

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI PRODI

Teoremi di tipo locale per il sistema di Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stazionarie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 32 (1962), p. 374-397

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__374_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__374_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEOREMI DI TIPO LOCALE
PER IL SISTEMA DI NAVIER-STOKES E STABILITÀ
DELLE SOLUZIONI STAZIONARIE

Memoria () di GIOVANNI PRODI (a Trieste) (**)*

Nel presente lavoro viene studiato il sistema di Navier-Stokes

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad})u - \Delta u = - \text{grad } p + f$$

$$(2) \quad \text{div } u = 0 \quad (u = (u_1, u_2, u_3))$$

in un campo tridimensionale limitato. Vengono dati per il problema misto teoremi di esistenza e unicità di tipo locale rispetto alla variabile t . Risultati in questo ordine di idee sono stati dati da tempo da Leray [10], per il caso di un campo coincidente con lo spazio tridimensionale. Teoremi di tipo locale sono stati ottenuti da A. A. Kiselev e O. A. Ladyzenskaia [6], S. G. Krein [7], P. E. Sobolevski [15], T. Kato e H. Fujita [5]. L'impostazione qui seguita è vicina a quella di Sobolevski; i risultati ottenuti presentano qualche miglioramento rispetto a quelli di questo A., il metodo dimostrativo qui seguito è inoltre più diretto.

In vista di applicazioni ad altri problemi noi diamo qui una valutazione dell'intervallo in cui è garantita l'esistenza della soluzione.

(*) Pervenuta in redazione il 30 maggio 1962.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

(**) La ricerca qui riportata è stata finanziata dalla « Air Force Office of Scientific Research, OAR » attraverso l'Ufficio Europeo (Grant No. AF Boar 62-7).

Successivamente, ci occupiamo del problema della stabilità delle soluzioni stazionarie. Si tratta, esattamente, di una questione preliminare allo studio della stabilità: noi dimostriamo che, se l'operatore alle variazioni associato ad una soluzione stazionaria u^* ha lo spettro tutto con parte reale positiva, la soluzione u^* è stabile asintoticamente. Questa è una proposizione ammessa implicitamente in tutti i lavori riguardanti la stabilità idrodinamica (Si veda: C. C. Lin [11]), ma non ci risulta che sia stata finora dimostrata. La dimostrazione non richiede un teorema di esistenza e unicità « in grande » (il cui sussistere non è stato ancora nè provato nè negato). Infatti le maggiorazioni ottenute assicurano — in virtù del solo teorema di tipo locale — sia l'esistenza « in grande » delle soluzioni che hanno il valore iniziale in un conveniente intorno di u^* , sia la loro convergenza verso u^* per $t \rightarrow +\infty$.

Molti problemi rimangono aperti riguardo alla stabilità. Si tratta, ad esempio, di studiare, in casi particolari, lo spettro dell'operatore alle variazioni. Moltissime ricerche sono state dedicate a questo problema pervenendo anche a risultati numerici, in casi particolari, ma alcuni aspetti sono ancora oscuri. Ad esempio, spesso viene presupposto che lo spettro sia reale, senza che ciò sia dimostrato; si tratta di una questione che presenta certamente notevoli difficoltà.

Si può infine congetturare, ovviamente, che la stabilità non sussista quando l'operatore alle variazioni abbia punti dello spettro con parte reale negativa. Non ci è stato possibile, tuttavia, di rispondere a questa questione.

1. Sia Ω un insieme aperto, limitato e connesso dello spazio R^n . Supporremo Ω di classe 2, benchè alcuni dei risultati che ora stabiliremo valgono in ipotesi più generali.

Indichiamo con $H^{l,p}$ (dove l è un intero ≥ 0 , p un numero reale > 1) lo spazio delle funzioni definite in Ω , aventi derivate di ordine $\leq l$ (in senso generalizzato) a p -sima potenza sommabile.

