Se all'istante ϑ e nel CMP-caso γ il punto materiale M occupa un punto-evento E, la classe $\overline{\Pi}$ delle proprietà PrF valide per M* (in ϑ e γ) *si dirà lo stato fisico di M all'istante ϑ e in γ* (*non involgente proprietà cinematiche*); *si dirà anche che $\overline{\Pi}$ è un* (*possibile*) *stato fisico totale, anzi si dirà brevemente che $\overline{\Pi}$ è lo stato $StaFT$ di M in ϑ e γ e si scriverà*

$$(44) \qquad \overline{\Pi} \in StaFT , \qquad \overline{\Pi} = staFT(M, \vartheta, \gamma) ,$$

CONVENZIONE 22.1 – Si indicherà con Δ l'insieme delle coppie fisicamente possibili di stati $StaFT$, questo insieme essendo inteso come la classe delle coppie $\langle \overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2 \rangle$, tali che per opportuni valori di M_1, M_2, ϑ e γ con $M_1 \neq M_2$, si abbia $\overline{\Pi}_i = staFT(M_i, \vartheta, \gamma)$ per $i = 1, 2$.

Si osservi che *la precedente classe Δ di coppie è simmetrica* nel senso che $\langle a, b \rangle \in \Delta$ implica $\langle b, a \rangle \in \Delta$.

Scrivo ora il seguente assioma dinamico per alcune sue doti di generalità e per la relativa celerità con cui esso permette di definire la forza totale che un punto materiale esplica su un

altro ad un istante ed in un CMP-caso. (Nella parte 3ª ne verrà considerato un altro, l'assioma 33.1 (o $33.\overline{1}$), per alcuni aspetti più generale).

ASSIOMA 22.2 ($22.\overline{2}$) – *Esiste un solo insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{I}}$ *tale che, per ogni insieme isometrico (isometrico orientato* [89]*)* $\mathfrak{I}$ *appartenente ad* $\overline{\mathfrak{I}}$ *e ogni punto materiale* M' *esiste una e una sola terna di funzioni* $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ *verificante le seguenti due condizioni*

CONDIZIONE 22.1 – Per $i = 1, 2, 3$, $\mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}}, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$ — in breve $\mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}} \mid x \mid v)$ — è una funzione reale definita per $\langle \overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}} \rangle \in \Delta$ [Conv. 22.1] e per $x, v \in \mathcal{S}_3$ purchè sia $x^2 > 0$.

CONDIZIONE 22.2 (LEGGE FONDAMENTALE DELLA DINAMICA) – Nel CMP-caso γ, all'istante ϑ, gli $n+1$ punti materiali $M, M_1, \ldots, \ldots, M_n$ costituiscano un sistema isolato e l'accelerazione di M esista. Sia poi

$$(45) \quad \overline{\Pi} = staFT(M, \vartheta, \gamma)\,, \quad \overline{\Pi}_r = staFT(M_r, \vartheta, \gamma) \quad (r = 1, \ldots, n),$$

$$(46) \quad K \in \mathfrak{I}\,, \ \mathrm{coord}_i^K(M, \vartheta, \gamma) = 0\,, \ \mathrm{vel}_i^K(M, \vartheta, \gamma) = 0 \ (i = 1, 2, 3),$$

$$(47) \quad \underset{r}{x_i} = \mathrm{coord}_i^K\,(M_r, \vartheta, \gamma)\,, \quad \underset{r}{v_i} = \mathrm{vel}_i^K\,(M_r, \vartheta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, n),$$

$$(48) \qquad \underset{r}{x^2} = \underset{r}{x_1^2} + \underset{r}{x_2^2} + \underset{r}{x_3^2} > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n)\,.$$

Allora [90])

$$(49) \quad \mathrm{mass}_{M'}(M)\,\mathrm{accel}_i^K(M, \vartheta, \gamma) = \sum_{r=1}^{n} \mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_r \mid \underset{r}{x} \mid \underset{r}{v}) \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

---

[89]) Tale parentesi è da leggersi solo nell'assioma $22.\overline{2}$ invece della frase « isometrico ». Questo assioma ha lo stesso scopo dell'assioma $20.\overline{1}$. — V. nota [84]) — e come quest'ultimo sarà considerato come appartenente a $\overline{\mathfrak{C}}_1$.

[90]) Nel caso che in γ all'istante ϑ l'universo sia costituito da un'infinità numerabile di punti materiali includenti M, e questo non sia sovrapposto ad altri, si può ammettere che: *a*) la (49) valga dopo avervi sostituito la sommatoria con la corrispondente serie, e *b*) che questa sia assolutamente convergente.

È ora lecito porre le seguenti definizioni di riferimento galileiano e di forza.

DEFINIZIONE 22.2 – *Dirò riferimento galileiano ogni corrispondenza inerziale K appartenente all'insieme isosferico $\overline{\mathfrak{I}} = \overline{I}_G$ considerato nell'Ass.* 22.2 *e dirò galileiana ogni metrica associata a tali riferimenti e concernente il cronotopo, o una sua sezione spaziale, o uno spazio inerziale.*

DEFINIZIONE 22.3 – *a) Per* $\langle \overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \rangle \in \Delta$ e per $x, v \in \mathfrak{S}_3$ e $x^2 > 0$, *dirò che la terna* $f = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ *è la forza riferita all'insieme galileiano isometrico (isometrico orientato)* $\mathfrak{I}$ *e al campione* M' *per l'unità di massa, dovuta* [11]) *allo stato fisico passivo* $\overline{\Pi}$, *a quello attivo* $\overline{\Pi}_1$, *al divario* x *di posizione e a quello* v *di velocità, se, ripresa la terna di funzioni* $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ *introdotta nell'Ass.* 22.2 (22.$\overline{2}$) *in corrispondenza di* $\mathfrak{I}$ *e* M', *è* $f_i = \mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \mid x \mid v)$ *per* $i = 1, 2, 3$. *Userò le notazioni*

$$(50) \qquad f_i = Forz_i^{(\mathfrak{I}, M')}(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \mid x \mid v) = \mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \mid x \mid v) \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

b) Dirò poi che f *è la forza esplicata da* M_1 *su* M *all'istante* ϑ *nel CMP-caso* γ *e riferita al sistema galileiano* K *e al campione* M' *per l'unità di massa, se, oltre* (50), *si ha*

$$(51) \qquad K \in \mathfrak{I}; \qquad M, M_1, M' \in MP\,,$$

$$(52) \qquad \begin{cases} x_i = \mathrm{coord}_i^K(M_1, \vartheta, \gamma) - \mathrm{coord}_i^K(M, \vartheta, \gamma), \\ v_i - \mathrm{vel}_i^K(M_1, \vartheta, \gamma) - \mathrm{vel}_i^K(M, \vartheta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

$$(53) \qquad \overline{\Pi} = staFT(M, \vartheta, \gamma)\,, \quad \overline{\Pi}_1 = staFT(M_1, \vartheta, \gamma)\,.$$

---

[91]) Pensare la forza che un punto materiale esplica su un altro come funzione di $\overline{\Pi}$, $\overline{\Pi}_1$, x e v è conforme con l'affermazione « leggi notissime della fisica macroscopica fanno presupporre che ognuna di tali circostanze possa riuscire essenziale, comunque ognuna di esse (anche la condizione fisica) sullo schema microscopico è localizzata nei punti rappresentativi degli elementi di materia ». Tale affermazione si trova in [23] pg. 14, righe 1-5 e in essa mediante « tali circostanze » ci si riferisce appunto alla mutua posizione dei detti elementi di materia, alla loro costituzione e condizione fisica e magari ai loro divari di velocità — v. pg. 13, in fondo.

In tal caso userò le notazioni

$$f_i = f_i^{(K,M')} = \mathrm{forz}_i^{(K,M')}(M, M_1, \vartheta, \gamma) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{54}$$

Si osservi che a causa delle trasformazioni (34) il primo membro di (49) rimane invariato sostituendo a K un qualunque riferimento H con gli assi paralleli e concordi a quelli di K (ed eventualmente non solidale con K). Dopo ciò è facile riconoscere che per l'Ass. 22.2 o (22.$\overline{2}$) — in particolare la Cond. 22.2 — e la Def. 22.3, vale il seguente teorema traducente sia la legge fondamentale della meccanica che il principio del parallelogramma.

TEOREMA 22.1 – *Nel CMP-caso γ, all'istante ϑ, gli $n+1$ punti materiali $M, M_1, \ldots, M_n$ costituiscano un sistema isolato, M sia non sovrapposto a M_1, o $M_2, \ldots$, o M_n e possieda un'accelerazione. Allora è*

$$\mathrm{mass}_{M'}(M)\,\mathrm{accel}^K(M, \vartheta, \gamma) = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{forz}^{(K,M')}(M, M_2, \vartheta, \gamma). \tag{55}$$

Si può dimostrare facilmente anche il seguente teorema quando si tenga conto, da un lato, delle formule di trasformazione (34) e (36) e, dall'altro, dell'unicità della terna di funzioni $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ soddisfacente le condizioni 22.1 e 22.2 in corrispondenza ad un M' e un $\mathfrak{I}$ prefissati comunque, purchè sia $M' \in PM$ e $\mathfrak{I}$ sia isometrico (orientato) e galileiano.

TEOREMA 22.2 – *Le relazioni* (50), (51), (52), (53) *e* $(54)_1$, *oppure le* $(51)_1$ *e* (54), *valgano sia per* $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1$ *e* $K = K_1$, *che per* $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_2$ *e* $K = K_2$. K_1 *e* K_2 *siano riferimenti galileani legati dalle* (34). *Inoltre sia*

$$\mu = \mathrm{mass}_{M''}(M'). \tag{56}$$

Allora è

$$f_i^{(K_2,M'')} = \mu \mid \lambda \mid \tau^{-2} \sum_{j=1}^{n^3} \alpha_{ij} f_j^{(K_1,M')} \tag{57}$$

e in particolare

$$\mid f^{(K_2,M'')} \mid = \mu \mid \lambda \mid \tau^{-2} \mid f^{(K_1,M')} \mid. \tag{58}$$

23. Conseguenze tratte dai precedenti assiomi. Sul principio di azione e reazione in $\mathcal{E}_1$.

Osserviamo che sia nella teoria $\mathcal{E}_1$ che nella $\overline{\mathcal{E}}_1$ — ottenuta da $\mathcal{E}_1$ sostituendo agli assiomi 20.1 e 22.2 quelli meno restrittivi $20.\overline{1}$ e $22.\overline{2}$ — la funzione di forza introdotta in (50) è determinata da

$$(59) \qquad \mathcal{F}_i^{(\mathcal{J},\mathcal{M}')}(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, r, p. \nu) = \mathrm{Forz}_i^{(\mathcal{J},\mathcal{M}')}(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, r, 0, 0, p, \nu, 0) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

definita per $\langle \overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \rangle \in \Delta$, $r > 0$, $\nu > 0$ e $-\infty < p < +\infty$.

Si osservi ora che posto $x_1 = r$, $v_1 = p$ e $v_2 = \nu$, r, p e ν restano invariate per la trasformazione

$$(60) \qquad y_1 = x_1\,, \quad y_2 = x_2\,, \quad y_3 = -x_3\,, \quad y_4 = x_4$$

fra H e K, mentre per essa è $f_3^{(K,\mathcal{M}')} = -f_3^{(H,\mathcal{M}')}$. Se $H \in \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J} \subset \overline{I}_G$ e $\mathfrak{J}$ è isometrico, di conseguenza anche $K \in \mathfrak{J}$. Allora *in* $\mathcal{E}_1$, *a causa dell'Ass.* 22.2 *si ha*

$$(61) \qquad \mathrm{Forz}_3^{(\mathcal{J},\mathcal{M}')}(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, r, 0, 0, p, \nu, 0) = 0$$

per $\qquad \langle \overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \rangle \in \Delta$, $r > 0$, $\nu > 0$ e $|p| < \infty$.

In $\overline{\mathcal{E}}_1$ *il precedente ragionamento non è valido, anzi si potrebbe provare che gli assiomi di* $\overline{\mathcal{E}}_1$ *sono compatibili con la negazione di* (61).

È però facile provare che *sia in* $\mathcal{E}_1$ *che in* $\overline{\mathcal{E}}_1$ *si ha*

$$(62) \qquad \mathrm{Forz}_j^{(\mathcal{J},\mathcal{M}')}(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, r, 0, 0, p, 0, 0) = 0 \qquad (j = 2, 3)\,.$$

Sarebbe facile imporre in $\overline{\mathcal{E}}_1$ *la validità delle parti a) e b) del principio di azione e reazione che permettono di dedurre l'annullarsi del risultante e, rispettivamente, del momento risultante di un sistema*

isolato. Esse si compendiano ordinariamente nelle eguaglianze

$$\text{(63)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Forz}_i^{(\mathcal{J},\mathcal{M}')}(\overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}}, r, 0, 0, p, v, 0) = \\ &= \mathrm{Forz}_i^{(\mathcal{J},\mathcal{M}')}(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\Pi}, r, 0, 0, p, v, 0) \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

e

$$\text{(64)} \qquad \mathrm{Forz}_j^{(\mathcal{J},\mathcal{M}')}(\overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}}, r, 0, 0, p, v, 0) = 0 \qquad (j = 2, 3)\,.$$

Poichè in $\mathcal{T}_1$ vale (61), *in* $\mathcal{T}_1$ *basta ammettere che* (63) *valga per* $i = 1, 2$ e (64) *per* $j = 2$.

La detta parte *a*) del principio di azione e reazione segue però, come si può agevolmente verificare dall'assioma 20.1 di $\mathcal{T}_1$ e dalla seguente ammissione 23.1 (da sostituirsi all'assioma 22.2):

AMMISSIONE 23.1 (23.$\overline{1}$) – *Esiste un solo insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{J}}$ *tale che, per ogni insieme isometrico* (*isometrico orientato*) $\mathfrak{J} \subset \overline{\mathfrak{J}}$ *e ogni punto materiale* M, *esiste una terna di funzioni* $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ *verificante le Cond.* 22.1 *e* 22.2, *ed inoltre la seguente*

CONDIZIONE 23.1 – Se $\langle \overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \rangle \in \Delta$ [Conv. 22.1] inoltre $x, v \in \mathrm{S}_3$ con $x^2 > 0$, allora esistono due punti materiali M ed M_1, isolati all'istante ϑ e nel CMP-caso γ, ed un riferimento K soddisfacenti (45), (46), (47) e (48) per $n = 1$.

Si osservi che, grazie alle Cond. 22.2 e 23.1 la considerata terna $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ risulta unica. Dunque l'ammissione 23.1 (23.$\overline{1}$) implica l'assioma 22.2 (22.$\overline{2}$).

24. Su questioni di esistenza e di formalizzazione (logistica) concernenti la teoria $\mathcal{T}_1$.

Consideriamo i concetti base della teoria $\mathcal{T}_1$: *PE*, Ist, Preced, *PM*, *PEO*, *CMP*, e *PrF* pensati come classi (secondo il punto di vista della $\mathcal{T}_1$-*astratta*) [92]). È facile provare, sulla base degli

---

[92]) Anche la funzione *PEO* può pensarsi come una classe in quanto una funzione $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ a n argomenti può sempre considerarsi come una classe di $(n + 1)$-ple.

assiomi posti nei numeri precedenti che tali classi, eccetto *PrF*, sono tutte non vuote, e che *PE*, *PEO*, *Ist* ed *CMP* hanno la potenza del continuo.

Infatti, per l'assioma 18.2, i punti eventi sono in corrispondenza biunivoca con le quaderne di numeri reali, ossia la classe *PE* da essi costituita ha la potenza del continuo. È facile poi riconoscere che per lo stesso assioma anche la classe Preced delle coppie $\langle E_1, E_2 \rangle$ in cui E_1 precede temporalmente E_2, e quella *Ist* degli istanti secondo la Def. 17,2 — giustificata dagli assiomi 17.1 e 18.2, v. nota (75) — hanno la potenza del continuo.

Poichè per l'assioma 18.2,*b* esistono ∞^6 punti inerziali, per la definizione 18.1 di questi ultimi e l'assioma 18.1 si riconosce facilmente che *PM* non è vuota, ma anzi *CMP* e *PEO* hanno almeno la potenza del continuo.

Quanto alla classe *PrF* essa potrebbe essere vuota. Allora l'insieme Δ delle possibili coppie di stati fisici [Conv. 22.1] conterrebbe la sola [93]) coppia $\langle \Lambda, \Lambda \rangle$ con Λ insieme vuoto. Ciò è ancora compatibile con l'assioma 22.2 o $22.\overline{2}$.

Ciò — e quindi l'esser *PrF* vuota — è però in contrasto con la legge di gravitazione universale [n. 32].

* * *

Si osservi che volendo formalizzare la teoria $\mathfrak{T}_1$ non solo matematicamente ma considerandola, per es., come una teoria assiomatica, logisticamente formale e basata sulla teoria logica accennata in [5], i precedenti sette concetti meccanici base della $\mathfrak{T}_1$ esauriscono i concetti base di tale teoria, quelli matematici essendo ridotti a quelli logici.

---

[93]) Va osservato che Δ non può essere vuoto in quanto non sarebbe unico l'insieme isosferico $\overline{\mathfrak{J}}$ verificante le condizioni 22.1 e 22.2 in corrispondenza di un punto materiale M' e della terna $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \overline{\mathcal{F}_3} \rangle$ di funzioni — e ciò sarebbe in contrasto con l'assioma 22.2 o $22.\overline{2}$ —.

Mi sembra valga la pena di osservare che quando si voglia considerare la $\mathcal{T}_1$ in tal modo, l'assioma logico matematico dello infinito [94]) — che afferma l'esistenza di infiniti individui e permette quindi la definizione su basi puramente logiche dei numeri naturali e quindi di quelli reali — può con vantaggio porsi nella forma particolare seguente

ASSIOMA 24.1 – *Esistono infiniti punti materiali.*

25. Una teoria $\mathcal{T}_2$ ottenuta dalla precedente $\mathcal{T}_1$ eliminando il concetto di proprietà *PrF*.

In varie teorie [95]) appartenenti, come la $\mathcal{T}_1$, alla classe Γ_3 — nelle quali teorie, in particolare, non si assumono massa e forza come concetti primitivi — le proprietà dei punti materiali sono considerate come invariabili [96]). In tali teorie (che si possono dire puramente meccaniche) i concetti fisici primitivi sono ridotti a concetti puramente cinematici.

Mostro ora che è facile ottenere dalla $\mathcal{T}_1$ una teoria $\mathcal{T}_2$ puramente meccanica e dotata appunto della detta proprietà di riduzione.

Infatti in $\mathcal{T}_1$ le proprietà *PrF* intervengono solo a partire dal n. 22 per definire la forza, attraverso il concetto di stato fisico $\overline{\Pi} = staFT(M, \vartheta, \gamma)$ posseduto da un punto materiale M ad un istante ϑ e in un *CMP*-caso γ.

Si osservi a tale scopo che nel caso puramente meccanico, $\overline{\Pi} = staFT(M, \vartheta, \gamma)$ non dipende nè da ϑ nè da γ ed è quindi caratterizzato da una classe di punti materiali. In sostanza per passare da $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ (o da $\overline{\mathcal{T}_1}$ a $\overline{\mathcal{T}_2}$) basta accettare come concetti base i sei concetti *PE*, *Ist*, Preced, *PM*, *CMP*, *PEO*, ripetere la trattazione fatta per $\mathcal{T}_1$ ($\overline{\mathcal{T}_1}$) fino al n. 21 incluso, poi sostituire l'assioma 22.2 ($\overline{22.2}$) col seguente.

ASSIOMA 25.1 ($\overline{25.1}$) – *Esiste una sola divisione della classe*

---

[94]) Vedi [5], pg. 153, *T* 37-5.

[95]) Per es. $\mathcal{T}_{H9}$, $\mathcal{T}_{P17}$ e $\mathcal{T}_{S23}$, vedi [9], [17] e [23].

[96]) In $\mathcal{T}_{P17}$, pg. 46, riga 6, si ammette, per semplicità, che ogni elemento materiale resti identico a se stesso.

PM in sottoclassi — da chiamarsi stati fisici — tale che, detto Δ l'insieme delle coppie di tali sottoclassi, esiste un solo insieme isosferico $\overline{\mathfrak{J}}$ per cui ad ogni insieme isometrico (isometrico orientato) [97]) *$\mathfrak{J}$ appartenente ad $\overline{\mathfrak{J}}$ e ad ogni punto materiale M' corrisponde una ed una sola terna di funzioni $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ verificanti la condizione* 22.1 *e quella ottenuta dalla* 22.2 *sostituendo a* (45) *le relazioni*

$$M \in \overline{\Pi}, \qquad M_r \in \overline{\Pi}_r \qquad (r = 1, \ldots, n). \tag{65}$$

Si posson poi accettare inalterate la definizione 22.2 di riferimento galileiano e metrica galileiana, e la def. 22.3, concernente due forme del concetto di forza, salvo sostituzione di (53) con la validità di (65) per $n = 1$.

Per $\mathcal{T}_2$ ($\overline{\mathcal{T}}_2$) valgon pure i teoremi 22.1 e 22.2 e tutto ciò che nel n. 23 si riferisce a $\mathcal{T}_1$ ($\overline{\mathcal{T}}_1$).

Parte III

Sviluppi della teoria $\mathcal{T}_1$. Questioni connesse.

26. Considerazioni introduttive concernenti la Parte III.

La teoria $\mathcal{T}_1$ (come anche la $\overline{\mathcal{T}}_1$) è stata sviluppata nella seconda parte del presente lavoro in modo da raggiungere con una certa completezza gli obbiettivi principali delle teorie di classe Γ_3, cioè la definizione di massa e forza e l'enunciazione delle leggi fondamentali della meccanica; inoltre nella $\mathcal{T}_1$ è trattato completamente il problema di definire la misura dello spazio e del tempo partendo da un elenco ben determinato di concetti primitivi a struttura logica completamente precisata [98]). Insomma la fase di sviluppo della teoria $\mathcal{T}_1$ considerata nella prima parte si può considerare un compiuto esempio di applicazione del me-

---

[97]) Vale l'analogo di nota [89]).

[98]) Ricordo che tale problema è almeno parzialmente considerato da P. Painlevé in [17]. V. n. 10.

todo di assiomatizzazione presentato in questo lavoro, e ciò giustifica l'aver distinto la seconda parte dalla terza.

In questa terza parte, dapprima si mostra [n. 27] come definire nella teoria $\mathcal{T}_1$ — in relazione al generico sistema particellare isolato S, esente da vincoli — il concetto di campo di forze dipendenti dalle posizioni e velocità degli elementi di S, e dal tempo esplicito.

Nei due seguenti paragrafi (completamente indipendenti dal n. 27) si considerano rigorosi enunciati, appartenenti alla teoria $\mathcal{T}_1$ (o alla $\overline{\mathcal{T}}_1$), dei principi di omogeneità fisica del tempo e degli spazi inerziali, della isotropia fisica di questi, e della loro indistinguibilità fisica (principio di relatività galileiano); si enuncia poi il principio di determinazione in varie forme di crescente efficacia e si sottolinea la indipendenza mutua di questi principi (nelle forme considerate) e la loro indipendenza dalla legge d'inerzia (Ass. 18.2) e da quelle dinamiche (Ass. 20.1 e 22.2) [99]).

Si mostra poi come il principio di isotropia degli spazi inerziali e quello d'inerzia siano atti a risolvere rigorosamente e completamente (in $\mathcal{T}_1$) il problema della determinazione della misura dello spazio e del tempo, indipendentemente dagli altri assiomi dinamici.

Nel numero 30 si costruisce un modello matematico particolare $MM\mathcal{T}_1$ per la teoria $\mathcal{T}_1$ soddisfacente, oltre agli assiomi ufficialmente appartenenti alla $\mathcal{T}_1$, i sopra considerati principi, che nella loro forma generale, come si è detto, sono indipendenti da quegli assiomi. Inoltre tale modello $MM\mathcal{T}_1$ soddisfa condizioni enunciabili entro la $\mathcal{T}_1$-*astratta* ed esprimenti, nella *intesa interpretazione fisica*, fatti fisici o ipotesi fisiche come quella del-

---

[99]) Alcuni Autori considerano il principio di determinazione in una forma strettamente connessa col principio di omogeneità dello spazio-tempo e della isotropia dello spazio. Così fa R. Carnap in [5], dove dà versioni del principio di causalità in forma logisticamente assiomatica, basandosi su una logica estensionale e su concetti contingenti. Nella presente terza parte si precisano e si rafforzano tali versioni traendo vantaggio dall'uso dei *CMP*-casi, i quali permettono di fare affermazioni sull'insieme delle possibili evoluzioni dell'universo, affermazioni che invece non sono permesse dall'altro metodo (estensionale diretto).

l'esistenza di sistemi particellari S esenti da vincoli e soggetti ad uno dei sopra considerati campi di forze.

Insomma si dimostra la coerenza logica della teoria $\mathcal{T}_1$, e la sua compatibilità col verificarsi di fatti fisici interessanti [100]).

Tale dimostrazione di coerenza della $\mathcal{T}_1$ interessa specialmente in quanto, per poter definire compiutamente le misure dello spazio e del tempo, sono state introdotte nell'assioma dinamico 22.2 (22.$\overline{2}$) due proprietà di unicità non figuranti in analoghi enunciati di altri Autori [101]). Per es., una proprietà di unicità dello stesso tipo non si sarebbe potuta inserire nell'assioma 20.1 che permette di definire la massa.

Infine, nei nn. 32 e 33 si analizza anche la forza che un punto materiale M_1 esplica su M considerando i contributi dovuti alle varie coppie di proprietà fisiche (passive ed attive) possedute da M ed M_1 rispettivamente.

Come è detto più in disteso nella prima parte del n. 32 (avente carattere introduttivo), nel n. 32 si definiscono concetti come quello di *forza dovuta a date proprietà fisiche*, (costituenti in sostanza un raffinamento di qualche altro, considerato in note trattazioni assiomatiche).

Si indicano poi due modi di trattare le leggi fisiche particolari considerando come esempi quella di gravitazione e la legge elettrostatica di Coulomb. Il primo non involge alcun assioma semplificativo preliminare, il secondo ne involge uno [102]).

---

[100]) Se costruendo una teoria fisica assiomatica $\mathcal{T}$ non si tien conto in alcun modo dell'opportunità di verificare la sua coerenza logica, può, per es., accadere che in tale teoria risulterebbe contradditorio considerare certi moti che si volevano invece includere tra quelli da essa trattati — v. [2], n. 2, nota [5]) —, nè è improbabile di porre degli assiomi che non solo possano esser considerati come restrittivi di fronte alle ordinarie teorie meccaniche non assiomatiche, ma siano anche incompatibili col verificarsi di comunissimi fatti fisici — v. nota [49]) —. Circa l'opportunità di verificare la coerenza logica della $\mathcal{T}_1$, vedi anche la nota [118]) al n. 30.

[101]) Per es., gli assiomi di $\mathcal{T}_{P17}$ non permettono di determinare tali misure.

[102]) I nn. 32 e 33 sono scritti in modo che, ad eccezione della parte centrale del n. 32 e dell'ultima del n. 33, concernenti questioni di com-

27. Su campi di forza interni, dipendenti dal tempo e agenti su sistemi isolati.

La prossima definizione 27.2 di campo di forza si applica a sistemi meccanici isolati costituiti da particelle libere. Mediante tali sistemi si può schematizzare il sistema solare (considerato isolato) e anche, per es., un sistema di corpi puntiformi dotati di cariche elettriche che decrescono indipendentemente dal moto delle cariche, con legge nota e dipendente solo dalla carica attuale e dalle proprietà di isolamento.

Ho preferito porre la definizione in discorso riferendomi ad un caso abbastanza generale e in modo esplicitamente conforme ai principi di omogeneità fisica del cronotopo, dell'isotropia fisica delle sue sezioni spaziali e di relatività galileiana, non ostante questo l'abbia resa più complessa [103]).

DEFINIZIONE 27.1 – *a*) *Le* $3n$ *funzioni reali* $\underset{r}{x_i} = \varphi_{ri}(t)$ $(i = 1, 2, 3;\ r = 1, \dots, n)$ *sian definite in un intervallo numerico* V *di origine* t' *e estremo destro* t'', *potendo esser* $t'' = +\infty$. *Posto*

$$(66) \qquad \Delta = \Delta(t) = \min_{1 \leqslant r < s \leqslant n} [(\underset{s}{x_1} - \underset{r}{x_1})^2 + (\underset{s}{x_2} - \underset{r}{x_2})^2 + (\underset{s}{x_3} - \underset{r}{x_3})^2],$$

si dirà che le φ_{rs} *presentano una sovrapposizione in* t *se è*

$$\Delta(t) = 0 \quad \text{per} \quad \underset{r}{x_i} = \varphi_{ri}(t) \quad (r = 1, \dots, n;\ i = 1, 2, 3),$$

ossia se, per $r \neq s$ ed $r, s = 1, \dots, n$, non si ha

$$\underset{r}{x_i} = \underset{s}{x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

b) *Supponiamo ora che sia* $\Delta(t) \neq 0$ *per* $t \in V$, *inoltre o sia*

---

patibilità e indipendenza logica, essi risultano indipendenti da tutti gli altri numeri della parte III.

[103]) Nella definizione 27.2 di campo di forze CF (oltre a tener conto esplicitamente dei suddetti principi) si evitano ipotesi semplificative, quali, per es., quella che il campo sia determinato ad ogni istante o che i punti materiali siano eterni.

$t'' = +\infty$, o il minimo limite di $\Delta(t)$ per t tendente a t'' da sinistra sia nullo, cioè

$$\varliminf_{t \to t''} \Delta(t) = 0 \,. \tag{67}$$

Allora si dirà che le $\varphi_{ri}(t)$ $(i = 1, 2, 3;\ r = 1, \dots, n)$ rappresentano un massimo moto esente da sovrapposizioni.

c) Se infine per $t = t'$ esistono le derivate prime destre delle φ_{ri}, diremo origine del moto rappresentato dalle φ_{ri} in V, la $(6n + 1)$-pla

$$Q' = \langle \varphi_{11}(t'), \varphi_{12}(t'), \varphi_{13}(t'), \dots \varphi_{n3}(t'),$$
$$\varphi'_{11}(t'), \dots, \varphi'_{n1}(t'), \varphi'_{n2}(t'), \varphi'_{n3}(t'), t' \rangle \,.$$

Definisco ora sistema isolato soggetto al campo CF di forze interne e dipendenti dalla configurazione, dall'atto di moto e dal tempo.

DEFINIZIONE 27.2 – *$\mathfrak{J}$ sia un insieme isometrico orientato galileiano, M' un punto materiale da assumersi di massa unitaria e δ un segmento numerico reale, di estremi t'_δ e t''_δ eventualmente infiniti.*

Le funzioni reali

$$\begin{aligned} f_{ri} &= F_{ri}(\underset{1}{x} \mid \dots \mid \underset{n}{x} \mid \underset{1}{v} \mid \dots \mid \underset{n}{v} \mid t) = \\ &= F_{ri}(\underset{1}{x_1}, \underset{1}{x_2}, \underset{1}{x_3}, \dots, \underset{n}{v_1}, \underset{n}{v_2}, \underset{n}{v_3}, t) \quad (i=1, 2, 3;\ r=1,\dots, n) \end{aligned} \tag{68}$$

sian definite almeno nella regione $\mathfrak{R}_{6n+1}$ contenente ogni punto $\langle \underset{1}{x} \mid \dots \mid \underset{n}{v} \mid t \rangle$ che non presenti una sovrapposizione ossia che non annulli il Δ dato da (66), *e non contenente altri punti. Le funzioni* (68) *sian regolari in $\mathfrak{R}_{6n+1}$* (per es., in ogni porzione chiusa e limitata di $\mathfrak{R}_{6n+1}$ esse siano limitate, sommabili rispetto a t, e magari uniformemente lipschitziane rispetto a $\underset{1}{x}, \dots, \underset{n}{x}, \underset{1}{v}, \dots, \underset{n}{v}$).

Inoltre $\overline{p}_1(t), \dots, \overline{p}_n(t)$ siano n classi di proprietà PrF definite per $t \in \delta$ e soddisfacenti le seguenti tre condizioni:

CONDIZIONE 27.1 (concernente un nesso di necessità riferentesi alla forza) – Se $K \in \mathfrak{J}$, $t \in \delta$ e nel CMP-caso γ, all'istante θ^K_t,

i punti materiali $M_1, \ldots, M_n$ non presentano sovrapposizioni, sono isolati e dotati di accelerazioni, infine possiedono rispettivamente le proprietà contenute in $\overline{p}_1(t), \ldots, \overline{p}_n(t)$, ossia è

$$(69) \qquad \overline{p}_r(t) \subset staFT(M_r, \Theta_t^K, \gamma) \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

[del 22.1], allora

$$(70) \qquad \mathrm{mass}_{M'}(M_r)\, \mathrm{accel}_t^K(M_r, \Theta_t^K, \gamma) = f_{ri} \qquad (i = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, n),$$

valendo (68) ed essendosi posto [n. 19]

$$(71) \quad \underset{r}{x} = \mathrm{pos}(M_r, \Theta_t^K, \gamma),\ \underset{r}{v} = \mathrm{vel}^{(+0)K}(M_r, \Theta_t^K, \gamma)\ (r=1,\ldots, n).$$

CONDIZIONE 27.2 (concernente proprietà di possibilità) – Esistono n punti materiali $M_1, \ldots, M_n$, un $K \in \mathfrak{J}$ ed un CMP-caso γ_0 per cui (69) vale per $\gamma = \gamma_0$ e per ogni $t \in \delta$. Se poi $M_1, \ldots, M_n$ soddisfano (69) per particolari valori di K, γ e t, allora qualunque siano $t \in \delta$, $K \in \mathfrak{J}$ ed il punto $\langle \underset{1}{x} \mid \ldots \mid \underset{n}{v} \mid t \rangle$ di $\mathfrak{R}_{6n+1}$, esiste un CMP-caso γ, verificante (69) e (71), nel quale γ, all'istante Θ_t^K, $M_1, \ldots, M_n$ costituiscono un sistema isolato.

CONDIZIONE 27.3 (concernente una proprietà di permanenza) – Se $K \in \mathfrak{J}$, $t_1 \in \delta$ e nel CMP-caso γ (all'istante $\Theta_{t_1}^K$) $M_1, \ldots, M_n$ sono n punti materiali isolati verificanti (69) per $t = t_1$, di conseguenza, (69) vale per ogni t con $t \in \delta$ e $t > t_1$.

In tali ipotesi si dirà che l'n-pla $\langle \overline{p}_1(t), \ldots, \overline{p}_n(t) \rangle$ (di classi di proprietà PrF), *definita per $t \in \delta$, è atta a caratterizzare* (o determinare) *un campo di forze dipendenti anche dal tempo, e rappresentato dalle* (68) *rispetto all'insieme isometrico orientato* $\mathfrak{J}$ *e al campione M' per l'unità di massa* (la classe di tali n-ple verrà talvolta indicata con NDC).

Sia poi $K \in \mathfrak{J}$. Allora può dirsi un campo di forza dipendente dal tempo (nel senso della teoria $\mathfrak{T}_1$) *la proprietà, o meglio la relazione CF che per definizione vale per i punti materiali $M_1, \ldots, M_n$, l'istante ϑ e il CMP-caso γ se e solo se, per un $t \in \delta$, è $\vartheta = \Theta_t^K$*

ed il punto $\langle \underset{1}{x} \mid \ldots \mid \underset{n}{v} \mid t \rangle$, *definito da* (71), *è interno a* $\mathfrak{R}_{6n+1}$, *inoltre vale* (69) *e, all'istante* ϑ *ed in* γ, $M_1, \ldots, M_n$ *costituiscono un sistema isolato.*

Si dirà anche che *il campo CF* (di forze interne) *è rappresentato da* (68) *in* $\mathfrak{R}_{6n+1}$, *riferendosi al sistema K.*

Naturalmente si dirà pure che $M_1, \ldots, M_n$ *son soggetti al campo CF all'istante* ϑ *e nel CMP-caso* γ, *se la proprietà CF vale per* $M_1, \ldots, M_n$, ϑ *e* γ.

Se poi ciò accade per $\vartheta = \Theta_t^K$ qualunque sia $t \in \delta$, si dirà che $M_1, \ldots, M_n$ *son soggetti al campo CF nel CMP-caso* γ.

Come è facile dimostrare basandosi sull'assioma dinamico $22.\overline{2}$, *le funzioni* (68) devono essere *invarianti per trasformazioni spaziali isometriche* ed *equiverse*; quindi si può dire che *esse sono, atte a rappresentare un campo di forza riferendosi all'insieme isometrico orientato* $\mathfrak{I}$.

È pure facile riconoscere che i campi di forza caratterizzati dalle funzioni $\overline{p}_1(t), \ldots, \overline{p}_n(t)$, definite per $t \in \delta$, sono al più ∞^1 e si ottengono l'uno dall'altro mediante una traslazione temporale.

DEFINIZIONE 27.3 – *Le* (68) *rappresentino il campo CF di forze interne, rispetto al riferimento galileiano K.*

Si dirà che le funzioni reali $\varphi_{ri}(t)$ $(i = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, n)$, *definite in un intervallo numerico V, rappresentano in K un moto naturale* (*o fisicamente*) *compatibile col campo CF se esiste un CMP-caso* γ *in cui n punti materiali* $M_1, \ldots, M_n$ *son soggetti a CF ad ogni istante* Θ_t^K *con* $t \in V$, *inoltre è*

$$(72) \qquad \underset{r}{x_i} = \varphi_{ri}(t) = \mathrm{coord}_i^K\,(M_r, \Theta_t^K, \gamma) \quad \text{per} \quad t \in V \qquad (i = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, n).$$

Si osservi che in base alle condizioni 27.2,3 della def. 27.2 e all'assioma 19.1, *se il precedente campo CF è rappresentato in K dalle funzioni* (68), *date in* $\mathfrak{R}_{6n+1}$, *ed il punto* $Q = \langle \underset{1}{x} \mid \ldots \mid \underset{n}{v} \mid t \rangle$ *è interno a* $\mathfrak{R}_{6n+1}$ *allora esistono delle funzioni* $\varphi_{ri}(t)$ *definite in un intervallo V e rappresentanti nel riferimento K un moto naturale compatibile con CF, anzi un massimo moto esente da sovrappo-*

sizioni [def. 27.1] *e fisicamente compatibile con CF.* Inoltre, per l'assioma 19.1, *c*), *b*) *le* $\varphi'_{ri}(t)$ *sono assolutamente continue in tutto* V.