Introdurremo la norma $\|\varphi\|_{l,p} = \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha \varphi(x)|^p dx \right]^{1/p}$, dove,

secondo le più comuni convenzioni, è $x = (x_1, x_2, x_3)$, mentre α indica una terna di interi naturali $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, ed è $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}$, essendo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Quando si omette l'indice p , è sottinteso che $p = 2$.

Per $\varphi, \psi \in H^0$, scriviamo

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \psi(x) dx \quad \text{e} \quad |\varphi| = (\varphi, \varphi)^{1/2},$$

Allora: $|\varphi| = \|\varphi\|_{0,2} = \|\varphi\|_0$.

Per $\varphi, \psi \in H^1$, poniamo:

$$((\varphi, \psi)) = \int_{\Omega} \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \quad \text{e} \quad \|\varphi\| = ((\varphi, \varphi))^{1/2}.$$

Indicheremo con $\mathcal{D}$ lo spazio delle funzioni dotate di derivate continue di tutti gli ordini e nulle fuori di un compatto contenuto in Ω , con $\dot{H}^{1,p}$ la chiusura di $\mathcal{D}$ in $H^{1,p}$ e, in generale, per $l \geq 1$, con $\dot{H}^{l,p}$ lo spazio $\dot{H}^{1,p} \cap H^{l,p}$, con la norma di $H^{l,p}$. Nelle ipotesi fatte per Ω , in $\dot{H}^1$ le norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ sono equivalenti.

Indicheremo con il simbolo $\mathbf{H}^{1,p}$ (o $\dot{\mathbf{H}}^{1,p}$) lo spazio dei vettori le cui componenti appartengono ad $H^{1,p}$ (o ad $\dot{H}^{1,p}$ rispettivamente). L'espressione della norma si otterrà, ovviamente, considerando, in luogo dei valori assoluti, i moduli dei vettori. Analoga estensione di significato daremo ai simboli (u, v) , $((u, v))$; sostituiremo cioè nella loro espressione il prodotto scalare al prodotto ordinario.

Indicheremo con $\mathbf{D}$ lo spazio dei vettori le cui componenti appartengono a $\mathcal{D}$, con $\mathcal{N}$ il sottospazio di $\mathbf{D}$ formato dai vettori a divergenza nulla. Sia N la chiusura di $\mathcal{N}$ in $\mathbf{H}^0$; è noto (vedi [17]) che N ha come varietà ortogonale in $\mathbf{H}^0$ l'insieme di tutti i vettori del tipo $\text{grad } \varrho$ (essendo ϱ soggetta all'unica condizione di avere le derivate prime, sempre intese in senso generalizzato, a quadrato sommabile in Ω).

Per ogni intero $l \geq 1$, indichiamo con $N^{l,p}$ il sottospazio di $\dot{\mathbf{H}}^{l,p}$ formato dai vettori u per cui $\operatorname{div} u = 0$.

Si dimostra facilmente che N^1 coincide con la chiusura di N in $\dot{\mathbf{H}}^1$.

Indichiamo con P il proiettore ortogonale di $\mathbf{H}^0$ su N . Consideriamo ora in N l'operatore A definito dalla relazione

$$(u, Av) = ((u, v)) \quad \forall u \in N^1.$$

Si vede facilmente che A è autoaggiunto. Da recenti risultati (Cattabriga [1], Vorovich e Yudovich [16]) si deduce che il dominio di definizione di A coincide con N^2 e si ha ¹⁾

$$(3) \quad \|u\|_2 \leq k_1 \|Au\|.$$

All'operatore A possiamo associare un sistema di autosoluzioni $\{\omega_k\}$ completo sia in N che in N^1 e normalizzato in N .

Inoltre si ha $A = -PA$.

Dato uno spazio di Banach B , indichiamo con $C(0 \mapsto \tau; B)$ [con $L^p(0 \mapsto \tau; B)$] lo spazio delle funzioni definite nell'intervallo $0 \mapsto \tau$, con valori in B , continue [oppure, a p -esima potenza sommabile rispettivamente] con le norme naturali.

PROBLEMA A (Condizioni al contorno omogenee).