TEOREMA 27.1 – *Le funzioni* (68) *rappresentino* (in $\mathcal{R}_{6n+1}$ *e*) *nel riferimento galileiano* K, *il campo CF di forze interne. Considerato in* $\mathcal{R}_{6n+1}$ *il sistema differenziale ordinario*

$$(73)\qquad \frac{d^2 \underset{r}{x_1}}{dt^2} = \frac{1}{\mathrm{mass}_{M'}(M_r)} F_{ri}\left(\underset{r}{x_1}, \ldots, \underset{n}{x_3}, \frac{d\underset{1}{x_1}}{dt}, \frac{d\underset{1}{x_2}}{dt}, \frac{d\underset{1}{x_3}}{dt}, \ldots, \frac{d\underset{n}{x_3}}{dt}, t\right)$$

$$(i = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, n)$$

(ove è $M' \in PM$), *valgono le seguenti tesi*:

a) *Se le funzioni* $\varphi_{ri}(t)$ *definite per* $t \in V_\varphi$ *rappresentano nel riferimento* K *un moto* (*naturale*) *compatibile col campo CF, allora la derivata prima di* $\varphi_{ri}(t)$ *è somma di una funzione dei salti a variazione limitata* — Vedi [25], Def. 13 a pg. 92 — *ed una assolutamente continua in ogni intervallo finito, inoltre tali funzioni risolvono quasi ovunque il sistema differenziale* (73).

b) *Al sistema differenziale* (73) *sia applicabile in* $\mathcal{R}_{6n+1}$, *per es., il teorema di unicità di Caratheodory* [104]) — V. [21], § 8 — *inoltre tale sistema sia risolto quasi ovunque dalle funzioni* $\psi_{ri}(t)$ $(i = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, n)$, *definite in un intervallo* V_ψ *di origine* $\bar{t}$, *ed assolutamente continue con le loro derivate prime in ogni parte limitata di* V_ψ. *In* V_ψ *le* ψ_{ri} *non presentino poi sovrapposizioni* [def. 27.1, *a*]. *Allora tali funzioni rappresentano nel riferimento* K *un moto naturale compatibile col campo CF di forze.*

Infatti il campo CF sia rappresentato nel riferimento galileiano K dalle funzioni (68) definite in $\mathcal{R}_{6n+1}$. Le funzioni $\varphi_{ri}(t)$ $(i = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, n)$, definite per $t \in V_\varphi$, rappresentino nel riferimento galileaino K un moto naturale compatibile con il campo CF [Def. 27.3]. Allora per le definizioni di velocità ed accelerazione,

---

[104]) Tale teorema è applicabile se le funzioni (68) sono regolari come è detto nella definizione 27.2, a titolo di esempio.

e per l'assioma 19.1 *b*) di regolarità, segue che per $r = 1, \ldots, n$ ed $i = 1, 2, 3$, $\varphi''_{ri}(t)$ esiste quasi ovunque in V_φ ed è sommabile in ogni porzione limitata di V. Per la def. 27.2 di campo CF — in particolare per la Cond. 27.1, anzi la formula (70) — le $\varphi_{ri}(t)$ risolvono il sistema differenziale (73) quasi ovunque in V_φ. Ormai basta tener conto dell'assioma 19.1 *b*) per completare la dimostrazione della tesi *a*).

Per provare la tesi *b*) si ammettano le ipotesi fatte in *b*) sulla soluzione $\{\psi_{ri}(t)\}$ di (73), definita in V_ψ. Come si è osservato prima del teorema 27.1, esistono delle funzioni φ_{ri} $(r = 1, \ldots, n;$ $i = 1, 2, 3)$ definite in un certo intervallo V_φ eventualmente infinito, con le derivate prime assolutamente continue in ogni parte limitata di V_φ, e rappresentanti rispetto al riferimento K un massimo moto esente da sovrapposizioni, compatibile con CF e di origine $\overline{Q} = \langle \psi_{11}(\overline{t}) \mid \ldots \mid \dot{\psi}_{n3}(\overline{t}) \mid \overline{t} \rangle$. Quindi per $t = \overline{t}$ vale

$$\varphi_{ri}(t) = \psi_{ri}(t) \quad (r = 1, \ldots, n;\ i = 1, 2, 3). \tag{74}$$

Poichè sia le φ_{ri} che le ψ_{ri} rappresentano due massimi moti esenti da sovrapposizioni e di origine $\overline{Q}$ con $\overline{Q} \in \mathfrak{R}_{6n+1}$, detto t''_φ (t''_ψ) l'estremo destro di V_φ (V_ψ), per la def. 27.1 *b*) e (66) deve essere, ovviamente, $t''_\varphi > \overline{t}$ e $t''_\psi > \overline{t}$.

Per la tesi *a*) le φ_{ri} risolvono il sistema differenziale (73) quasi ovunque in V_φ. Per cose dette sulle φ_{ri} e sulle ψ_{ri}, la validità di (74) per $t = \overline{t}$, e infine l'ipotesi che per il sistema (73) valga un teorema di unicità, la (74) vale nella parte comune a V_φ e V_ψ. Non può essere $t''_\varphi < t''_\psi$ altrimenti per $t = t''_\varphi$ il moto $\psi_{ri}(t)$ presenterebbe una sovrapposizione contro una ipotesi; dunque $V_\psi \subseteq V_\varphi$ onde (74) vale per $t \in V_\psi$ quindi, per la def. 27.3, le funzioni ψ_{ri} rappresentano in V_ψ un moto naturale compatibile col campo CF.

c. d. d.

Si osservi che dalla tesi *a*), per la def. 27.2 — V. in particolare la Cond. 27.2 — e l'ass. 19.1, *f*) segue che le *funzioni* (68) ***devono essere abbastanza regolari affinchè per ogni punto*** $\overline{Q} \in \mathfrak{R}_{6n+1}$ ***esista***

almeno una soluzione $\{\psi_{ri}(t)\}$ *del sistema differenziale* (73) *dotata di derivate prime continue in ogni intervallo finito, e costituente un massimo moto esente da sovrapposizioni e di origine* $\overline{Q}$.

Si osservi pure che, come si deduce dalla tesi *b*), *se per il sistema differenziale* (73) *vale in* $\mathfrak{R}_{6n+1}$ *il teorema di unicità del moto, per ogni* $\overline{Q} \in \mathfrak{R}_{6n+1}$ *esiste uno ed uno solo massimo moto naturale* $\mathcal{M}_{\overline{Q}}$ *compatibile con CF, esente da sovrapposizioni e avente* $\overline{Q}$ *per origine.*

L'ultima proprietà di *CF* è conforme ad una particolare forma di determinismo usualmente ammessa in relazione a sistemi meccanici soggetti a campi di forza del tipo di *CF*. Basandosi sul determinismo fisico si è inclini ad ammettere l'unicità del detto moto naturale $\mathcal{M}_{\overline{Q}}$ anche quando per il sistema (73) non valga il detto teorema di unicità.

In casi interessanti — considerati per es. in relazione al principio dei lavori virtuali magari riferito a terne non inerziali — si ritiene di poter considerare $\mathcal{M}_{\overline{Q}}$ come fisicamente determinato, appena siano note le funzioni (68) rappresentanti *CF* in un opportuno riferimento — V. [22] —.

Va notato che però tale determinazione non è logica conseguenza del principio di determinazione della fisica classica — di cui nel prossimo numero si daranno versioni più o meno forti —.

Come sarebbe possibile dimostrare, si possono considerare campi di forze — dello stesso tipo di certi considerati in [22] — e rappresentati da funzioni (68) che rendono il sistema differenziale (73) privo del teorema di unicità e dotato di due soluzioni simmetriche aventi l'origine $\overline{Q}$ in comune fra loro ma non con altre soluzioni.

Non si può dunque ammettere in generale che $\mathcal{M}_{\overline{Q}}$ sia determinato dalle funzioni (68). Volendo ammettere anche per sistemi meccanici soggetti a tali campi una particolare forma di determinismo del tipo sopra considerato, si può pensare $\mathcal{M}_{\overline{Q}}$ determinato da $\overline{Q}$, dall'n-pla $\overline{p}_1(\overline{t}), \ldots, \overline{p}_n(\overline{t})$ caratterizzante il campo *CF* in relazione ad un opportuno riferimento galileiano K, e da altre proprietà fisiche $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_n$ possedute da $M_1, \ldots, M_n$ all'istante $\overline{t}$.

28. Possibili forme nella teoria $\mathcal{T}_1$ dei principi di omogeneità fisica dello spazio-tempo. Isotropia fisica degli spazi inerziali e loro indistinguibilità fisica.

Mi sembra interessante scrivere alcuni enunciati, possibili nella teoria $\mathcal{T}_1$, per i principi considerati nel titolo, fra l'altro perchè tale teoria, a quanto mi consta, differisce dalle precedenti in quanto appartiene alla classe Γ_3 — in particolare in essa si definiscono la massa e la forza, vedi introduzione alla 1ª parte — e allo stesso tempo $\mathcal{T}_1$ è semanticamente unitaria e di tipo completamente matematico, e poi perchè tali enunciati non hanno il carattere di meta-enunciati ma appartengono propriamente alla teoria $\mathcal{T}_1$, nel senso che sono formulati con termini definiti in $\mathcal{T}_1$ [105]).

Di solito i principi considerati nel titolo sono enunciati come canoni a cui si deve conformare ogni teoria fisica, e di parte di essi hanno tenuto conto in vario modo gli scolastici ed i copernicani ecc.. Non occorre introdurli esplicitamente nelle teorie fisiche moderne — compresa la $\mathcal{T}_1$ — però ogni modello matematico della $\mathcal{T}_1$ deve rispettarli per avere interesse fisico (i suddetti principi, al pari di quello di determinazione sono indipendenti dalle leggi della Meccanica).

Conviene premettere la seguente definizione di equivalenza fisica di corrispondenze inerziali [V. dopo Ass. 18.2], la quale definizione potrebbe essere enunciata subito dopo il n. 18:

DEFINIZIONE 28.1 – *Consideriamo le seguenti due condizioni*:

a) $M_1, \ldots, M_n$ sono n punti materiali. s è un segmento eventualmente infinito di numeri reali. Per $r = 1, \ldots, n$ e $i = 1,$

---

[105]) In particolare non si parla di invarianza delle leggi fisiche, in quanto, a rigore, va ritenuto che « legge fisica » sia ordinariamente usata come meta-locuzione, ossia serva per parlare su teorie fisiche. Infatti entro teorie fisiche non si dà di solito nè una definizione esplicita di legge fisica nè si danno criteri (esprimibili con i termini appartenenti alla teoria fisica che si vuol considerare) atti a riconoscere quando un ente sia una legge fisica.

2, 3, $\varphi_{ri}(t)$ è una funzione reale e $\overline{\Pi}_r(t)$ una classe di proprietà PrF definita per $t \in s$.

b) Esiste un CMP-caso γ tale che, in primo luogo, per $t \in s$, $M_1, \ldots, M_n$ sono isolati in γ all'istante Θ_t^K, in secondo luogo, per $r = 1, \ldots, n$ e $i = 1, 2, 3$, è $\varphi_{ri}(t) = \text{coord}_i\,(M_r, \Theta_t^K, \gamma)$, e in terzo luogo, per $r = 1, \ldots, n$ e $t \in s$, $\overline{\Pi}_r(t)$ è la classe delle proprietà PrF valide per M_r in γ e all'istante Θ_t^K.

Ebbene due corrispondenze inerziali K_1 e K_2 si diranno fisicamente equivalenti, se, scelti comunque $M_1, \ldots, M_2$ e s, le φ_{ri} e le $\overline{\Pi}_r$ ($r = 1, \ldots, n$; $i = 1, 2, 3$), la validità delle condizioni a) e b) per $K = K_1$ implica la loro validità per $K = K_2$ e viceversa.

L'omogeneità fisica (debole) dello spazio-tempo consiste nell'equivalenza fisica di una qualunque corrispondenza inerziale H, eventualmente non galileiana, a quelle isometriche e solidali con essa, e ad assi paralleli e concordi [106]).

L'isotropia fisica forte (debole) degli spazi inerziali consiste nell'equivalenza fisica di H con i riferimenti isometrici e solidali (ed anche equi-orientati) con H, che hanno poi la sua stessa origine [107]).

L'indistinguibilità fisica degli spazi inerziali — estensione del principio di relatività galileiano — consiste nell'equivalenza fisica di H con i riferimenti isometrici con H ed aventi in comune con questo gli assi spaziali (ossia i primi tre).

---

[106]) L'omogeneità fisica debole dello spazio-tempo è logicamente equivalente alla validità, per ogni spazio inerziale Σ, dell'omogeneità fisica dello spazio e di quella del tempo per un osservatore solidale con Σ. L'omogeneità fisica di Σ (del tempo) consiste nell'equivalenza fisica di H, supposto solidale con Σ, con i riferimenti isometrici e solidali con H e ottenuti da questo con una traslazione parallela (ortogonale) alle sezioni spaziali del cronotopo.

Per omogeneità fisica dello spazio si può intendere quella di tutti gli spazi inerziali.

[107]) È chiaro come definire l'isotropia dello spazio inerziale Σ rispetto al suo punto P e all'istante ϑ — o rispetto al punto evento $E_0 = E_{P,\vartheta}$ (assumendo H solidale a Σ e di origine E_0). Σ si dirà isotropo se è tale rispetto ad ogni suo punto e ad ogni istante.

In seguito, con *omogeneità fisica forte* del cronotopo si intenderà la validità di quella debole e dell'indistinguibilità fisica degli spazi inerziali.

Come si riconosce facilmente, il concetto di riferimento galileiano è l'unico di quelli sopra usati che non possa introdursi basandosi solo sugli assiomi stabiliti fino al n. 18 — anzi fino al n. 21 incluso —.

Mi sembra interessante mostrare come nella $\mathfrak{T}_1$ i riferimenti galileiani potrebbero definirsi direttamente facendo uso di ciò che si è detto nel presente numero, nei numeri 17, 18 e nel 21 — ove non figura alcun assioma —. Tale definizione andrebbe allora basata sull'assioma 22.1, concernente una proprietà di appartenenza della classe PrF, e infine sul seguente

ASSIOMA 28.1 ($28.\overline{1}$), di isotropia fisica forte (debole) dello spazio – *Esiste uno e uno solo insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{J}}$ *contenente una corrispondenza* H *fisicamente equivalente ad ogni altra* K *che appartenga* $\mathfrak{J}$, *abbia in comune con* H *l'origine* (*e anche l'orientazione*) *e infine sia isometrica e solidale con* H. [108]).

Naturalmente il precedente insieme isosferico $\overline{\mathfrak{J}}$ è detto *galileiano*. La metrica galileiana (che fisicamente coincide con quella euclidea sebbene per il modo di introdurla ne differisca concettualmente) risulta dunque determinata dal principio d'inerzia e da quello di isotropia fisica dello spazio.

L'assioma 28.1 ($28.\overline{1}$) è indipendente dal principio di omogeneità fisica forte dello spazio-tempo. Ammettendoli entrambi, segue l'isotropia fisica degli spazi inerziali. Il complesso dei detti due principi equivale al seguente

ASSIOMA 28.2 ($28.\overline{2}$) – *Esiste un solo insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{J}}$ *contenente un insieme isometrico* (*isometrico orientato*) $\mathfrak{J}$ *costituito da corrispondenze inerziali fra loro fisicamente equivalenti.*

Osservo che dopo il n. 18 e l'assioma 28.1 ($28.\overline{1}$) si possono esporre i nn. 20 e 22 — dove si definisce la massa e la forza — in forma leggermente semplificata.

---

[108]) Cfr. con la nota [114]) del paragrafo seguente.

29. Sul principio classico di determinazione.

Mi sembra interessante anche enunciare il classico principio di determinazione in una forma che da un lato è completamente indipendente, in senso logico [109]), dai principi considerati nel paragrafo precedente, dall'altro appartiene propriamente alla teoria $\mathcal{T}_1$, semanticamente unitaria e di tipo completamente matematico (si useranno tra l'altro solo concetti basati su assiomi figuranti non oltre il n. 18). Premetto la seguente

DEFINIZIONE 29.1 – *Si dirà che sussiste il determinismo relativo alla corrispondenza inerziale K e alla durata τ, nel caso seguente: Dati comunque n punti materiali $M_1, \ldots, M_n$, n terne $v_1, \ldots, v_n$ di numeri reali, $6n$ funzioni reali $\varphi^1_{ri}(t)$, $\varphi^2_{ri}(t)$ $(r = 1, \ldots, n;\ i = 1, 2, 3)$ definite* [110]) *per $-\tau \leqslant t \leqslant \tau_1$ con $0 < \tau_1 \leqslant +\infty$, e infine $2n$ classi $\overline{\Pi}^1_r(t)$, $\overline{\Pi}^2_r(t)$ $(r = 1, \ldots, n)$ di proprietà PrF, pure definite per $-\tau \leqslant t \leqslant \tau_1$, ma in modo che le uguaglianze*

$$\varphi^1_{ri} = \varphi^2_{ri}(t)\,, \quad \overline{\Pi}^1_r(t) = \overline{\Pi}^2_r(t) \quad (r = 1, \ldots, n;\ i = 1, 2, 3)$$

valgano per $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ e qualcuna di esse non valga per qualche

---

[109]) La trattazione strettamente assiomatica del principio di causalità fatta nel n. 29 può interessare in quanto integra e, mi sembra, rafforza quella fatta da R. CARNAP in [5], N. 51, pg. 211-212. Infatti in [5] il concetto di determinismo è reso mediante la relazione in x, F ed N « F *è la classe determinante della posizione* x *rispetto alla classe* N *di grandezze di stato* » — in simboli Det (F, x, N) —. Tale relazione è definita a pg. 211 in modo strettamente connesso con l'omogeneità fisica dello spazio tempo e con l'isotropia fisica dello spazio.

Si può notare che la proposizione Det (F, x, N) ha carattere (a priori) contingente. A ciò è dovuto essenzialmente quanto segue: Si adatti al caso classico (usando i concetti appartenenti alla teoria $\mathcal{T}_1$) la più forte versione (la 4°) data in [5], pg. 212, al principio di causalità. Risulta che la validità in ogni MPC-caso γ, di tale adattamento $\mathcal{A}$ pur essendo una conseguenza del principio di causalità in senso forte considerato in questo numero, è però compatibile anche con la negazione di quest'ultimo. La validità dell'adattamento $\mathcal{A}$ non segue però dall'assioma 28.2 stabilente le proprietà di omogeneità e isotropia fisiche del cronotopo.

[110]) Se si ammette che i punti materiali siano eterni, si può porre senz'altro $\tau_1 = +\infty$.

t con $0 < t < \tau_1$, *allora* (certo) *non esistono due CMP-casi* γ_1 *e* γ_2 *tali che le seguenti due condizioni su* γ, φ_{ri} *e* $\overline{\Pi}_r$ $(r = 1, \ldots, n;$ $i = 1, 2, 3)$ *sian verificate sia per* $\gamma = \gamma_1$, $\varphi_{ri} = \varphi^1_{ri}$ *e* $\overline{\Pi}_r = \overline{\Pi}^1_r$ *che per* $\gamma = \gamma_2$, $\varphi_{ri} = \varphi^2_{ri}$ *e* $\Pi = \Pi^2_r$.

a) Per $r = 1, \ldots, n$ e $-\tau \leqslant t \leqslant \tau_1$, in γ, all'istante Θ^K_t, $M_1, \ldots, M_n$ sono isolati e per M_r valgono tutte e sole le proprietà *PrF* appartenenti a $\underset{r}{\Pi}(t)$, inoltre $\varphi_{ri}(t)$ è l'i^{ma} coordinata di M_r in K per $i = 1, 2, 3$.

b) $\underset{r}{v}$ è la velocità per es. sinistra [n. 19] di M_r nel riferimento K, all'istante Θ^K_t e nel *CMP*-caso γ $(r = 1, \ldots, n)$.

Ora il principio di determinazione si può enunciare, per es.. nelle seguenti tre forme [111]) debole, media e forte:

ASSIOMA 29.1 – *Rispetto a una qualunque corrispondenza inerziale* (o riferimento galileiano) K, *sussiste il determinismo relativo alla durata* $\tau = +\infty$.

ASSIOMA 29.2 – *Il determinismo sussiste rispetto ad ogni K come sopra e ad ogni durata* $\tau > 0$.

ASSIOMA 29.3 – *Il determinismo sussiste rispetto ad ogni K come sopra e alla durata* $\tau = 0$.

In pratica l'omogeneità fisica del tempo — V. nota 106 — (o addirittura il complesso dei principi considerati nel n. 28) è essenziale per la verifica sperimentale del principio di determinazione in una delle tre forme precedenti. Si osservi che, però, per tale verifica sarebbe sufficiente che il tempo godesse di una opportuna proprietà fisica di periodicità (si intende di fronte

---

[111]) Si potrebbe dire: Rispetto a K sussiste un determinismo conforme alla concezione scolastica, se, per $\tau = 0$, vale il determinismo relativo a K e τ, nel senso della definizione ottenuta privando la def. 29.1 della condizione *b*), e magari di tutto ciò che nella def. 29.1 si dice a proposito delle proprietà $\overline{\Pi}_r$, $\overline{\Pi}^1_r$ e $\overline{\Pi}^2_r$ per $r = 1, \ldots, n$, cfr. [17] pg. 37. Come è ben noto, in realtà, tale determinismo non sussiste.

ai possibili fenomeni fisici) [112]), per es., quella considerata nella seguente definizione, la quale si potrebbe enunciare subito dopo il *n.* 18 (ove fra l'altro si son determinati i sistemi ordinari di ascisse per gli istanti, basandosi sulla legge d'inerzia).

DEFINIZIONE 29.2 – *Si dice che, rispetto alla corrispondenza inerziale H, il tempo ha periodo p di fronte ai possibili fenomeni fisici se per* $n = 1, 2, \ldots$ *H è fisicamente equivalente* (secondo la def. 28.1) *alla corrispondenza* H_p *ottenuta da H mediante la traslazione temporale np di equazioni*

$$y_i = x_i \qquad y_4 = x_4 - np \qquad (i = 1, 2, 3),$$

Per la precedente osservazione si può dire che *ha senso fisico*, oltrechè logico, *la considerata* (*mutua*) *indipendenza* del principio di inerzia — Ass. 18.1 — e dei principi di omogeneità fisica del tempo, di omogeneità fisica degli spazi inerziali, della loro isotropia fisica — Ass. 28.1 —, della loro indistinguibilità fisica e di una qualunque delle forme del principio di indeterminazione costituite dagli assiomi 29.1, 2, 3 [113]).

In $\mathcal{C}_1$ per *principio di causalità in senso debole, medio e forte* può intendersi la validità dell'assioma 28.2 con aggiunto l'assioma 29.1, 2, 3 ordinatamente.

Si può poi chiamare *forma copernicana del principio di causalità* la validità degli assiomi 28.2 e 29.3 opportunamente limitata ad uno spazio inerziale Σ (quello solidale con le stelle fisse) [114]).

---

[112]) Si potrebbe dire, forse meno propriamente, che basterebbe la periodicità delle leggi fisiche rispetto al tempo — periodicità che per la reale omogeneità del tempo sussiste banalmente, con ogni periodo —.

[113]) Mi sembra che ciò sia una precisazione (e generalizzazione) di ciò di cui parla P. Painlevé in [17], pg. 51, righe 8-21. Cfr. anche nota [109]).

[114]) V. [17] pg. 46. P. PAINLEVÉ non intende presupporre nell'enunciato del principio di causalità (in forma copernicana) le nozioni di misura (metodo di misura) del tempo e dello spazio. Infatti egli scrive « Il est possible d'adopter une fois pour toutes et pour tous les phénomènes une mesure des longueur et une mesure du temps telle que le principe de causalité soit vrai toujours et partout ». [17], pg. 11 righe 5-2 dal basso.

A questo proposito conviene ricordare che tale Autore non presup-

30. Un modello matematico particolare per la teoria $\mathcal{T}_1$.

È utile assicurarsi che gli assiomi di $\mathcal{T}_1$ siano compatibili in casi non banali [115]), anzi, in particolare, che essi siano compatibili anche con certi fatti fisici esprimibili in $\mathcal{T}_1$ ma che non seguono dagli assiomi di $\mathcal{T}_1$ [116]). Per questo basta dotare la teoria $\mathcal{T}_1$ di un particolare modello matematico $MM\mathcal{T}_1$ [117]).

A tale scopo interpretiamo punto-evento (ovvero PE) come l'insieme $\mathcal{S}_4$ delle quaderne di numeri reali, $\langle x_1, \ldots, x_4 \rangle$, istante (ovvero Ist) come la famiglia degli iperpiani ortogonali al quarto asse di $\mathcal{S}_4$ (considerato, nel modo ordinario come uno spazio euclideo), la relazione di precedenza temporale (ovvero Preced) come la classe delle coppie $\langle\langle x_1, \ldots, x_4 \rangle, \langle y_1, \ldots, y_4 \rangle\rangle$ di punti di $\mathcal{S}_4$ per cui è $x_4 < y_4$, e infine punto materiale (ovvero PM) come l'insieme delle coppie $\langle r, m \rangle$ — da indicarsi con M_r^m — con m razionale positivo ed $r = 1, 2, \ldots$ (Considererò M_r^m come l'r-mo punto materiale avente m per massa relativa al campione M_1^1).

Assumiamo ogni punto $\langle x_1, \ldots, x_4 \rangle$ di $\mathcal{S}_4$ come quaderna di coordinate di sè stesso in un sistema galileiano che indicheremo con K_0. Tale assunzione determina, nel modello $MM\mathcal{T}_1$ in co-

---

pone la detta nozione nemmeno nell'enunciato complessivo e definitivo (avente, mi sembra, forma modale) delle leggi della meccanica [Passo 10.2].

[115]) Per es., per teorie trattanti sistemi continui, sarebbe banale il caso in cui non esista nel cronotopo nemmeno un piccolo ellissoide quadridimensionale $\mathcal{E}$ pieno di materia in moto regolare (ossia tale che la materia abbia velocità e accelerazione continue in ogni punto di $\mathcal{E}$, e, magari effettivamente variabili). Cfr. nota [49]).

[116]) Come si vedrà in seguito, uno di questi fatti fisici esprimibili in $\mathcal{T}_2$ è per es. l'esistenza di proprietà fisiche — da interpretarsi, per es., come possesso di cariche elettriche — che diano luogo a una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

[117]) Si tratta naturalmente di dare una opportuna interpretazione matematica alle costanti assiomatiche primitive di $\mathcal{T}_1$, in modo che vengano soddisfatti gli assiomi di tale teoria. Ora si interpreteranno matematicamente i sette simboli $PE, \ldots, CMP$ esprimenti i concetti base della teoria $\mathcal{T}_1$ descrittiva (informale).

struzione, tutti i sistemi galileiani ed anche quelli inerziali (affini) [118]).

Per fissare un criterio intuitivo nella costruzione del cercato modello si potrebbe considerare il caso in cui i punti materiali sian soggetti solo alla forza gravitazionale e a quella dovuta a cariche elettriche di ν tipi, o quello in cui, inoltre, i vari tipi di cariche interagiscano fra loro. (In alcuni fenomeni elettromagnetici, si può pensare appunto ad una interazione fra masse magnetiche e cariche elettriche).

Per $\nu = 1$ si avrebbe, come caso particolare, una teoria che tien conto delle attrazioni newtoniane e coulombiane ed è valida con buona approssimazione per basse velocità mutue dei punti materiali.

Considererò una generalizzazione del precedente caso (quello con $\nu \geqslant 1$) dipendente da funzioni arbitrarie, nella quale, *in alcuni CMP-casi le forze variano col tempo e possono non soddisfare completamente il principio di azione e reazione*, e *sono tali da verificare gli assiomi di* $\overline{\mathcal{T}}_1$ (in un caso non banale) *e non quelli di* $\mathcal{T}_1$.

A tale scopo si consideri per $i = 0, 1, \ldots, \nu$ un *insieme* I_i *di numeri reali, contenente almeno due elementi.* I_0 *contenga solo numeri positivi.* Penserò I_i come campo di variabilità della carica e_i di i-mo tipo, indicherò con m la generica massa e assumerò $m = e_0$. Considererò pure il prodotto cartesiano — v. nota (71) al n. 15 —

$$I = I_0 \times I_1 \times \ldots \times I_\nu . \tag{75}$$

Per avere un criterio intuitivo che faciliti la costruzione del

---

[118]) La costruzione del modello $MM\mathcal{T}_1$ è utile anche perchè

a) permette di interpretare campi di forze dipendenti dal tempo

b) mostra la compatibilità di certe condizioni di unicità insite in assiomi dinamici della teoria $\mathcal{T}_1$. Ciò non è affatto banale. Infatti non si potrebbe per es. includere nell'assioma 20.1 una condizione di unicità analoga a quella insita nell'assioma 22.1 dicendo, per es.: *Esiste un solo insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{J}}$ *a cui corrisponda una funzione* $\mu(M) > o$ $(M \in PM)$ *verificante le condizioni a) e b) dell'assioma* 20.1 *per ogni* $K \in \overline{\mathfrak{J}}$.

modello $MM\mathcal{T}_1$ penserò che per

$$(76)\quad e_i, \eta_i \in I_i \ (i = 1, \dots, \nu);\ \boldsymbol{e} = \langle e_0, \dots, e_\nu \rangle,\ \boldsymbol{\eta} = \langle \eta_0, \dots, \eta_\nu \rangle,$$

il possesso della carica e_i di tipo i-mo costituisca la generica *proprietà dinamica elementare*, nel senso che la forza che M_h subisce da parte di M_k in corrispondenza al divario x di posizione ($x^2 > 0$) a quello v di velocità e ai rispettivi stati fisici attuali $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Pi}_1$ di M e M_1, dipende da $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Pi}_1$ solo tramite le proprietà (dinamiche elementari) di M e M_1, caratterizzate da $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\eta}$ rispettivamente.

Dirò *stato dinamico totale* (*caratterizzato da* $\boldsymbol{e}$) il possesso (simultaneo) delle cariche $e_0, \dots, e_\nu$, dei rispettivi tipi $0^{m0}, \dots, \nu^{m0}$. Più precisamente penserò che *rispetto all'insieme isometrico orientato* $I^*_{K_0}$ *e al campione* M^1_1 *per l'unità di massa, la forza obbedisca ad una legge del tipo*

$$(77)\quad \mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, r, 0, 0, v_1, v_2, 0) = F_i(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}, r, 0, 0, v_1, v_2, 0) = \\ = \sum_{\alpha\beta=0}^{\nu} e_\alpha \eta_\beta f_{\alpha,\beta,i}(r, v_1, v_2) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ove, in primo luogo, la funzione

$$(78)\qquad \Phi_i(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}, r, v_1, v_2) = \sum_{\alpha\beta=0}^{\nu} e_\alpha \eta_\beta f_{\alpha,\beta,i}(r, v_1, v_2) \qquad i = 1, 2, 3$$

è definita per $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta} \in I$ — vedi (75) e (76) —, per $r > 0$, $v_2 > 0$ *e per* v_1 *numero reale qualunque, e in secondo luogo, son soddisfatte le seguenti cinque condizioni*:

CONDIZIONE 30.1 – Per $r > 0$, $v_2 > 0$, $|v_1| < +\infty$ è

$$(79)\quad f_{\alpha,\alpha,i}(r, v_1, v_2) = f_{\alpha,\alpha,i}(0, v_1, v_2) = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \nu;\ i = 1, 2, 3)$$

CONDIZIONE 30.2 – Le funzioni $f_{\alpha,\beta,i}(r, v_1, v_2)$ sono uniformemente lipschitziane in ogni dominio limitato appartenente a $\mathcal{S}_3$ e non intersecante il piano $r = 0$.

CONDIZIONE 30.3 (traducente — nel caso $v_2 = 0$ — una simme-

tria assiale fisica dello spazio) – È

$$f_{\alpha,\beta,j}(r, v_1, 0) = 0 \quad (j = 2, 3; \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu). \tag{80}$$

CONDIZIONE 30.4 – La parte del principio di azione e reazione concernente il risultante sussiste almeno nel caso di velocità relativa nulla ($v_1 = v_2 = 0$), ossia è

$$f_{\alpha\beta 1}(r, 0, 0) = f_{\beta\alpha 1}(r, 0, 0) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu)\,. \tag{81}$$

CONDIZIONE 30.5 – Per $\alpha = 0, 1, \ldots, \nu$ si possono scegliere $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}, a_1$ ed ε e con $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta} \in I$, ed $\varepsilon > 0$ in modo che sia

$$\Phi_1(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}, a_2, 0, 0) \neq (a_2/a_1)\Phi_1(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}, a_1\, 0, 0) \text{ per } a_1 < a_2 < a_1 + \varepsilon. \tag{82}$$

Si osservi che la condizione 30.3 è necessaria per la validità della seguente

CONDIZIONE 30.6. – Il vettore $F_i(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}, |x|v)$ $(i = 1, 2, 3)$ verificante (77), come funzione di x e v è debolmente isotropo [119]).

* * *

Sia $\mu_n = \langle M_1, \ldots, M_n \rangle$ la generica n-pla di elementi distinti tratti dal precedente sistema $\{M_r^m\}$ $(r = 1, 2, \ldots; m > 0)$ e sia m_i la massa di M_i (relativa a M_1^1) per $i = 1, \ldots, n$. Sia poi, per ogni t reale,

$$\boldsymbol{\eta}_h(t) = \langle m_h, \eta_{h1}(t), \ldots, \eta_{h\nu}(t) \rangle\,, \qquad \boldsymbol{\eta}_h(t) \in I \quad (h = 1, \ldots, \nu)\,. \tag{83}$$

---

[119]) Che $X_i = F_i(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}\,|x|v)$ $(i = 1, 2, 3)$ sia fortemente (debolmente) isotropo come funzione di x e v significa che, per ogni matrice ortogonale $\|\alpha_{ij}\|$ di terz'ordine e col determinante $= 1$ $(= \pm 1)$, posto

$$\bar{x}_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ji}\, x_i, \; \bar{v}_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ji}\, v_i \qquad \text{e } \overline{X}_i = F\;(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}\,|\,\bar{x}\,|\,\bar{v}) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

si ha $\overline{X}_j = \sum_{i=}^3 \alpha_{ji}\, X_i$ $(j = 1, 2, 3)$.

ove, per ogni $h = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, \nu$, $\eta_{hk}(t)$ *è la generica funzione reale definita per ogni t reale, sommabile secondo Lebesgue, limitata in ogni intervallo limitato e verificante appunto* (83).

$\{\varphi_{hi}(t)\}$ $(h = 1, \ldots, n;\ i = 1, 2, 3)$ *sia un sistema di funzioni assolutamente continue con le derivate prime in ogni intervallo finito contenuto nell'intervallo* $\mathfrak{J}_\varphi$, *eventualmente infinito, dove detto sistema è definito. Questo risolva poi quasi ovunque il sistema differenziale*

$$(84)\quad m_h\ddot{\varphi}_{hi}(t) = \sum_{k=1}^{n} F_k[\boldsymbol{\eta}_h(t), \boldsymbol{\eta}_k(t) \mid \varphi_k(t) - \varphi_h(t) \mid \dot{\varphi}_k(t) - \dot{\varphi}_h(t)) \qquad (i = 1, 2, 3;\ h = 1, \ldots, n),$$

inoltre valga almeno una delle eguaglianze

$$(85)\quad \varliminf_{t \to t'} \delta(t) = 0;\ \varlimsup_{t \to t'} \mid \varphi_{hi}(t) \mid = +\infty \qquad (h=1,\ldots, n;\ i=1, 2, 3)$$

ove t è l'estremo superiore di $\mathfrak{J}_\varphi$ *e* $\delta(t)$ *è la distanza dalla frontiera di* $\mathfrak{R}_{6n+1}$ *del punto*

$$(86)\quad Q(t) = \langle\, \varphi_{11}(t), \varphi_{12}(t), \varphi_{13}(t), \ldots, \varphi_{n3}(t), \frac{d\varphi_{11}}{dt}, \ldots, \frac{d\varphi_{n3}}{dt}, t \,\rangle .$$

Noti teoremi di esistenza ed unicità di Carathèodory [120]) e una generalizzazione di Müller e Perron di un teorema di Nagumo [121]) assicurano che per ogni $\overline{Q} \in \mathfrak{R}_{6n+1}$ esiste uno ed un solo sistema $\{\varphi_{hi}(t)\}$ del tipo precedente, soddisfacente le condizioni iniziali caratterizzate da $\overline{Q}$ [122]).

Detta $\eta^*_{hk}(t)$ la funzione di t subordinata da $\eta_{hk}(t)$ su $\mathfrak{J}_\varphi$ per $h, k = 1, \ldots, n$, *assumeremo come generico CMP-caso la terna* [123])

$$(87)\qquad \gamma = \langle\langle\, M_1, \ldots, M_n \,\rangle, \{\eta^*_{hk}\}, \{\varphi_{hi}\} \,\rangle$$

---

[120]) Vedi, per es. [21], pg. 140.

[121]) Vedi [21], 3, N. 1 pg. 108-109. In particolare vedi *c*) a pg. 109, ove, come in (85), $\overline{lim}$ ($\underline{lim}$) esprime il massimo (minimo) limite.

[122]) Ossia tale che, fatta la posizione (86), per qualche $\overline{t} \in \mathfrak{J}_\varphi$, sia $Q(\overline{t}) = \overline{Q}$.

[123]) Vale la pena di osservare che se si toglie al sistema di funzioni $\{\varphi_{hi}(t)\}$ la restrizione di soddisfare il sistema differenziale (84), γ può

che dunque è determinata da $M_1, \ldots, M_n$ dalle η_{hk} e da $\overline{Q}$ ($\gamma = \gamma^{\eta,\overline{Q}}_{M_1,\ldots,M_n}$). Le φ_{hi} e $\mathfrak{J}_\varphi$ son determinati da η e $\overline{Q}$ ($\varphi_{hi} = \varphi^{\eta,\overline{Q}}_{hi}$, $\mathfrak{J}_\varphi = \mathfrak{J}^{\eta,\overline{Q}}$). Riuscirà utile anche porre $\mathfrak{J}_\varphi = \mathfrak{J}^\gamma$.