Si suppone che sia $f(t) \in L^2(0 \mapsto T; \mathbf{H}^0)$ (non costituisce evidentemente, restrizione supporre $f(t) \in L^2(0 \mapsto T; N)$) e che $u_0 \in N^1$.

Si cerca una soluzione $u(t)$, $p(t)$ definita in un intervallo $0 \mapsto \tau$ (con $0 < \tau \leq T$) tale che $u(0) = u_0$, avente le seguenti proprietà:

- a) $u(t)$ ha derivata (intesa in senso debole) appartenente a $L^2(0 \mapsto \tau; N)$
- b) $u(t) \in C(0 \mapsto \tau; N^1)$

¹⁾ Qui e nel seguito indichiamo con $k_1, k_2 \dots$ costanti che dipendono solo da Ω , con $c, c_1, c_2 \dots$ costanti che dipendono anche da ulteriori dati del problema.

- c) $u(t) \in L^2(0 \mapsto \tau; N^2)$
 d) $\text{grad } p(t) \in L^2(0 \mapsto \tau; \mathbf{H}^0)$.

La condizione b) implica la (2) e traduce anche la condizione di annullamento sulla frontiera di Ω .

OSSERVAZIONE: Dal lemma 3, che dimostreremo sotto, si deduce, in virtù delle condizioni a), b), c): $(u \cdot \text{grad})u \in L^2(0 \mapsto \tau; \mathbf{H}^0)$.

Il problema posto può essere tradotto nel seguente modo. Applichiamo ad ambo i membri della (1) l'operatore P , ponendo $-P((u \cdot \text{grad})u) = R(u)$. Otteniamo l'equazione:

$$(4) \quad \frac{du}{dt} + Au = R(u) + f(t)$$

Per le soluzioni della (4), in virtù delle a), b), c), si ha $Au = g(t)$ dove $g(t) \in L^2(0 \mapsto \tau; N)$; pertanto per un risultato riguardante il sistema di Stokes (v. Cattabriga, [1]), alla $u(t)$ si può associare una $p(t)$, con $\text{grad } p(t) \in L^2(0 \mapsto \tau; \mathbf{H}^0)$ così da soddisfare alla (1).

2. Si tratta ora di trovare maggiorazioni a priori per le soluzioni del problema A.

LEMMA 1: Supponiamo che $u(t)$ sia definita in $0 \mapsto \tau$ e soddisfi alle a), b), c). Allora si ha

$$(5) \quad \int_0^\tau \left(\frac{du}{dt}, Au(t) \right) dt = \frac{1}{2} \{ \|u(\tau)\|^2 - \|u(0)\|^2 \}.$$

Preso un δ , con $0 < \delta < \tau$, consideriamo la funzione $\tilde{u}(t)$ definita nell'intervallo $-\delta \mapsto \tau + \delta$, coincidente con $u(t)$ per $0 \leq t \leq \tau$, tale che $\tilde{u}(t) = u(-t)$ per $-\delta \leq t \leq 0$ e che $\tilde{u}(t) = u(2\tau - t)$ per $\tau \leq t \leq \tau + \delta$. La $\tilde{u}(t)$ soddisfa alle condizioni a), b), c) relativamente all'intervallo $-\delta \mapsto \tau + \delta$. Sia ora ϱ una funzione reale non negativa, pari, indefinitamente derivabile,

nulla fuori dell'intervallo $-1 \mapsto +1$ e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\xi) d\xi = 1$.

Per ogni $0 < \varepsilon < \delta$, consideriamo l'operatore di regolarizzazione

J_ε definito dalla relazione $J_\varepsilon g(t) = \int_{-\delta}^{\tau+\delta} \frac{1}{\varepsilon} \varrho\left(\frac{t-\xi}{\varepsilon}\right) g(\xi) d\xi$ (dove

$0 \leq t \leq \tau$). Ricordando che, per ogni $v \in N^1$, $\omega \in N^2$ si ha $(v, A\omega) = ((v, \omega))$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left(\frac{du}{dt}, Au(t) \right) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \left(J_\varepsilon \frac{d\tilde{u}}{dt}, J_\varepsilon A\tilde{u} \right) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \left(\frac{d}{dt} J_\varepsilon \tilde{u}, A J_\varepsilon \tilde{u} \right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \left(\left(\frac{d}{dt} J_\varepsilon \tilde{u}, J_\varepsilon \tilde{u} \right) \right) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{ \| J_\varepsilon \tilde{u}(\tau) \|^2 - \| J_\varepsilon \tilde{u}(0) \|^2 \}, \end{aligned}$$

da cui segue l'asserto, tenendo presente la continuità di $\tilde{u}(t)$ in N^1 .