Sono già state interpretate matematicamente le costanti assiomatiche *PE*, *Ist*, Preced, *PM*, *CMP;* restano le *PEO* e *PrF*.

Assumeremo che PEO sia quella funzione con dominio in $PM \times CMP$ — V. nota (71), n. 15 — *e codominio in* $SC(PE)$ — che è la classe degli insiemi di punti eventi — *per la quale è* $E \in PEO(M, \gamma)$ *se e solo se* $E \in PE$, $M \in PM$, $\gamma \in CMP$, *e, fatta la posizione* (87), *per qualche* h *e* t *con* $h = 1, \ldots, n$ *e* $t \in \mathfrak{J}^\gamma$, *è* $M = M_h$, $E = \langle \varphi_{hi}(t), \varphi_{h2}(t), \varphi_{h3}(t), t \rangle$.

* * *

Resta da interpretare matematicamente la sola costante assiomatica *PrF* esprimente nella $\mathcal{T}_1$-*descrittiva* la classe delle proprietà fisiche non puramente cinematiche. Fra queste vi sono le proprietà dinamiche elementari e, se si vuole, anche quelle totali; inoltre ci sono le proprietà che determinano l'evoluzione di altre proprietà *PrF* nel futuro.

Per $\alpha = 0, 1, \ldots, n$ ed $e_\alpha \in I_\alpha$, sia $G^\alpha = \underset{\alpha}{\Pi}_{e_\alpha}$ la classe di terne $\langle M, \vartheta, \gamma \rangle$ con $M \in PM$, $\vartheta \in Ist$, $\gamma \in CMP$ e tali che o $\alpha = 0$ ed M ha per massa e_0, oppure $\alpha > 0$ e, fatta la posizione (87) e ripresa la corrispondenza inerziale K_0, per qualche h e t con $h = 1, \ldots, n$ e $t \in \mathfrak{J}^\gamma$ si ha

$$M = M_h, \qquad \vartheta = \Theta^{K_0}_t, \qquad e_\lambda = \eta^*_{h\lambda} \tag{88}$$

Si dirà che $\underset{\alpha}{\Pi}_{e_\alpha}$ è una *proprietà dinamica elementare* di α-mo

---

assumersi per rappresentazione della generica evoluzione che si può immaginare come compiuta da un universo μ_n di n punti materiali. In questa, $\{ \varphi_{hi}(t) \}$ rappresenta il moto di μ_n e $\{ \eta_{hk}(t) \}$ l'evoluzione delle proprietà fisiche dei suoi elementi. Quelli fra i detti sistemi $\{ \varphi_{hi} \}$ che risolvono (84) costituiscono le rappresentazioni, nel considerato modello, delle evoluzioni di un universo μ_n, fisicamente possibili.

tipo (ed ha l'intensità e_α); si indicherà poi con PDE la famiglia costituita da tali proprietà.

Per $\boldsymbol{e} \in I$ si dirà che è una *proprietà dinamica totale* (*caratterizzata da* $\boldsymbol{e}$) l'intersezione

$$(89) \qquad \Pi_{\boldsymbol{e}} = \underset{0}{\Pi}_{e_0} \cap \underset{1}{\Pi}_{e_1} \cap \ldots \cap \underset{\nu}{\Pi}_{e_\nu} \qquad \text{con } \boldsymbol{e} = \langle e_0, \ldots, e_\nu \rangle, \ \boldsymbol{e} \in I,$$

e si indicherà con PDT la classe delle proprietà dinamiche totali.

Consideriamo ora il CMP-caso

$$(90) \qquad \tilde{\gamma} = \langle \tilde{M}_1, \ldots, \tilde{M}_n \rangle, \{\tilde{\eta}^*_{h\alpha}\}, \{\varphi_{hi}\} \rangle$$

e fissiamo $\tilde{t}$ con $\tilde{t} \in \mathfrak{J}^{\tilde{\gamma}}$. Diremo *proprietà contribuente a determinare il campo di forze nel futuro* la classe p delle terne $\langle M, \Theta^{K_0}_{t_0}, \gamma \rangle$ tali che $\gamma \in CMP$ e, fatta la posizione (87), risulti $t_0 \in \mathfrak{J}^\gamma$ e $M \in M_h$ per un opportuno intero h, con $1 \leqslant h \leqslant n$, e infine sia

$$(91) \quad \eta^*_{h\alpha}(t) = \tilde{\eta}^*_{1\alpha}(t - t_0 + \tilde{t}) \text{ per ogni } t \text{ con } t \geqslant t_0 \text{ e } t \in \mathfrak{J}^\gamma \ (\alpha = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Si indicherà con $\bar{p}$ l'insieme avente p per unico elemento e con $PCDC$ la classe (descritta da p al variare di $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{t}$) delle proprietà contribuenti a determinare un campo.

Diremo poi che p è associata a M_1, $\Theta^{K_0}_{\tilde{t}}$ e $\tilde{\gamma}$.

Dato il caso γ espresso da (87), detto $p_i(t)$ l'elemento di $PCDC$ associato a M_i, $\Theta^{K_0}_{t}$ e γ per ogni $t \in \mathfrak{J}^\gamma$ ed $i = 1, \ldots, n$, si riconosce nella n-pla $\langle \bar{p}(t), \ldots, \bar{p}_n(t) \rangle$ un modello di n-pla di insiemi di proprietà fisiche definite per $t \geqslant t_0$, atta a caratterizzare secondo la def. 27.2 un campo di forze dipendente dal tempo e rappresentato dalle (68) rispetto all'insieme isometrico orientato $\Gamma^*_{K_0}$ e al campione M^1_1 per l'unità di massa.

Naturalmente, data l'intesa interpretazione fisica ai termini primitivi della $\mathfrak{T}_1$ e interpretata K_0 come un determinato particolare sistema galileiano di coordinate, le considerate n-ple modello acquistano un proprio senso fisico ben determinato. Alcune di esse, in tale interpretazione sono *fisicamente equivalenti alle corrispondenti* n-ple di proprietà fisiche atte a caratterizzare un campo di forze dipendente dal tempo. Ma le prime (le n-ple modello, fisicamente interpretate) *differiscono concet-*

tualmente dalle seconde. Infatti *la generica* $P' = \langle P_1^1, .., P_n^1 \rangle$ *delle prime n-ple è determinata per definizione dall'evoluzione dopo un istante* ϑ *delle proprietà fisiche di un universo particellare* $M_1, ..., M_n$, *tale che* M_i *possieda la proprietà* P_i^1 *all'istante* $\vartheta (i = 1, ..., n)$. Sia $P^2 = \langle P_1^2, ..., P_n^2 \rangle$ quella corrispondente a P' delle seconde n-ple (per le quali si è costruita una rappresentazione matematica). Allora per $i = 1, ..., n$ *anche* P_i^1 *vale per* M_i *all'istante* ϑ, ma *tale validità deve potersi riconoscere*, almeno in linea di principio, *con esperienze fatte non oltre l'istante* ϑ *stesso.*

Interpretiamo ora PrF come la famiglia

$$PrF_1 = PDE \cup PCDC \tag{92}$$

di classi di terne, costituita dalle proprietà dinamiche elementari e da quelle concorrenti a determinare un campo di forze nel futuro.

Se si vuole, si può anche identificare PrF con la chiusura PrF_2 di PrF rispetto all'intersezione, cosicchè PrF_2, fra l'altro, contiene la classe PDT delle proprietà dinamiche totali. Può esser comodo identificare PrF con la classe

$$PrF_3 = PrF_1 \cup PDT = PDE \cup PDT \cup PCDC\,. \tag{93}$$

Come si vedrà nel prossimo paragrafo, nella considerata interpretazione matematica, le sette costanti assiomatiche basi di $\mathcal{T}_1$ — costituenti precisamente le costanti assiomatiche primitive di $\mathcal{T}_1$ — soddisfano gli assiomi di $\overline{\mathcal{T}}_1$ e i principi considerati nei nn. 28 e 29. Esse possono non soddisfare gli assiomi di $\mathcal{T}_1$, ma questi sono soddisfatti come conseguenza di altre condizioni sulle $f_{\alpha\beta i}$, considerate nel prossimo paragrafo e compatibili con le precedenti.

31. Compatibilità della teoria $\mathcal{T}_1$ (o $\overline{\mathcal{T}}_1$) con casi fisicamente non banali.

Si osservi che nella particolare interpretazione matematica data nel paragrafo precedente alle sette costanti assiomatiche basi di $\mathcal{T}_1$ — costituenti un possibile sistema di concetti primi-

tivi per essa — queste dipendono dal prodotto cartesiano I — V. (75) — e dalle $3(\nu + 1)^2$ funzioni reali $f_{\alpha\beta i}(r, v_1, v_2)$ $(\alpha, \beta = 0, \ldots, \nu;\ i = 1, 2, 3)$, figuranti in (77) e soddisfacenti le susseguenti condizioni 30.1, 2, 3, 4, 5.

È facile riconoscere che, intendendo le sette costanti base di $\mathcal{E}_1$ $(\mathcal{E}_{1,7})$ secondo la particolare interpretazione matematica considerata, di conseguenza sono soddisfatti gli assiomi 17.1 e 17.2 corrispondenti alle def. 17.3 17.2 di punto evento e di istante, l'assioma 18.1 concernente il dominio e il codominio della funzione *PEO*, l'assioma 18.2 d'inerzia (a causa della Cond. 30.1) l'assioma 19.1 concernente proprietà (di regolarità) dei moti, e l'assioma 24.1; anzi, fino a questo punto la considerata verifica è indipendente dalle condizioni 30.3, 4, 5.

Tenendo conto delle Cond. 30.3, 4 è facile verificare l'assioma $20.\overline{1}$ il quale differisce dall'assioma 20.1 in quanto nella condizione *b*) di 20.1 non c'è l'ipotesi — da includersi invece considerando l'assioma $20.\overline{1}$ — che i punti isolati M_{r-1} e M_r abbiano la stessa velocità vettoriale.

L'assioma 20.1 è verificato se oltre le condizioni 30.1, 2, 3, 4 le funzioni $f_{\alpha\beta i}$ verificano incondizionatamente le

$$(94)\quad f_{\alpha\beta i}(r, v_1, v_2) = f_{\beta\alpha i}(r, v_1, v_2)\,, \quad f_{\alpha\beta 3}(r, v_1, v_2) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3;\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Si osservi che $(94)_1$ *traduce la validità della prima parte del principio di azione e reazione, concernente il risultante, per valori qualunque di* r, v_1, v_2, *mentre la Cond.* 30.4 *traduce la validità della detta parte solo per* $v_1 = v_2 = 0$. $(94)_2$ *rispecchia la simmetria fisica dello spazio, rispetto ad un qualunque piano* (conseguenza della isotropia fisica forte di esso).

Poichè il non verificarsi di (94) per $v_1, v_2 \neq 0$ è compatibile con le precedenti condizioni 30.1, ..., 5, è facile verificare che si *può costruire un modello non soddisfacente l'assioma* 20.1, *ma soddisfacente l'assioma* $20.\overline{1}$ *e gli altri assiomi di* $\overline{\mathcal{E}}_1$ *sopra verificati.*

Si può osservare che $(94)_2$ è conseguenza della seguente

CONDIZIONE 31.1 – Il vettore $F_i(e, \eta \mid x \mid v)$ $(i = 1, 2, 3)$ dato da (77) è fortemente isotropo come funzione di x e v [124]).

È importante notare che la parte del principio di azione e reazione relativa al momento risultante non segue da (94) *ma è tradotta da*

$$f_{\alpha\beta i}(r, v_1, v_2) = 0 \qquad (j = 2, 3;\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu). \tag{95}$$

Infine si noti incidentalmente che *affinchè il considerato modello soddisfi il principio di omogeneità forte* e *isotropia debole* [*forte*] *dello spazio-tempo basta che le funzioni* $f_{\alpha\beta i}$ *soddisfino le condizioni* 30.1, ..., 4 [*e oltre a ciò le identità* (94)], ma eventualmente non la Cond. 30.5.

Le condizioni 30.1, ..., 5 e (94) (30.1, ..., 5) permettono poi di verificare l'assioma dinamico fondamentale 22.2 (22.$\overline{2}$) come segue.

È facile verificare che, *come conseguenza delle sole condizioni* 30.1, ..., 4 e (94) [30.1, ..., 4] *esiste un insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{I}}$ *soddisfacente la seguente*

CONDIZIONE 31.2 (31.$\overline{2}$) – Per ogni insieme isometrico (isometrico orientato) $\mathfrak{I}$ appartenente ad $\overline{\mathfrak{I}}$ esiste una terna di funzioni $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ verificante le condizioni 22.1 e 22.2.

Infatti basta porre $\overline{\mathfrak{I}} = I_{K_0}$ e, fissato $\overline{\mathfrak{I}}$ come sopra è detto, determinare la precedente terna $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ mediante il vettore $\mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1 \mid x \mid v)$, fortemente isotropo rispetto ad x e v, e dato da (77) a meno della trasformazione T che fa passare da K_0 al riferimento K di $\mathfrak{I}$, tale che K_0 e K hanno la stessa origine, gli assi omologhi paralleli, e di questi almeno i primi due sono anche concordi.

Meno immediata è la dimostrazione dell'unicità del considerato insieme $\mathfrak{I}$, per la quale la condizione 30.5 è essenziale. Tale dimostrazione coinciderà con quella della prima parte del teorema 32.2.

Conviene considerare preliminarmente il seguente

TEOREMA 31.1 – *Esistono modelli verificanti le condizioni* 30.1, ..., 4, (94) *e* 31.1 (*quindi la condizione di esistenza di un insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{I}}$ *soddisfacente la Cond.* 31.2) *ma non verificanti*

---

[124]) V. nota [119]).

la Cond. 30.5, *nè l'assioma* $22.\overline{2}$, *nè verificanti quindi l'assioma* 22.2).

Si può infatti soddisfare le Cond. 30.1, ..., 4 (94) scegliendo opportune costanti $c_{\alpha\beta}$ (con $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$) e ponendo [Conv. 20.1, *c*]

$$f_{\alpha\beta 1}(r, v_1, v_2) = c_{\alpha\beta} r\,, \quad f_{\alpha\beta j}(r, v_1, v_2) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu;\ j = 2, 3)\,, \tag{96}$$

(in contrasto con la Cond. 30.5). Per (96) le funzioni F_i determinate da (77) si particolarizzano in

$$X_i = F_i(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta} \mid x \mid v) = \Big(\sum_{\alpha\beta=1}^{\nu} c_{\alpha\beta} e_\alpha \eta_\beta\Big) x_i \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{97}$$

Consideriamo la trasformazione

$$y_i = \lambda_i x_i \qquad (i = 1, \ldots, 4),\ (\tau = \lambda_4)\,. \tag{98}$$

La trasformata secondo (98) della forza X_1, X_2, X_3 data da (97), è

$$\begin{aligned} Y_i &= \overline{F}_i\Big(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta} \mid y \mid \frac{dy}{dy_4}\Big) = \lambda_i \tau^{-2} F_i(e, \eta \mid x \mid v) = \\ &= \Big(\sum_{\alpha,\beta=0}^{\nu} \tau^{-2} c_{\alpha\beta} e_\alpha \eta_\beta\Big) y_i \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \end{aligned} \tag{99}$$

Si osservi che il vettore Y_i è anch'esso fortemente isotropo, come funzione di y e $\dfrac{dy}{dy_4}$, perchè esso si costruisce a partire dalle costanti $\tau^{-2} c_{\alpha\beta}$ come X_i a partire dalle $c_{\alpha\beta}$.

Tenuto conto che (98) caratterizza anche il passaggio fra I_{K_0} e il generico insieme isometrico, è facile riconoscere che, se valgono le relazioni (96), non solo $\overline{I}_{K_0}$ ma un qualunque insieme isosferico $\overline{\mathfrak{J}}$ verifica la Cond. 31.2, in contrasto con l'assioma $22.\overline{2}$.

La particolarizzazione del considerato modello matematico ottenuto mediante (96) soddisfa dunque le Cond. 30.1, ..., 4 e non la 30.5 nè l'assioma $22.\overline{2}$. Come è facile riconoscere [125]) esso

---

[125]) A differenza che per una verifica dell'assioma $22.\overline{2}$, ora non occorre dimostrare che ad ogni insieme isometrico orientato $\mathfrak{J}$ ($\mathfrak{J} \in \overline{\mathfrak{J}}$) corrisponde una sola terna $\langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ di funzioni verificanti le Cond. 22.1, 2 il che sarà fatto nella seconda parte della dimostrazione del teorema 31.2.

soddisfa però il sistema degli assiomi ottenuti da quelli della $\mathcal{C}_1$ indebolendo l'assioma 22.2, concernente la forza, nell'ammissione che esista un insieme isosferico $\bar{\mathfrak{I}}$ soddisfacente la Cond. 31.2.

Il considerato sistema di assiomi equivale alla prima delle seguenti affermazioni 31.1 e $31.\bar{1}$ (conseguenze delle Condizioni 30.1, ..., 4 e (94) e rispettivamente 30.1, ..., 4):

AFFERMAZIONE 31.1 ($31.\bar{1}$) – *Valgono gli assiomi di* $\mathcal{C}_1$ ($\bar{\mathcal{C}}_1$), *eccetto l'assioma* 22.2 ($22.\bar{2}$), *inoltre esiste un insieme isosferico* $\bar{\mathfrak{I}}$ *verificante la Cond.* 31.2 ($31.\bar{2}$), *ossia tale che, per ogni insieme isometrico* (*isometrico orientato*) $\mathfrak{I}$ *appartenente a* $\bar{\mathfrak{I}}$, *esiste una terna di funzioni* $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ *verificante le condizioni* 22.1 e 22.2.

L'affermazione 31.1 si può considerare come equivalente a quella della esistenza di una misura dello spazio ed una del tempo per cui valgono le leggi fondamentali della Meccanica (intese come le tre leggi di Newton e la regola del parallelogramma per la composizione delle forze [passo 10.2] [126]).

Da quanto precede (in particolare dal Teor. 31.1 e l'affermazione 31.1) segue la

OSSERVAZIONE 31.1 – L'affermazione 31.1 (o $31.\bar{1}$) non permette da sola di dimostrare l'unicità delle misure ivi considerate, a meno di cambiamenti delle unità di misura — cfr. nota 126 —.

TEOREMA 31.2 – *Grazie alla Cond.* 30.5, *per il modello matematico* $MM\mathcal{C}_1$, $\bar{I}_{K_0}$ *è l'unico insieme isosferico verificante la Condizione* $31.\bar{2}$, *onde l'unico verificante la* 31.2, *se vale* (94).

Inoltre la terna $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ *definita da* (77) *è la sola terna verificante le condizioni* 22.1, 2 *per* $\mathfrak{I} = I^*_{K_0}$ *e per* $\mathfrak{I} = I_{K_0}$, *se vale* (94).

Infatti, supponiamo, per assurda ipotesi, che la Cond. $31.\bar{2}$ sia soddisfatta da un insieme isosferico $\bar{\mathfrak{I}}$ distinto da $\bar{I}_{K_0}$. Allora per ogni insieme isometrico orientato $\mathfrak{I} \subset \bar{\mathfrak{I}}$ esiste una terna $\mathcal{F}^* = \langle \mathcal{F}^*_1, \mathcal{F}^*_2, \mathcal{F}^*_3 \rangle$ verificante le Cond. 22.1 e 22.2. Fissato un

---

[126]) In questo modo P. Painlevé intende enunciare le leggi della Meccanica in [17], pg. 65, riga 7 [Passo 10.2]. La prossima affermazione 31.2 si applica quindi anche alla teoria $\mathcal{C}_{P17}$.

tale $\mathfrak{J}$, per la Cond. 22.2 e la struttura del modello $MM\mathfrak{C}_1$, la corrispondente $\mathcal{F}^*$ deve essere almeno debolmente isotropa, quindi è caratterizzata da

$$(100)\quad \mathcal{F}_i^*(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}, \varrho, 0, 0, w_1, w_2, 0) = \Phi_i^*(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, \varrho, w_1, w_2) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Valendo la Cond. 30.5 per ipotesi, si possono scegliere $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\eta}$, a_1 ed ε come è detto in essa e in modo che valga (82).

Sia poi Σ lo spazio solidale a K_0 ed E_0 l'origine di K_0, e si ponga $\mathfrak{J} = I^*_{K_0}$. In base al teorema 21.2 si possono scegliere due sistemi di coordinate H_1 e H_2 in $\mathfrak{J}$ e altri due K_1 e K_2 in $\mathfrak{J}$ in modo che H_1, H_2, K_1, K_2 abbiano la comune origine E_0 e siano solidali con Σ, inoltre esistano due punti eventi E_1 ed E_2 e due numeri reali positivi $\bar{\varrho}$ ed a_2 per cui valgono le formule (37), (38) e (39).

Siano ora $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Pi}_1$ due stati includenti gli stati dinamici totali caratterizzati da $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{\eta}$ rispettivamente.

Si osservi che nel considerato modello è fisicamente possibile che la forza dovuta agli stati fisici $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Pi}_1$ agisca da sola in corrispondenza di arbitrari valori di r, v_1 e v_2. Ciò significa che in particolare esistono quattro punti materiali M_1, M_1', M_2, M_2' e due CMP-casi γ_1 e γ_2 tali che, per $j = 1, 2$, all'istante $\vartheta = \Theta_0^{K_0} = \Theta_0^{K_j} = \Theta_0^{H_j}$, M_j e M_j' costituiscono un sistema isolato, hanno nulle le velocità rispetto a Σ (onde rispetto a H_1, H_2, K_1 e K_2), infine M_j ed M_j' occupano E_0 ed E_j e possiedono gli stati fisici $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Pi}_1$ rispettivamente. È facile riconoscere che ciò è possibile assumendo tanto $PrF = PrF_2$ che $PrF = PrF_3$ — V. (93) e poco prima di (93) —.

Detta m_j la massa di M_j, in base alla Cond. 22.2, alla sua validità per $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i^*$, a (77), (78) e (100), e a (38) e (39), si ha

$$(101)\quad m_j\alpha_1^{K_j} = m_j\,\mathrm{accel}_1^{K_j}(M_j, \vartheta, \gamma_j) = \Phi_1(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}, a_j, 0, 0) \quad (j = 1, 2)$$

$$(102)\quad m_j\alpha_1^{H_j} = m_j\,\mathrm{accel}_1^{H_j}(M_j, \vartheta, \gamma_j) = \Phi_1^*(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, \bar{\varrho}, 0, 0) \quad (j = 1, 2)$$

Poichè H_1, H_2, K_1, K_2 hanno la comune origine E_0 e inoltre H_1, H_2 sono fra loro isometrici e così pure K_1, K_2, il rapporto

τ fra le unità di misura del tempo di H_j e K_j non dipende da j. Per questo e per (38) e (39) si ha

$$\alpha_1^{K_j} = \tau^{-2} \frac{a_j}{\bar{\varrho}} \alpha_1^{H_j} \qquad j = 1, 2 . \tag{103}$$

Allora poichè l'ultimo membro di (102) non dipende da j, da (101) e (102) segue

$$\Phi_1(e, \eta, a_2, 0, 0) = \frac{a_1}{a_2} \Phi_1(e, \eta, a_1, 0, 0) \tag{104}$$

in contrasto con (82). Dunque $\bar{\mathfrak{J}} = \bar{I}_{K_0}$.

Per dimostrare la seconda parte del teorema 31.2 si osservi che, fissati gli stati fisici $\bar{\Pi}$, $\bar{\Pi}_1$, e i numeri reali r, v_1, v_2 con $r > 0$ e $v_2 > 0$, esistono un CMP-caso γ e due punti materiali M ed M_1 tali che M ha massa m e, all'istante $\Theta_0^{K_0}$, M ed M_1 costituiscono un sistema isolato, inoltre M (M_1) ha lo stato fisico $\bar{\Pi}$ ($\bar{\Pi}_1$), occupa il punto evento $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ ($\langle r, 0, 0, 0 \rangle$) ed ha rispetto a K_0 velocità di componenti nulle (eguali a v_1, v_2, 0). Per la Cond. 22.2 — vedi in particolare (49) — si ha allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^*(\bar{\Pi}, \bar{\Pi}_1 r,, 0, 0, v_1, v_2, 0) &= m \operatorname{accel}_i^{K_0}(M, \Theta_0^{K_0}, \gamma) = \\ &= \mathcal{F}_i(\bar{\Pi}, \bar{\Pi}_1, r, 0, 0, v_1, v_2, 0) \qquad (i = 1, 2, 3) . \end{aligned} \tag{105}$$

Dunque anche la seconda parte del teorema 31.2 è vera.

c.d.d.

COROLLARIO 31.1 – *Il modello matematico considerato, determinato da* (77), (78) *e dalle* Cond. 30.1, ..., 5 *soddisfa anche l'assioma* 22.$\bar{2}$.

COROLLARIO 31.2 – *Se poi son soddisfatte anche le relazioni* (94), *di conseguenza il considerato modello soddisfa anche l'assioma* 22.2, come è facile verificare.

Si interpretino ora fisicamente le $\mathcal{F}_i$, F_i e Φ_i figuranti in (77) (78) e nella condizione 30.5, e si osservi che, secondo ogni teoria

classica — $\mathcal{T}_1$ e $\overline{\mathcal{T}}_1$ incluse — per l'isotropia fisica debole dello spazio insita nelle leggi fondamentali della Meccanica, le forze con cui interagiscono due punti materiali aventi velocità trasversa relativa nulla sono parallele alla congiungente i punti stessi — onde, in corrispondenza, è $\mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, r, 0, 0, v_1, 0, 0) = 0$ per $|v_1| < \infty$ e $j = 2, 3$ —. Si riconosce allora facilmente che la condizione 30.5 è conseguenza della seguente affermazione che vale la pena di considerare per il suo aspetto meno particolare:

AFFERMAZIONE 31.2 – *Esistono due stati fisici $\overline{\Pi}$, $\overline{\Pi}_1$ tali che, in corrispondenza, la forza $\mathcal{F}_i(\overline{\Pi}, \overline{\Pi}_1, r, 0, 0, v_1, v_2, 0)$, calcolata per $v_1 = v_2 = 0$, non è identicamente nulla ma si annulla all'infinito* [127]).

È ora facile verificare che la dimostrazione del teorema 31.2 resta sostanzialmente inalterata sostituendo l'ipotesi che il modello $MM\mathcal{T}_1$ soddisfi le condizioni 30.1, ..., 5 e (94) [30.1, ..., 5] con quella che $MM\mathcal{T}_1$ renda vera l'Affermazione 31.1 [31.$\overline{1}$], la 31.2 e la seguente

AFFERMAZIONE 31.3 – *Dati comunque due stati fisici $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Pi}_1$, e due punti-eventi simultanei E_0 ed E_1, è fisicamente possibile che la forza considerata nell'affermazione* 31.2 *sia esplicata da M_1 su M ad un istante in cui i punti materiali M ed M_1 costituiscono un sistema particellare isolato, hanno la stessa velocità, occupano E_0 ed E_1, e possiedono gli stati $\overline{\Pi}$ e $\overline{\Pi}_1$ rispettivamente.*

Dopo di ciò è facile riconoscere che i corollari 31.2 e 31.1 possono porsi nelle seguenti forme rispettive 31.3 e 31.$\overline{3}$:

COROLLARIO 31.3 (31.$\overline{3}$) – *Se, oltre gli assiomi di $\mathcal{T}_1$ ($\overline{\mathcal{T}}_1$) fino al* 22.1 (22.$\overline{1}$) *incluso, valgono le affermazioni* 31.2 *e* 31.3 *ed esiste un insieme isosferico $\overline{\mathfrak{I}}$ verificante la Cond.* 31.2 (31.$\overline{2}$), *allora vale l'assioma* 22.2 (22.$\overline{2}$).

---

[127]) Nella affermazione 31.2, la condizione che tale forza si annulli all'infinito può omettersi quando si ammetta il principio di causalità secondo P. Painlevé in quanto questo include l'analoga affermazione per ogni forza — v. [17], pg. 47 riga 3 —. Si ricordi che però il principio di causalità non è incluso in $\mathcal{T}_{P17}$.

Poichè l'assioma 22.2 ($22.\bar{2}$) determina la misura dello spazio (a meno di un fattore di proporzionalità) vale la seguente:

OSSERVAZIONE 31.2 – La validità, a meno di cambiamenti delle unità di misura, dell'unicità delle misure del tempo e dello spazio per cui valgono le leggi fondamentali della meccanica è una conseguenza delle affermazioni 31.1, 2 e della 31.3 [128]).

Conviene giustificare la forma data all'Ass. 22.2 ($22.\bar{2}$) osservando che si è preferito includere nell'assioma dinamico 22.2 (o $22.\bar{2}$) le due considerate proprietà di unicità piuttosto di aggiungere un'ammissione come l'affermazione 31.3, perchè il primo procedimento è meno restrittivo potendo accadere che l'affermazione 31.3 valga solo per certe coppie $\langle \bar{\Pi}, \bar{\Pi}_1 \rangle$ di stati fisici totali, ed in corrispondenza di queste la forza risulti di conseguenza direttamente determinabile. Potrebbe poi accadere che l'affermazione 31.3 non valga in relazione a certe coppie della forma $\langle \bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2 \rangle$, ma allora la forza corrispondente sia determinata dal modo di comportarsi di un sistema isolato costituito da tre punti materiali M, M_1, M_2 con gli stati fisici rispettivi $\bar{\Pi}$, $\bar{\Pi}_1$ e $\bar{\Pi}_2$ ecc...

32. Sul concetto di forza dovuto a date proprietà fisiche attive e passive. Sulla legge di gravitazione universale e su quella elettrostatica di Coulomb.

In questo numero si introduce il concetto di *famiglia di sistemi di proprietà dinamiche elementari* (*FSPDE*) e in modo che tali sistemi caratterizzino le specie di grandezze fisiche aventi influenza sulla forza. Così l'analisi della forza totale agente su un punto materiale M viene spinta alla considerazione non solo delle forze che i singoli altri punti materiali M_r ($r = 1, \ldots, \nu$) esplicano su M, ma anche ai contributi all'azione di M_r su M dovuti alle varie coppie di grandezze fisiche [129]) possedute da M_r ed M,

---

[128]) Si noti che in base a cose dette nel n. 10, si può forse ritenere l'affermazione 31.1 come inclusa nella teoria $\mathcal{T}_{F17}$ (anzi, anche la 31.2 può includersi). Non vale però l'analogo per l'affermazione 31.3.

[129]) Naturalmente può anche darsi che queste proprietà fisiche di M_r

ed influenti su tale azione. Senza introdurre nuovi concetti primitivi si dà un senso rigoroso alle frasi come, per es., « *forza dovuta a date proprietà fisiche* di M_r e M » o « ... *in assenza di altre forze* ».

Sembra che il concetto di forza dovuta a date proprietà fisiche di M_1 e M sia assunto ordinariamente come primitivo. Si noti che esso è un raffinamento del concetto di *forza esplicata — o causata — da* M_1 *su* M, e che in quotati trattati assiomatici (informali) sui principi della meccanica si sente il bisogno di definire quest'ultimo concetto [130]).

Si può anche ritenere che ordinariamente, quale altra alternativa, si considerino più o meno esplicitamente come primitivi i concetti di *specie di grandezza fisica*, e *misura* (*naturale*) *di tali grandezze*, in particolare, il concetto di grandezza fisica nulla.

Concetti come quello di forza dovuta a date proprietà fisiche si possono introdurre nella $\mathcal{T}_1$ con sole definizioni. Nè occorrono nuovi assiomi finchè si considerano tali concetti come (esplicitamente) relativi ad una famiglia (*FSPDE*) di sistemi di proprietà dinamiche elementari — in un senso chiarito dalle prossime Def. 32.2 e Def. 32.3 che hanno carattere generale. Basandosi su queste, nella teoria $\mathcal{T}_1$ si dà un enunciato rigoroso della legge di gravitazione universale non ostante non si assumano i detti concetti come primitivi.

Si particolarizza poi il precedente concetto di *sistema di proprietà* in quello di *sistema di grandezze dinamiche* (elementari), anch'esso considerato entro una data famiglia del tipo precedente (*FSPDE*); poi, basandosi su quest'ultimo concetto, si mostra come enunciare nella $\mathcal{T}_1$ la legge di Coulomb, accettando come primitivo il concetto (particolare) di carica elettrica inteso in senso puramente qualitativo, ma senza introdurre come primitivo alcun

---

e M consistano nel possesso di una grandezza fisica di data natura $\mathcal{M}$ (per es. carica elettrica) e di data intensità, e che, anche basandosi sulla $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{M}$ sia introdotta come nuovo concetto primitivo.

[130]) In [17] P. Painlevé definisce *accelerazione di* M *causata da* M_1 — v. Passo 10.1 — che, grazie ai principi considerati nel passo 10.2, permette una immediata definizione di forza esplicata su M da M_1. P. Painlevè non ha alcun bisogno di considerare il detto raffinamento in quanto Egli si limita al caso puramente meccanico [cfr. nota 96].

concetto di carattere generale come appunto quello di forza $\boldsymbol{F}$ dovuta al possesso di date proprietà fisiche, delle quali parte sono possedute da chi esplica $\boldsymbol{F}$ (proprietà attive) e parte da chi la subisce (proprietà passive).

L'accennato metodo con cui si possono successivamente introdurre in $\mathcal{T}_1$ leggi fisiche particolari, e che è esemplificato enunciando esplicitamente le due leggi sopra dette, non richiede nemmeno l'uso di qualche assioma preliminare.

Nel prossimo numero sarà invece proposto qualche assioma per eliminare la necessità di considerare come relativo ad una famiglia *FSPDE* ogni concetto basato appunto sul precedente concetto *FSPDE* [131]).

DEFINIZIONE 32.1 – *a*) *Se Π_1 e Π_2 sono proprietà PrF, si dirà che Π_2 è fisicamente compatibile con Π_1 se Π_2 appartiene a qualche possibile stato fisico totale* [Def. 22.1] *contenente Π_1.*

b) *Se poi Π_2 appartiene ad ognuno di tali stati, si dirà che Π_2 è conseguenza fisica di Π_1.*

DEFINIZIONE 32.2 – *Dirò che entro la famiglia $\{\Gamma^0, \Gamma^1, \ldots, \Gamma^\nu\}$ di sistemi di proprietà dinamiche elementari, rispetto all'insieme isometrico (orientato)* $\mathfrak{J}$ — a priori anche non galileiano — *e rispetto al campione M' per l'unità di massa, le funzioni*

$$X_{hk} = \Phi_{hk}(G^h, G_1^k \mid x \mid v) \qquad \langle G^h, G_1^k \rangle \in C_{hk} \; ; \qquad x, v \in \mathcal{S}_3; \; x^2 > 0; \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, \nu), \tag{106}$$

aventi codominio in $\mathcal{S}_3$, costituiscono una rappresentazione delle

---

[131]) Non ho introdotto subito uno di tali assiomi perchè sebbene logicamente compatibile con i precedenti, come ogni vero assioma, ciascuno di essi dà luogo a delle restrizioni.

È vero che, nel caso degli assiomi proposti nel n. 33, queste restrizioni tutt'al più particolarizzano il concetto di proprietà *PrF* senza minimamente restringere il campo dei problemi trattabili nella teoria $\mathcal{T}_1$. Tuttavia mi sembra che valga la pena di esporre entrambi i metodi — senza e con ulteriore assioma — anche perchè il secondo è rapidamente riconducibile al primo.

forze dovute al sistema passivo Γ^h e a quello attivo $\Gamma^k (h, k = 0, \ldots, \nu)$ — oppure dirò brevemente che $\Phi_{hk} = \Phi^{\mathfrak{J} M' \Gamma^h \Gamma^k}$ è associata a Γ^h, Γ^k, $\mathfrak{J}$ e M' entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ $(h, k = 0, \ldots, \nu)$ — se sono soddisfatte le seguenti otto condizioni a), ..., h):

a) C_{hk} è la classe delle coppie $\{G^h, G_1^k\}$ di proprietà PrF per cui $G^h \in \Gamma^h$, $G_1^k \in \Gamma^k$; inoltre in un CMP-caso γ e ad un istante ϑ due punti materiali distinti possiedono rispettivamente le proprietà G^h e $G_1^k (h, k = 0, \ldots, \nu)$.

b) Per $h = 0, \ldots, \nu$, Γ^h è una classe di proprietà PrF contenente almeno due elementi e tale che almeno una delle funzioni (106) dipenda effettivamente da G^h (per qualche x e v in $\mathfrak{S}_3$ e qualche G_1^k con $k = 1, \ldots, n$).

c) Se $G_1, G_2 \in \Gamma^h$, allora G_1 e G_2 son fisicamente compatibili solo se coincidono.

d) Se $G^h \in \Gamma^h$ e $G^k \in \Gamma^k$ e $h \neq k$, allora G^h e G^k son fisicamente compatibili $(h, k = 0, \ldots, \nu)$ [132]).

e) Per $h = 0, \ldots, \nu$ ogni possibile stato fisico totale contiene una e una sola proprietà PrF, elemento di Γ^h (per queste due condizioni, soddisfatte da Γ^h, si dirà che Γ^h è *fisicamente necessaria ed esclusiva* rispettivamente).

f) Per $h = 0, \ldots, \nu$, Γ^h contiene una successione infinitesima $G_1^h, G_2^h, \ldots$ nel senso che per $k = 0, \ldots, \nu$ e $G^k \in \Gamma^k$ si ha

$$\lim_{r \to \infty} \Phi_{hk}(G_r^h, G^k \mid x \mid v) = \lim_{r \to \infty} \Phi_{kh}(G^k, G_r^h \mid x \mid v) = 0 \tag{107}$$

$$\lim_{r,s \to \infty} \Phi_{hk}(G_r^h, G_s^h \mid x \mid v) = 0 \tag{108}$$

(naturalmente, se (107) e (108) valgono per $G_r^h = \overline{G}^h$ e per $r = 1, 2, \ldots$, allora si dirà che $\overline{G}^h$ è elemento nullo di Γ^h) [133]).