OSSERVAZIONE: *La dimostrazione ora svolta può essere facilmente adattata a provare che le condizioni a) e c) implicano la b), almeno se si ammette che la u sia assegnata in modo tale da risultare continua in N (ciò che si ottiene, in ogni caso, modificandone la definizione in un insieme di misura nulla). Questa osservazione, del resto, discende come caso particolare da un risultato di Lions ([12], teorema 2.1).*

Il seguente lemma fornisce una maggiorazione per $R(u)$.

LEMMA 2: *Per ogni $u \in N^2$ si ha*

$$(6) \quad |R(u)|^2 \leq |(u \cdot \text{grad})u|^2 \leq k_2 \|u\|^2 |Au|$$

Infatti:

$$\begin{aligned} |R(u)|^2 &= |P((u \cdot \text{grad})u)|^2 \leq \left| \sum_i u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 = \\ &= \int_\Omega \sum_i \left(\sum_j u_j(x) \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Omega} |u(x)|^2 \sum_{ij} \left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx = \\ &= \int_{\Omega} |u(x)|^2 \left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} dx \end{aligned}$$

Applichiamo a quest'ultimo termine la disuguaglianza di Hölder generalizzata con esponenti 3, 2, 6; esso risulterà maggiorato dall'espressione

$$\left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^6 dx \right\}^{1/3} \left\{ \int_{\Omega} \sum_{ij} \left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right]^3 dx \right\}^{1/6}.$$

Applicando poi al primo e all'ultimo fattore il teorema di immersione (ricordando che Ω è un aperto 3-dimensionale) quindi applicando la (3) si ha

$$|R(u)|^2 \leq k_2 \|u\|^2 \|u\| \|u\|_2 \leq k_3 \|u\|^3 |Au|.$$

Così il lemma risulta dimostrato.

Moltiplichiamo ora scalarmente, in N , membro a membro, la (4) e integriamo nell'intervallo $0 \leq \tau$ (con $0 < \tau \leq T$). Si ottiene mediante la (5),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{ \|u(\tau)\|^2 - \|u(0)\|^2 \} + \int_0^\tau |Au(t)|^2 dt = \\ &= \int_0^\tau (R(u), Au) dt + \int_0^\tau (f, Au) dt \end{aligned}$$

Da questa deduciamo che $\|u(\tau)\|^2$ è funzione assolutamente continua di t e si ha quasi ovunque

$$(7) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + |Au|^2 = (R(u), Au) + (f, Au).$$

Applicando la disuguaglianza (6) si ricava facilmente da questa

la seguente disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq k_4 \{ \|u\|^6 + |f|^2 \}.$$

Si può allora ottenere da questa una limitazione per $\|u(t)\|$ in un intervallo $0 \mapsto \tau$ la cui ampiezza dipende unicamente da

$\|u_0\|$ e da $\int_0^T |f(t)|^2 dt$. È interessante dare una valutazione per l'ampiezza di questo intervallo per il caso in cui

$$f(t) \in L^\infty(0 \mapsto T; N).$$

Poniamo

$$(8) \quad C_\tau = \sup_t |f(t)|^{1/3}.$$

Si ha allora la disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq k_4 \{ \|u(t)\|^6 + C_\tau^2 \} \leq k_4 \{ \|u(t)\|^2 + C_\tau^2 \}^3$$

da cui si ottiene facilmente la maggiorazione

$$\|u(t)\|^2 \leq (\|u(0)\|^2 + C_\tau^2)(1 - 4k_4 t(\|u(0)\|^2 + C_\tau^2))^{-1/2} - C_\tau^2$$

valida in ogni intervallo di ampiezza τ , dove è $\tau < \frac{1}{4k_4} (\|u(0)\|^2 + C_\tau^2)^{-1/2}$. Dalle limitazioni trovate per $\|u(t)\|^2$ è immediato ri-

cavare limitazioni per $\int_0^\tau |Au(t)|^2 dt$, $\int_0^\tau \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt$.

L'esistenza di una soluzione può essere ora facilmente dimostrata con il ben noto procedimento di Galerkin-Faedo-Hopf. Ricordiamo che abbiamo indicato con $\{\omega_k\}$ un sistema di autofunzioni dell'operatore A , ortogonale e completo sia in N che in N^1 e normalizzato in N . Consideriamo la successione $u_n(t) = \sum_{k=1}^n C_{k,n}(t)\omega_k$ dove i coefficienti $C_{k,n}$ soddisfano alle condizioni

$C_{k,n}(0) = (u_0, \omega_k)$, essendo u_0 il valore iniziale, e sono tali che si abbia:

$$(9) \quad \left(\frac{du_n}{dt}, \omega_k \right) + (Au_n, \omega_k) = (R(u_n), \omega_k) + (f(t), \omega_k) \\ (k = 1, 2, \dots, n)$$

da cui si ottiene ovviamente un sistema differenziale ordinario in forma normale. Teniamo ora presente che è

$$Au_n(t) = \sum_1^n \lambda_k C_{k,n}(t) \omega_k,$$

essendo λ_k l'autovalore relativo alla autofunzione di ω_k . Perciò, moltiplicando membro a membro la (9) per $\lambda_k C_{k,n}(t)$ e sommando rispetto all'indice k si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 + \|Au_n\|^2 = (R(u_n), Au_n) + (f(t), Au_n).$$

Questa è analoga alla (7); da essa si possono ricavare limitazioni per $\|u_n(t)\|$ ($0 \leq t \leq \tau$), $\int_0^\tau \|Au_n(t)\|^2 dt$, $\int_0^\tau \left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 dt$, uniformi rispetto ad n , essendo l'intervallo $0 \mapsto \tau$ il medesimo per cui abbiamo stabilito sopra le limitazioni a priori.

Dalla successione $\{u_n\}$ si può estrarre una successione parziale $\{u_{n_k}\}$ convergente fortemente in $L^2(0 \mapsto \tau; N)$ verso una funzione $u(t)$ e tale che $Au_{n_k}(t)$ e $\frac{du_{n_k}}{dt}$ convergono debolmente in $L^2(0 \mapsto \tau; N)$ (verso Au e $\frac{du}{dt}$ rispettivamente). Si constata allora che $R(u_{n_k})$ converge debolmente verso $R(u)$ (sempre in $L^2(0 \mapsto \tau; N)$). Questo porta come conseguenza che la $u(t)$ soddisfa alla (4) nell'intervallo $0 \mapsto \tau$.

L'unicità della soluzione segue da precedenti risultati (vedere ad esempio [14]). D'altronde per il problema considerato, che è

di tipo « forte », è facile ricavare l'unicità da maggiorazioni analoghe a quelle di cui abbiamo fatto uso sopra. Possiamo concludere con il seguente

TEOREMA 1: *Il problema ha un'unica soluzione, in un intervallo $0 \mapsto \tau$, con $0 < \tau \leq T$, e τ abbastanza piccolo (in dipendenza da $\|u_0\|$ e da $\int_0^T |f(t)|^2 dt$).*

Se $f \in L^\infty(0 \mapsto T; N)$, basta prendere $\tau < \frac{1}{4k_4} (\|u_0\|^2 + C_f^2)^{-1/2}$, essendo C_f data dalla (8) ed essendo k_4 una costante dipendente solo da Ω .