---

[132]) Le condizioni *c)* e *d)* equivalgono alla seguente: *i sistemi $\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu$ son determinati entro la riunione $\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^1 \cup \ldots \cup F^\nu$ come le classi di equivalenza della relazione di incompatibilità fisica fra proprietà PrF appartenenti a Γ.*

[133]) In *f)* si sono introdotte le considerate successioni perchè la massa gravitazionale non può, fisicamente, esser nulla; nè si può ammettere, a scopo semplificativo, che lo possa perchè tale massa è proporzionale

g) Indicato, per ogni possibile stato fisico totale $\overline{\Pi}$, con

$$G^h = \Gamma^h_{\overline{\Pi}} \qquad h = 0, \dots, \nu \tag{109}$$

la proprietà, elemento comune di G^h e $\overline{\Pi}$ [il che è lecito in base ad *e*)], ricordata la Conv. 22.1 e posto

$$\mathcal{F}(\overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}} \mid x \mid v) = \sum_{hk=0}^{\nu} \Phi_{hk}(\Gamma^h_{\overline{\Pi}}, \Gamma^h_{\overline{\mathcal{A}}} \mid x \mid v) \tag{110}$$

per $$\langle \overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}} \rangle \in \Delta;\ x^2 > 0;\ x, v \in \mathfrak{S}_3,$$

la terna $\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \rangle$ [Conv. 21.1 *c*], l'insieme isometrico $\mathfrak{J}$ e il campione M' soddisfano le condizioni 22.1 e 22.2.

h) Sono uniche le funzioni $\overline{\Phi}_{hk}$ $(h, k = 0, \dots, \nu)$, del tipo delle Φ_{hk} $(h, k = 0, \dots, \nu)$, soddisfacenti le condizioni ottenute dalle *g*) ed *f*) sostituendovi Φ_{hk} con $\overline{\Phi}_{hk}$.

Si osservi che i campi $C_{hk}(h, k = 0, \dots, \nu)$ soddisfacenti *a*) sono ovviamente unici.

Invece le funzioni Φ_{hk} sono lasciate indeterminate dalla condizione *g*) — V. (109) — almeno per costanti additive. Dunque ammesso che la condizione *h*) sia compatibile con le precedenti, per tale compatibilità è essenziale che le Φ_{hk} soddisfino, oltre *g*), anche la condizione *f*).

* * *

Verifichiamo ora la detta compatibilità di *h*). A tale scopo si riprenda il modello matematico $MM\mathcal{T}_1$ considerato nei nn. 29 e 30 e si osservi che in questo il possesso di una carica di tipo *r*-mo può costituire la rappresentazione della generica proprietà, elemento di Γ^r $(r = 0, 1, \dots, \nu)$. Con tale interpretazione è soddisfatta la seguente condizione

---

a quella inerziale; di conseguenza la detta ammissione implicherebbe in $\mathcal{T}_1$ l'esistenza di punti materiali dotati quasi sempre di accelerazione infinita.

h^*) Fissati $G^a \in \Gamma^a$ e $G_1^b \in \Gamma^b$ $(a, b = 1, \dots, \nu)$ e supposte valide (107) e (108), esiste nella classe Δ delle possibili coppie di stati fisici totali [Conv. 22.1] una successione $\langle \overline{\Pi}_r, \overline{\mathcal{A}}_r \rangle$ tale che con la convenzione espressa da (109), per $r = 1, 2, \dots$ è

$$G^a = \Gamma^a_{\overline{\Pi}_r}, \quad G_1^b = \Gamma^b_{\overline{\mathcal{A}}_r} \tag{111}$$

$$G_r^h = \Gamma^h_{\overline{\Pi}_r}, \quad G_r^k = \Gamma^k_{\overline{\Pi}_r} \quad h \neq a; k \neq b; h, k = 0, \dots, \nu. \tag{112}$$

La cercata verifica si realizza dimostrando il seguente

TEOREMA 32.1 – *Le precedenti condizioni a), ..., g) e h*) implicano la h).*

Infatti supponiamo valide *a*), ..., *g*), *h**) e che le condizioni *f*) e *g*) sian soddisfatte anche per Φ_{hk} sostituita con un'altra funzione $\overline{\Phi}_{hk}$ dello stesso tipo $(h, k = 0, \dots, \nu)$.

Si fissino a e b con $a, b = 0, \dots, \nu$; si fissi poi G^a in Γ^a e G_1^b in Γ^b, ed x e v in $\mathcal{S}_3$ con $x^2 > 0$.

Allora per (110) e l'analogo di (110) per $\overline{\Phi}_{hk}$, si ha

$$\sum_{h,k=0}^{\nu} \Phi_{hk}(\Gamma^h_{\overline{\Pi}}, \Gamma^k_{\overline{\mathcal{A}}} \mid x \mid v) = \sum_{h,k=0}^{\nu} \overline{\Phi}_{h,k}(\Gamma^h_{\overline{\Pi}}, \Gamma^k_{\overline{\mathcal{A}}} \mid x \mid v), \text{ per } \langle \overline{\Pi}, \overline{\mathcal{A}} \rangle \in \Delta. \tag{113}$$

Per la condizione *h**), (113) vale per $\overline{\Pi} = \overline{\Pi}_r$ e $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}_r$ con $r = 1, 2, \dots$ ove $\overline{\Pi}_r$ e $\overline{\mathcal{A}}_r$ verificano (111) e (112). Per (111) e (112) e inoltre (107) e (108), da (113) segue

$$\Phi_{ab}(G^a, G_1^b \mid x \mid v) = \overline{\Phi}_{ab}(G^a, G_1^b \mid x \mid v),$$

onde, per il modo in cui a, b, G^a, G_1^b, x e v son stati scelti, si ha $\Phi_{hk} = \overline{\Phi}_{hk}$ $(h, k = 0, \dots, \nu)$.

c.d.d.

* * *

DEFINIZIONE 32.3 – *a) Entro la famiglia* $\{\Gamma^0, \dots, \Gamma^\nu\}$ *la funzione* Φ_{hk} *data da* (106) *sia associata a* Γ^h, Γ^k, $\mathfrak{J}$ *ed* M' $(h, k = 0, \dots, \nu)$ *nel senso della precedente definizione. Allora,* basandosi sulla def. 32.2, *h*), *si dirà che per* $h, k = 0, \dots, \nu$, per $\langle G^h, G_1^k \rangle \in C_{hk}$ *e per* x,

$v \in S_3$ con $x^2 > 0$, il vettore X_{hk} dato da (106) *rappresenta rispetto ad* $\mathfrak{J}$ *ed M' la forza dovuta ai divari x e v di posizione e velocità, e alle grandezze G^h e G_1^k* (rispettivamente passiva ed attiva).

b) Si supponga inoltre $K \in \mathfrak{J}$ e che in un CMP-caso γ, a un istante ϑ, x e v ($x^2 > 0$) siano i divari di posizione e velocità rispetto a K dei punti materiali M_1 ed M, ed inoltre questi possiedano rispettivamente le proprietà fisiche G_1^k e G^h. Allora si dirà che, entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$, X_{hki} [convenzione 21.1, *c*] *è l'i-ma componente rispetto a K della forza dovuta alla grandezza passiva G^h e a quella attiva G_1^k, con la quale* (forza) *M è sollecitato da M_1 all'istante ϑ in γ* ($h, k = 0, \ldots, 1$; $i = 1, 2, 3$).

Si osservi ora che uno dei modi in cui ordinariamente si enuncia la legge di gravitazione universale potrebbe essere il seguente:

Due elementi materiali M_1 ed M qualsiasi, « in assenza di altre forze » si attirano in modo inversamente proporzionale al quadrato della loro mutua distanza, e proporzionale alle loro masse (inerziali).

Oppure il considerato enunciato potrebbe essere del tipo seguente: *Esiste una costante universale h tale che per elementi materiali M ed M_1 qualsiasi, la forza che M_1 esplica su M a causa del fatto che M ed M_1 hanno date masse inerziali, ...*

Nella teoria assiomatica $\mathfrak{T}_1$, servendosi delle def. 32.2 e 32.3, come si è detto, si può dare alla suddetta legge un enunciato rigoroso anche senza introdurre alcun nuovo concetto primitivo.

A tale scopo si indichi preliminarmente con $\bar{\Gamma}^0$ la classe descritta dalla proprietà di avere il numero reale m per massa relativa al punto materiale campione M', quando m ed M' assumono tutti i valori per essi possibili.

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE IN $\mathfrak{T}_1$ – *Esiste una famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ di sistemi di proprietà dinamiche elementari tali che $\Gamma^0 = \bar{\Gamma}^0$* [134]*, inoltre fissato l'insieme isometrico $\mathfrak{J}$ e il campione M' ($M' \in MP$), esiste un numero positivo h tale che se $K \in \mathfrak{J}$, $r > 0$ e m ed m_1 sono le masse, relative ad M', dei*

---

[134]) Sarebbe meno compromettente affermare solo che ogni proprietà

punti materiali M ed M_1 rispettivamente, inoltre nel CMP-caso γ, all'istante ϑ, M (M_1) occupa una posizione avente nel riferimento K le coordinate spaziali 0, 0, 0 (r, 0, 0), *allora, detta $\mathbf{F}$ la forza con cui M è sollecitato da M_1 e dovuta « entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ » al possesso delle masse inerziali m ed m_1, $\mathbf{F}$ è diretta da M ad M_1 ed ha in K il modulo $hm_1m_2r^{-2}$.*

DEFINIZIONE 32.4 – *a) Entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ e rispetto a $\mathfrak{J}$ ed M', le funzioni* (106) *rappresentino le forze dovute al sistema attivo Γ^h e a quello passivo Γ^k secondo la* Def. 32.2. *Per certi interi a e b ($a, b = 0, \ldots, \nu$) Φ_{ab} abbia la forma*

$$(114) \qquad X_{ab} = \Phi_{ab}(G^a, G_1^b \mid x \mid v) = \Phi^a_{ab}(G^a)\Phi^b_{ab}(G_1^b)\Phi^a_{ab}(x \mid v)\,,$$

X_{ab}, calcolata per $v = 0$, non risulti identicamente nulla; infine $\Phi^a_{ab}(G^a)$ e *$\Phi^b_{ab}(G_1^b)$ siano due funzioni reali biunivoche e risultino definite per ogni $G^a \in \Gamma^a$ e $G_1^b \in \Gamma^b$,* ovviamente *a meno di un fattore di proporzionalità. Allora si dirà che i rapporti*

$$(115) \qquad G^a/H^a = \Phi^a_{ab}(G^a)/\Phi^a_{ab}(H^a)\,, \quad G_1^b/H_1^b = \Phi^b_{ab}(G_1^b)/\Phi^b_{ab}(H_1^b)$$

$$\text{per} \qquad G^a, H^a \in \Gamma^a \quad \text{e} \quad G_1^b, H_1^b \in \Gamma^b$$

sono i rapporti delle grandezze G^a e H^a di tipo Γ^a e rispettivamente G_1^b e H_1^b di tipo Γ^b, considerati entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ e rispetto all'interazione fra Γ^a e Γ^b.

b) Il caso considerato in a) valga con $a = b$. Allora dirò che entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$, Γ^a è un sistema di grandezze dinamiche (elementari), la funzione $\Phi^a = \Phi^a_{aa}$ è una misura naturale per esse, e il rapporto G^a/H^a dato da (115), *è il rapporto di G^a e H^a entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$.*

---

appartenente a $\overline{\Gamma}^0$ e fisicamente equivalente ad una appartenente a Γ^0 e viceversa.

Tenuto conto che nella $\mathcal{T}_1$-*astratta* quanto precede equivale appunto alla $\overline{\Gamma}_0 = \Gamma_0$, per uniformità e semplicità, si è affermata tale eguaglianza anche nella teoria $\mathcal{T}_1$-*descrittiva*.

Naturalmente dirò anche che Φ^*_{aa} *è la misura* (determinata a meno del segno) *subordinata sul sistema* Γ^a *entro la famiglia* $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ *dall'insieme isometrico* $\mathfrak{J}$ *e dal campione* M' *per l'unità di massa* — o dalle unità di misura per le lunghezze, i tempi e le masse relative ad $\mathfrak{J}$ ed M' — *se* Φ^*_{aa} *soddisfa* (114) *per* $a = b$, *dopo aver scelto* — com'è sempre possibile — *la funzione* Φ^*_{ab} *ivi figurante, in modo che sia* [Conv. 21.1, *c*]

$$\Phi^*_{a,a,1}(1, 0, 0, 0, 0, 0) = 1 \,. \tag{116}$$

Si può ora introdurre come primitiva la *carica elettrica*, o meglio la classe $\overline{\Gamma}^1$ delle proprietà consistenti nel possedere una data carica elettrica — per brevità queste proprietà saranno chiamate senz'altro cariche elettriche —. Si intende fare questa introduzione in modo semplicemente *qualitativo*, ossia non considerando come primitiva nè la nozione di rapporto tra cariche elettriche, nè qualche relazione comparativa tra esse.

Mediante le def. 32.2, 3 e 4, senza assumere come primitivi certi concetti generali, si può ora porre il seguente rigoroso enunciato esprimente la legge elettrostatica di Coulomb — che naturalmente permette di definire anche i suddetti rapporti — e qualcosa di più, per esempio la proporzionalità della forza alle cariche nel caso generale (anche non elettrostatico), e la non-interazione fra massa gravitazionale e carica elettrica, valida nella fisica classica:

Legge di Coulomb – *Esiste una famiglia* $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ *di sistemi di proprietà dinamiche elementari per cui, in primo luogo, è* $\Gamma^0 = \overline{\Gamma}^0$ *e* $\Gamma^1 = \overline{\Gamma}^1$, *in secondo luogo, detta* Φ_{hk} *la funzione che entro tale famiglia è associata a* Γ^h *e* Γ^k, *all'insieme isometrico* (*galileiano*) $\mathfrak{J}$ *ed al campione* M' $(h, k = 0, \ldots, \nu)$, $\overline{\Gamma}^1$ *è un sistema di grandezze dinamiche* (*elementari*) *dotato di una misura* Φ^1 *tale che* [Conv. 21.1]

$$\Phi_{11i}(G, G^1 \mid x \mid 0) = \Phi^1(G)\Phi^1(G^1)\, x_i/r^3 \tag{117}$$

per $\qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,;\ G, G^1 \in \Gamma^1 \qquad (i = 1, 2, 3),$

e, in terzo luogo, è $\Phi_{0,1} = \Phi_{1,0}$ *e*

$$\Phi_{0,1}(G^0, G^1 \mid x \mid v) \equiv 0 \quad \text{per} \quad G^0 \in \Gamma^0 \text{ e } G^1 \in \Gamma^1 \,. \tag{118}$$

33. Possibile cambiamento dell'assioma dinamico 22.2 in modo da ottenere una teoria $\mathcal{T}_3$ in cui certi concetti introdotti nel n. 32 perdono un certo carattere relativo.

Dai precedenti enunciati delle leggi gravitazionale e di Coulomb appare come, senza aggiungere nuovi assiomi preliminari, si possono via via enunciare nuove leggi fisiche particolari. Si è visto che secondo questo metodo talvolta si introducono, come primitive, particolari classi di grandezze fisiche (magari considerate solo da un punto di vista qualitativo); tale metodo non involge però alcun ulteriore assioma avente carattere preliminare rispetto alle dette leggi (nè alcun concetto primitivo preliminare, quale potrebbe essere quello di forza dovuta al possesso di date grandezze fisiche). Come operazione preliminare (relativa al detto metodo) nel precedente paragrafo si sono introdotte, mediante regolare definizione, varie locuzioni contenenti come parte la frase « entro la famiglia $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ ». Sorge spontaneo il quesito se tale parte possa eliminarsi. Una soluzione potrebbe essere appunto l'aggiunta agli assiomi di $\mathcal{T}_1$ (o $\overline{\mathcal{T}}_1$) della seguente ammissione (avente il detto carattere preliminare):

AMMISSIONE 33.1 – *Esiste una ed una sola famiglia* $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ *di sistemi di proprietà dinamiche elementari con* $\nu > 0$.

Sarebbe poi facile dimostrare, basandosi sull'assioma 22.2, che se, entro tale famiglia, Φ_{hk} è la funzione associata a Γ^h e Γ^k, ad $\mathfrak{I}$ e ad M' $(h, k = 0, \ldots, \nu)$, allora $\mathfrak{I}$ deve essere un insieme isometrico galileiano.

Ma invece di aggiungere in $\mathcal{T}_1$ (o $\overline{\mathcal{T}}_1$) l'ammissione 33.1 conviene considerare una teoria $\mathcal{T}_3$ ($\overline{\mathcal{T}}_3$) ottenuta da $\mathcal{T}_1$ ($\overline{\mathcal{T}}_1$) sostituendo l'assioma dinamico 22.2 ($22.\overline{2}$) con il seguente (il che è lecito in quanto le definizioni sulle quali quest'ultimo si basa sono indipendenti appunto dall'assioma 22.2 (o $22.\overline{2}$)).

ASSIOMA 33.1 ($33.\overline{1}$) – *Esiste un solo insieme isosferico* $\overline{\mathfrak{I}}$ *e una sola famiglia* $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ *di proprietà dinamiche elementari, con* $\nu > 0$, *tali che per ogni insieme isometrico (isometrico orientato)* $\mathfrak{I}$ *appartenente a* $\overline{\mathfrak{I}}$ *e ogni punto materiale* M', *esistono delle funzioni*

Φ_{hk} *associate entro* $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ *a* Γ^h *e* Γ^k, *ad* $\mathfrak{I}$ *e* M' $(h, k = 0, \ldots, \nu)$ *secondo la* Def. 32.2.

In $\mathcal{T}_3$ $(\overline{\mathcal{T}}_3)$ si dirà che Γ' *è un sistema di proprietà elementari*, se ciò è vero in relazione (ossia entro) qualche famiglia *FSPDE*. Poichè in $\mathcal{T}_3$ (o $\overline{\mathcal{T}}_3$), a differenza che in $\mathcal{T}_1$ (o $\overline{\mathcal{T}}_1$), a causa del precedente assioma 33.1 (33.$\bar{1}$), tale famiglia *FSPDE* è unica, di conseguenza, in $\mathcal{T}_3$ (o $\overline{\mathcal{T}}_3$) la frase « *entro la famiglia* $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ » può appunto togliersi da tutte le locuzioni che la contengono, introdotte nel n° 32.

In particolare essa può togliersi dai precedenti enunciati delle leggi di gravitazione e di Coulomb. A queste leggi, in $\mathcal{T}_3$ (o $\overline{\mathcal{T}}_3$) si possono dare enunciati meno complessi come segue. Cominciamo con lo spezzare l'enunciato della legge di gravitazione in due enunciati, dei quali il primo può considerarsi come usualmente sottointeso:

ASSIOMA 33.2 – *La* (precedente) *classe* $\overline{\Gamma}^0$ *delle proprietà consistenti nell'avere una data massa* (*relativa ad un campione* M'), *costituisce un sistema di proprietà dinamiche elementari.*

ASSIOMA 33.3 – *Fissato l'insieme isometrico* (*orientato*) *galileiano* $\mathfrak{I}$ *e il campione* M', *esiste un* $h > 0$, *tale che, per numeri reali positivi* r, m_1 *e* m_2 *qualunque, il vettore* $\langle hm_1m_2r^{-2}, 0, 0\rangle$ *rappresenta* [Def. 32.3 *a*)] *rispetto ad* $\mathfrak{I}$ *ed* M' *la forza dovuta al divario* x *di posizione, ad un divario qualsiasi di velocità e alle grandezze costituite dal possesso delle masse* m_1 *ed* m_2.