OSSERVAZIONE: *Dal teorema di tipo locale dimostrato scaturisce in modo ovvio l'esistenza di una ed una sola soluzione nell'intervallo $0 \mapsto T$ tutte le volte che si possa stabilire una maggiorazione a priori per $\|u(t)\|$ in tale intervallo.*

OSSERVAZIONE: *Con la stessa tecnica di cui abbiamo fatto uso qui si dimostra anche facilmente la dipendenza continua delle soluzioni in $C(0 \mapsto \tau; N^1)$ dai valori iniziali, presi in N^1 .*

3. PROBLEMA B (Condizioni al contorno non omogenee).

Sia $u^* \in H^1(\Omega)$, con $\operatorname{div} u^* = 0$ e sia $f(t) \in L^2(0 \mapsto T; N)$. Ci proponiamo di trovare una soluzione del sistema (1), (2) che assuma gli stessi valori al contorno di u^* e che assuma prescritti valori iniziali. Precisamente, posto $u(t) = u^* + v(t)$, cerchiamo una soluzione del sistema (1), (2) definita in $0 \mapsto \tau$ (con $0 < \tau \leq T$) tale che $v(t)$ soddisfi alle condizioni a), b), c). Si imporrà ancora: $\operatorname{grad} p(t) \in L^2(0 \mapsto \tau; H^0)$. Il valore iniziale $u_0 = u^* + v_0$ sarà tale che $v_0 \in N^1$. Applicando ancora alla (1) l'operatore P si otterrà l'equazione

$$(10) \quad \frac{dv}{dt} + Av + M(u^*, v) = R(v) + g(t)$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} P[\Delta u^* - (u^* \cdot \operatorname{grad})u^* + f(t)] &= g(t) \\ P[(u^* \cdot \operatorname{grad})v + (v \cdot \operatorname{grad})u^*] &= M(u^*, v). \end{aligned}$$

Si riconosce subito che $g(t) \in L^2(0 \mapsto T; N)$; inoltre $M(u^*, v)$, per ogni fissato u^* , rappresenta una applicazione lineare continua di N^1 in N . Infatti si ha, tenendo presente che u^* , in virtù del teorema di immersione, è limitata,

$$\begin{aligned} |M(u^*, v)| &\leq |(u^* \cdot \text{grad})v| + |(v \cdot \text{grad})u^*| \leq \left\{ \int_{\Omega} |u^*(x)|^2 \left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{\Omega} |v(x)|^2 \left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2} \leq \sup_{x \in \Omega} |u^*(x)| \|v\| + \\ &+ \left\{ \int_{\Omega} |v(x)|^4 dx \right\}^{1/4} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/4} \leq \\ &\leq k_5 \|u^*\|_2 \|v\| = c \|v\| \end{aligned}$$

moltiplicando scalarmente la (10) membro a membro per Av si ottiene immediatamente una relazione analoga alla (7) e, da questa, la disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 \leq k_5 \{ \|v(t)\|^6 + c^2 \|v(t)\|^2 + |g(t)|^2 \}$$

Da questa si ottiene una limitazione a priori di tipo locale e quindi, procedendo come sopra, un teorema di esistenza (e unicità) di tipo locale.

Possiamo concludere:

TEOREMA 2: *Il problema B ha un'unica soluzione, in un intervallo $0 \mapsto \tau$, con $\tau > 0$ abbastanza piccolo (in dipendenza da $\|u^*\|_2$,*

$$\|v_0\|, \int_0^T |f(t)|^2 dt).$$

OSSERVAZIONE 1: *Il problema posto presuppone la risoluzione del seguente altro problema: costruire una funzione $u^* \in H^2(\Omega)$, a divergenza nulla, di cui sia assegnata la traccia su $\partial\Omega$. Ora, dai risultati di L. Cattabriga [1], si ha che, assegnato un vettore w su $\partial\Omega$, con $w \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, e con flusso su $\partial\Omega$ nullo, esiste una $u^* \in H^2(\Omega)$, a divergenza nulla, soddisfacente alla equazione $P\Delta u^* = 0$ e avente w come traccia su $\partial\Omega$.*

OSSERVAZIONE 2: *Il procedimento seguito si può ovviamente applicare all'equazione ottenuta dalla (10) per linearizzazione (cioè abolendo il termine $R(v)$). In questo caso si può dimostrare l'esistenza della soluzione in grande, cioè per l'intervallo $0 \mapsto T$ assegnato.*

PROBLEMA DELLA STABILITÀ

Supponiamo che nella (1) $f(t)$ sia indipendente da t . Sia dunque $f(t) = f \in N$. L'esistenza di una soluzione stazionaria assumente prescritti valori al contorno è stata dimostrata ¹⁾ da vari autori (anche per il problema esterno, di cui non ci occupiamo qui) (F. K. G. Odqvist [13], J. Leray [9], O. Ladyzenskaia [8], R. Finn [2], H. Fujita [3]). Sia dunque u^* una soluzione stazionaria e supponiamo $u^* \in H^2$; notiamo che (sempre secondo i risultati di L. Cattabriga [1]) ogni soluzione generalizzata soddisfa a questa condizione, non appena per i valori al contorno w si abbia $w \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ e, come abbiamo supposto, sia $f \in N$.

Ci occupiamo ora della stabilità di u^* rispetto all'insieme delle soluzioni assumenti i medesimi valori al contorno; queste soluzioni saranno intese nel senso del problema B. Ponendo ancora $u(t) = u^* + v(t)$ e tenendo presente che ora u^* è soluzione della equazione, si ricava

$$(11) \quad \frac{dv}{dt} + Av + M(u^*, v) = R(v).$$

Il problema della stabilità della u^* si traduce pertanto nel problema della stabilità della soluzione nulla della (11).

4. Sia A l'operatore introdotto nel paragrafo 1. Sia M una qualsiasi applicazione lineare continua di N^1 in N . Si avrà dunque $\|Mu\| \leq c_1 \|u\|$. In particolare potrà essere $M = M_{u^*}$, essendo M_{u^*} l'operatore $v \rightarrow M(u^*, v)$ introdotto sopra.

In questo § e nel successivo studieremo l'operatore $\tilde{A} = A + M$, allo scopo di giungere a migliorare le soluzioni di

¹⁾ L'unica condizione sostanzialmente restrittiva imposta ai dati è che il flusso sia separatamente nullo su ciascuna delle superficie di cui si compone la frontiera.

una equazione ad esso collegata (la (20)).

Pur senza modificare le notazioni, considereremo ora N e N^1 come spazi complessi.

Anzitutto considereremo l'operatore $\tilde{A}$ assegnato in N , con dominio di definizione uguale a N^1 e otterremo alcune semplici maggiorazioni. Posto $\tilde{A}u - \lambda u = g$, moltiplicando scalarmente membro a membro per u in N si ricava

$$(12) \quad \|u\|^2 + (Mu, u) - \lambda |u|^2 = (g, u).$$

Supponendo λ reale, si ottiene

$$(13) \quad \|u\|^2 - \lambda |u|^2 \leq |g| |u| + c_1 \|u\| |u|.$$

Da questa si ricava la maggiorazione

$$\left(-\frac{1}{4}c_1^2 - \lambda\right) |u|^2 \leq |g| |u|.$$

Perciò si ha, per $\lambda < -\frac{1}{4}c_1^2$,

$$(14) \quad \|(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}\|_{N \rightarrow N} \leq \frac{1}{-\lambda - \frac{1}{4}c_1^2}.$$

D'altra parte, dalla (13) si ottiene, posto $\lambda = 0$,

$$\|u\|^2 \leq 2 |g| |u| + c_1^2 |u|^2.$$

Questa permette di stabilire (tenendo conto della (3)) la chiusura dell'operatore $\tilde{A}$. In virtù del teorema di Hille-Yosida, $-\tilde{A}$ è generatore di un semigruppato fortemente continuo in N .