Analogamente trasformiamo la legge di Coulomb, intesa in un senso lato come al n. 32, fra l'altro spezzandola in tre parti. Per enunciarla occorre o assumere come primitivo il concetto qualitativo di data carica elettrica (intesa come proprietà), oppure ammettere, per es., che la massa gravitazionale e la carica elettrica siano le uniche grandezze dinamiche elementari. La prima alternativa si può tradurre nei seguenti tre assiomi:

ASSIOMA 33.4 – *Le proprietà consistenti nel possesso di una carica elettrica costituiscono un sistema* $\overline{\Gamma}^1$ *di grandezze dinamiche elementari* [Def. 32.4, *b*)] *distinto da* $\overline{\Gamma}^0$ *e dotato di una misura* $\Phi^1(G)$ *il cui codominio è l'asse reale* α [o almeno un insieme — per

es. un intervallo — appartenente ad α, contenente lo zero, e simmetrico rispetto a questo].

ASSIOMA 33.5 – *Fissati* $\mathfrak{J}$ *e* M' *come nell'assioma* 33.3, *esiste una misura* Φ^1 *per le grandezze di* $\overline{\Gamma}^1$, *tale che per ogni* $x \in \mathcal{S}_3$, *la forza dovuta al divario* x *di posizione, al divario nullo di velocità e alle cariche elettriche* G *e* G_1, *è rappresentata, rispetto ad* $\mathfrak{J}$ *e ad* M', *da* $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ con $f_i = \Phi^1(G)\Phi^1(G_1)r^{-3}x_i$ $(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$ per $i = 1, 2, 3$.

ASSIOMA 33.6 – *È nulla la forza dovuta al possesso di una massa e a quello di una carica elettrica* (o viceversa).

La seconda alternativa si può tradurre conservando gli assiomi 33.5 e 33.6 e sostituendo l'assioma 33.4 col seguente che permette di definire la carica elettrica e sembra abbastanza accettabile in una teoria di punti materiali liberi come la $\mathcal{C}_3$ (o $\overline{\mathcal{C}}_3$).

ASSIOMA 33.4* – *Esiste un solo sistema* $\overline{\Gamma}^1$ *di grandezze dinamiche elementari* (da dirsi cariche elettriche), *dotate di misura* Φ^1 *il cui codominio è l'asse reale* (*oppure un intervallo dell'asse reale, simmetrico rispetto all'origine*).

* * *

OSSERVAZIONE 33.1 – L'ammissione 33.1 e l'assioma 33.1 sono soddisfacenti almeno dal punto di vista logico in quanto valgono le seguenti due affermazioni

a) *L'ammissione* 33.1 *è compatibile con gli assiomi di* $\mathcal{C}_1$ (*o* $\overline{\mathcal{C}}_1$) *e col sussistere dei campi di forza considerati nel* n. 27.

b) *Anche gli assiomi di* $\mathcal{C}_3$ ($\overline{\mathcal{C}}_3$) *son compatibili fra loro e col sussistere dei suddetti campi.*

Si consideri infatti il modello matematico considerato nei nn. 30, 31 e si assuma $PrF = PrF_1$ — Vedi (92) —.

Per $\alpha = 0, \ldots, \nu$ si identifichi Γ^α con la classe descritta dalla proprietà elementare $\underset{\alpha}{\Pi}_{e_\alpha}$, di α-mo tipo — introdotta dopo la formula (88) — quando e_α descrive I_α. Dopo ciò è facile riconoscere che $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$ è una famiglia di sistemi di proprietà elementari secondo la Def. 32.2 e che potendosi pensare le e_α (η_β)

come funzioni di G^α (H^β) in base alla relazione biunivoca [135])

$$G^\alpha = \underset{\alpha}{\Pi}_{e_\alpha} \quad (H^\beta = \underset{\beta}{\Pi}_{\eta_\beta}) \tag{119}$$

per $\alpha, \beta = 0, \ldots, \nu$, si può caratterizzare la funzione vettoriale $\Phi_{\alpha\beta}(G^\alpha, H^\beta \,|\, x\,|, v)$, associata a Γ^α e Γ^β, e a I_{K_0} ed M_1^1, imponendole di essere isotropa come funzione di x e v, e di verificare, sotto la condizione (119), l'identità [136])

$$\Phi_{\alpha\beta}(G^\alpha, H^\beta, r, 0, 0, v_1, v_2, 0) = e_\alpha \eta_\beta f_{\alpha\beta}(r, v_1, v_2)\, \alpha, \beta = 0, \ldots, \nu. \tag{120}$$

Supponiamo che, oltre $\{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$, anche $\{K^0, \ldots, K^n\}$ sia una famiglia $FSPDE$ e con $n > 0$.

Osserviamo che K^a non può avere un elemento p in comune con la classe $PCDC$ $(a = 0, \ldots, n)$. Infatti, essendo $n > 0$, esisterebbe un sistema K^b $(b \neq a;\ b = 0, \ldots, n)$ contenente due proprietà fisiche G_1 e G_2 le quali, da un lato, sono fra loro fisicamente incompatibili [def. 32.2, *b*) *e c*)], e dall'altro, sono fisicamente compatibili con la proprietà p [def. 32.2, *d*)].

Si osservi ora che, in base alle definizioni delle classi PDE e $PCDC$ — V. pag. 132, 133 — per $\alpha = 0, 1, \ldots, \nu$ in Γ^α esiste una ed una sola proprietà G^α fisicamente compatibile con l'elemento p di $PCDC$; tale G^α è anzi conseguenza fisica di p. Inoltre, nella classe $PrF_1 = PDE \cup PCDC$ ogni proprietà p' distinta da $G^0, \ldots, G^\nu$ e p è fisicamente incompatibile con p.

Allora, per l'ipotesi $PrF = PrF_1$ e la asserita compatibilità fisica di G_1 e G_2 con p, dovrebbe essere $G_1 = G^\alpha$ e $G_2 = G^\beta$ per opportuni valori di α e β $(\alpha \neq \beta;\ \alpha, \beta = 0, \ldots, \nu)$. Ma allora, essendo $G^\alpha \in \Gamma^\alpha$ e $G^\beta \in \Gamma^\beta$, G_1 e G_2 risulterebbero fra loro fisicamente compatibili [def. 32.2, *d*)] contro un'affermazione precedente.

Dunque K^a non contiene alcun elemento p di $PCDC$.

È dunque $K^a \subset PDE$, quindi K^a deve possedere qualche elemento G^α di qualche sistema Γ^α $(\alpha = 0, \ldots, \nu)$; allora poichè sia K^a che Γ^α soddisfano le condizioni *d*) ed *e*) della definizione 32.2, nel considerato modello $MM\mathcal{C}_1$ è $K^a = \Gamma^\alpha$. Dunque, a meno di permutazioni degl'indici, si può ritenere $K^a = \Gamma^a$ $(a = 0, \ldots, n)$.

Tenuto conto che il considerato modello $MM\mathcal{C}_1$ verifica la condizione h^*) di pag. 147, è ora facile riconoscere [def. 32.2, *f*), *g*)]

che, in primo luogo Φ_{ab} è la funzione associata a K^a, K^b, $I^*_{K_0}$ ed M^1_1 anche entro la famiglia $\{K^0, \ldots, K^n\}$ $(a, b = 0, \ldots, n)$ e, in secondo luogo, non è $n < \nu$ in quanto $\Phi_{\nu 0}, \Phi_{\nu 1}, \ldots, \Phi_{\nu\nu}$ risulterebbero identicamente nulli, in contrasto con la condizione *b*) della def. 32.2.

Non potendo, ovviamente, nemmeno essere $n > \nu$ si ha $\{K^0, \ldots, K^n\} = \{\Gamma^0, \ldots, \Gamma^\nu\}$.

Per completare la dimostrazione dell'affermazione *a*) basta osservare che, avendo incluso fra le proprietà fisiche quelle contribuenti a determinare un campo di forze (*PCDC*), l'ammissione 33.1 è compatibile con l'esistenza dei campi di forza interni, dipendenti dal tempo ed agenti su sistemi (particellari) isolati, considerati nel n° 27.

L'affermazione *b*) segue facilmente dalla *a*) per il modo in cui $\mathcal{T}_3$ $(\overline{\mathcal{T}}_3)$ è stata ottenuta da $\mathcal{T}_1$ $(\overline{\mathcal{T}}_1)$ e per essere l'assioma 33.1 una conseguenza degli assiomi di $\mathcal{T}_1$ e dell'ammissione 33.1.

c.d.d.

BIBLIOGRAFIA

1 ADAMS E. W. – *The foundations of rigid body Mechanics and the derivation of its laws from those of particle Mechanics.* Proceedings of an International Symposium on the Axiomatic Method held at Berkeley, 1957-1958. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1959, pg. 250.

2 BRESSAN A. – *Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie III vol. XIV. Fasc. IV, 1960.

3 BURKS A. W. – *The logic of Causal Propositions.* Mind, Vol. 60, N. 9, No 239, giugno 1951, pg. 363.

---

[135]) Introdotta immediatamente dopo la formula (88).

[136]) *a*) Le funzioni $f_{\alpha\beta}(r, v_1, v_2)$ son caratterizzate, in base alla Conv. 21.1, c), dalle $f_{\alpha\beta i}$ figuranti, per es., in (77) e (78).

b) Si noti che nel considerato modello $MM\mathcal{T}_1$ ogni sistema Γ^a di proprietà dinamiche elementari è costituito da grandezze, inoltre la (114) vale con le Φ^a_{ab} indipendenti da b e con $\Phi^a_{ab} = \Phi^b_{ba}(a, b = o, \ldots, \nu)$.

4 CATTANEO C. – *Sulla sufficienza del principio dei lavori virtuali all'equilibrio di un generico sistema materiale.* Rendiconti di Matematica dell'Univ. di Roma. Serie V, Vol. XIV, fasc. 1-2, Luglio-Dicembre 1954, pg. 209.

5 CARNAP R. – *Introduction to Symbolic Logic and its Applications.* Dover publications, Inc. 1958, New York 14, N. Y.

6 CARNAP R. – *Meaning and Necessity.* The Univ. of Chicago Press. Illinois U.S.A.

7 HAMEL G. – *Theoretische Mechanik.* Springer-Verlag. Berlin Göttingen/Heidelberg, 1949.

8 HERMES H. – *Eine Axiomatisierung der Allgemeinen Mechanik.* Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenshaften. Vol. 3 (Heft 3), Verlag von Hirzel in Leipzig, 1938.

9 HERMES H. – *Zur Axiomatisierung der Mechanik.* Vedi i « Proceedings... » in cui trovasi [1], pg. 212.

10 HUTTEN E. H. – *The language of modern Physics.* London: George Allen & Unwin LT D New York: The MacMillan Co. 1956.

11 KLEENE S. C. – *Introduction to metamathematics.* North-Holland, Amsterdam, 1952.

12 LEVI CIVITA T. – *Lezioni di Meccanica Razionale.* Vol. I, Editore Zanichelli, Bologna.

13 LEWIS C. I. e LANGFORD C. H. – *Symbolic Logic* 1932. Ristampa. New York, 1951.

14 MCKINSEY J. C. C., SUGAR A. C. & SUPPES P. – *Axiomatic Foundations of classical particle Mechanics.* Journal of Rational Mechanics and Analysis; Vol. 2, N. 2, aprile 1953.

15 NOLL W. – *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media.* « Archive for rational Mechanics and Analysis ». Vol. 2, n. 3, 1958 pg. 197-226.

16 NOLL W. – *The foundations of classical Mechanics in the Light of recent advances in continuum Mechanics.* Vedi i « Proceedings... » contenenti [1], pg. 266.

17 PAINLEVÉ P. – *Les axiomes de la Méchanique.* Paris Gauthier-Villars Editeurs, 1922.

18 PAINLEVÉ P. – *Cours de Mécanique.* Paris, Gauthier-Villars 1930.

19 ROSSER J. B. – *Review of H. Hermes.* Journal of Symbolic Logic. 3, (1938). Pg. 119-120.

20 ROSSER J. B. – *Logic for mathematicians.* McGraw-Hill book co. Inc. 1953.

21 SANSONE G. – *Equazioni differenziali nel campo reale.* Zanichelli, Bologna 1949.

22 SBRANA F. – *Sul teorema di unicità per le equazioni differenziali della Meccanica.* Bollettino della Unione mat. Ital. marzo 1953, pg. 123.

23 SIGNORINI A. – *Meccanica Razionale*. Vol. II, cap. X, pg. 1. Perella, Roma 1954 (seconda edizione).
24 SIGNORINI A. – *Lezioni di Fisica Matematica*. Roma 1952-1953.
25 VITALI G. e SANSONE G. – *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. Bologna 1951.

ELENCO DEI SIMBOLI USATI

accel	accelerazione; $\mathrm{accel}^K(M, \vartheta, \gamma)$ = accelerazione di M all'istante ϑ, nel *CMP*-caso γ, relativa al riferimento spazio-temporale K [n. 19] (intesa come terna di numeri reali).
$\mathrm{accel}_i^K(\dots)$	i^{ma} componente di $\mathrm{accel}^K(\dots)$ ($i = 1, 2, 3$) [n. 19].
coord_i^K	i^{ma} coordinata nel riferimento K; $\mathrm{coord}_i^K(M, \vartheta, \gamma) = i^{ma}$ coordinata in K del punto materiale M all'istante ϑ nel *CMP*-caso γ. [n. 18].
CMP	classe dei *CMP*-casi.
CMP-caso	caso meccanicamente possibile [n. 15].
Δ	classe delle coppie fisicamente possibili di stati Sta*FT* [Conv. 22.1].
E_r^K	il punto evento $pE^K(\delta_{r1}, \delta_{r2}, \delta_{r3}, \delta_{r4})$ ove δ_{rs} è il simbolo di Kronecker ($r,s = 0, 1, \dots 4$).
EUFP	classe delle *EUFP*-evoluzioni.
EUFP-evoluzione	evoluzione dell'universo, fisicamente possibile (o una sua idealizzazione) [nn. 4,8].
θ_t^K	istante avente t per ascissa nel riferimento spazio-temporale K.
$f(\dots \mid x \mid v)$	«$f(\dots \mid x \mid v)$» sta per «$f(\dots, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$» [Convenzione 21.1].
$f(\dots \mid 0)$	«$f(\dots \mid 0)$» sta per «$f(\dots, 0, 0, 0)$» [Conv. 21.1].
$f(\dots)$	«$f(\dots)$» sta talvolta per «$f(\dots), f(\dots), f(\dots)$» [Conv. 22.1].
Forz	forza; nella teoria $\mathcal{T}_1$ ($\overline{\mathcal{T}}_1$), $\mathrm{Forz}^{\mathcal{J},M'}(\Pi, \Pi_1 \mid x \mid v)$ è la forza (intesa come terna di numeri reali) riferita all'insieme galileiano isometrico (isometrico orientato) $\mathcal{J}$ e al campione M' per l'unità di massa, dovuta allo stato fisico passivo Π a quello attivo Π_1, al divario x di posizione ed a quello v di velocità [n. 22].
$\mathrm{Forz}_i^{(\mathcal{J},M')}(\dots)$	i^{ma} componente di $\mathrm{Forz}^{\mathcal{J},M'}(\dots)$ [n. 22].
forz	forza; $\mathrm{forz}^{(K,M')}(M, M_1, \vartheta, \gamma)$ è la forza (intesa come terna di numeri reali)esplicata da M_1 su M all'istante

	ϑ nel CPM-caso γ, e riferita al sistema galileiano K e al campione M' per l'unità di massa [n. 22].
$forz_i^{(K,M')}(\dots)$	i^{ma} componente di $forz^{(K,M')}(\dots)$ [n. 22.]
$FSPDE$	famiglia di sistemi di proprietà dinamiche elementari [n. 32].
Ist	istante o sezione spaziale del cronotopo.
$\overline{I}_G$	Insieme isosferico galileiano.
I_K (I_K^*)	Insieme isometrico (isometrico orientato) contenente la corrispondenza inerziale K [n 21].
$\overline{I}_K$	Insieme isosferico contenente la corrispondenza inerziale K [n. 21].
$\mathfrak{L}$	linguaggio fisico estensionale ottenuto da $\mathfrak{L}^*$ mediante l'introduzione delle $EUFP$-evoluzioni [n. 8].
$\mathfrak{L}^*$	linguaggio fisico ordinario ed usuale, considerato come dotato di espressioni esplicite per la possibilità fisica [n. 8].
L	linguaggio estensionale (che si può considerare come parte di $\mathfrak{L}$ quando si assuma $CMP = EUFP$) necessario e sufficiente per esprimere la teoria $\mathcal{T}_1$.
L^*	parte di $\mathfrak{L}^*$ che si traduce in L secondo le regole delineate nel n. 15.
$MM\mathcal{T}_1$	modello (matematico) particolare della teoria $\mathcal{T}_1$ costruito nel [n. 30].
$PCDC$	classe delle proprietà contribuenti a determinare (nel futuro) un campo di forze dipendenti da posizioni, velocità e tempo) [n. 30].
PDE	proprietà dinamica elementare [n. 30].
PDT	proprietà dinamica totale [n. 30]
PE	punto evento.
pE^K $(x_1, \dots, x_4)$	punto evento di coordinate $x_1, \dots, x_4$ nel riferimento K.
pE (M, ϑ, γ)	punto evento occupato dal punto materiale M all'istante ϑ e nel CMP-caso γ.
PEO	punto evento occupato; « $E \in PEO(M, \gamma)$ » si legge « E *è un punto evento occupato dal punto materiale* M *nel* CMP-*caso* γ ».
PM	*punto materiale* che va inteso precisamente come possibile punto materiale, ossia come porzione (propria) di materia [n. 14].
$Preced$	relazione (classica) di precedenza temporale fra punti-eventi.
pos^K (M, ϑ, γ)	posizione di M all'istante ϑ e nel CMP-caso γ relativa al riferimento K (intesa come terna di numeri reali).
PrF	proprietà fisica (non cinematica) di punti materiali [n. 14].

$\mathbb{S}_3$ ($\mathbb{S}_4$)	insieme delle terne (quaterne) di numeri reali.
$staFT\,(M,\ \gamma,\ \vartheta)$	stato fisico totale del punto materiale M all'istante ϑ nell CMP-caso γ [Def. 22.1].
$StaFT$	classe dei (possibili) stati fisici (totali) [Def. 22.1].
x	« x » sta talvolta per « $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ » [Conv. 21.1].
$vel^K\,(M,\ \vartheta,\ \gamma)$	velocità di M all'istante ϑ nel CMP-caso γ, relativa al riferimento K (intesa come terna di numeri reali).
$vel^K_i\,(M,\ \vartheta,\ \gamma)$	i^{ma} componente di $\mathrm{vel}^K\,(M,\ \vartheta,\ \gamma)$.