Ritorniamo ora alla (12), supponendo λ complesso, e prendiamo la parte immaginaria di ambo i membri:

$$\Im[(Mu, u)] - \Im(\lambda) |u|^2 = \Im(g, u).$$

Otteniamo:

$$\Im(\lambda) |u|^2 \leq |g| |u| + c_1 \|u\| |u|,$$

da cui, dividendo per $|u|$ ed elevando al quadrato:

$$(15) \quad \Im(\lambda)^2 |u|^2 \leq 2 |g|^2 + 2c_1^2 \|u\|^2.$$

Prendiamo ora la parte reale della (13); si ha

$$\|u\|^2 - \Re(\lambda) |u|^2 \leq c_1 \|u\| |u| + |g| |u|$$

da cui

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 - \Re(\lambda) |u|^2 \leq c_1^2 |u|^2 + \frac{1}{2c_1^2} |g|^2.$$

Sommando membro a membro questa con la (15), dopo averla moltiplicata per $\frac{1}{4c_1^2}$ si ottiene

$$(-\Re(\lambda) + \frac{1}{4c_1^2} \Im(\lambda)^2 - c_1^2) |u|^2 \leq \frac{1}{c_1^2} |g|^2$$

Da questa segue che lo spettro dell'operatore $\tilde{A}$ è tutto contenuto entro la parabola $\Re(\lambda) = \frac{1}{4c_1^2} \Im(\lambda)^2 - c_1^2$.

Inoltre si ha, posto $\lambda = \gamma + i\mu$, per ogni fissato γ ,

$$(16) \quad \|(\tilde{A} - (\gamma + i\mu)I)^{-1}\|_{N \rightarrow N} = O\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{per} \quad \mu \rightarrow \pm\infty.$$

L'operatore $\tilde{A}$ si può ritenere anche assegnato in N^1 , con dominio di definizione costituito dalla varietà lineare di N^2 formata dai punti u tali che $\tilde{A}u \in N^1$. Si riconosce facilmente che tale dominio è denso in N^1 e che $\tilde{A}$ è chiuso. Sia ora $\tilde{A}u - \lambda u = g$, con $g \in N^1$. Moltiplicando scalarmente per Au in N , si ricava

$$(17) \quad |Au|^2 + (Mu, Au) - \lambda \|u\|^2 = (g, Au)$$

da cui

$$|Au|^2 - \lambda \|u\|^2 \leq \|g\| \|u\| + c_1 \|u\| |Au|.$$

Procedendo come per la (14) si ricava la disuguaglianza analoga:

$$(18) \quad \| (\tilde{A} - \lambda I)^{-1} \|_{N^1 \rightarrow N^1} \leq \frac{1}{-\lambda - \frac{1}{4} c_1^2} \quad \text{per} \quad \lambda < -\frac{1}{4} c_1^2.$$

Perciò $-\tilde{A}$ è generatore di un semigruppato fortemente continuo anche in N^1 .

Ancora dalla (17), operando su di essa in modo del tutto simile a quello seguito per la (12), si ottiene la relazione analoga alla (16)

$$(19) \quad \| (\tilde{A} - (\gamma + i\mu)I)^{-1} \|_{N^1 \rightarrow N^1} = 0 \left(\frac{1}{\mu} \right) \quad \text{per} \quad \mu \rightarrow \pm\infty.$$

Consideriamo ora per $t \geq 0$ l'equazione lineare

$$(20) \quad \frac{dv}{dt} + Av + Mv = h(t)$$

con $h(t) \in L^2(0 \leq t \leq T; N)$ qualunque sia $T > 0$. Le soluzioni saranno sempre intese soddisfacenti alle condizioni *a*), *b*), *c*) del § 1.

Indicando con $\exp \{-t\tilde{A}\}$ il semigruppato generato (in N , oppure in N^1) da $-\tilde{A}$ le soluzioni dell'equazione (20) si possono rappresentare in questo modo:

$$(21) \quad v(t) = \exp \{-t\tilde{A}\} v_0 + \int_0^t \exp \{-(t-\tau)\tilde{A}\} h(\tau) d\tau.$$

Ci occorrono ora due maggiorazioni che è opportuno ricavare direttamente dalla (20). Poniamo nella (20) $h(t) = 0$ e moltiplichiamo scalarmente per $v(t)$ in N . Otteniamo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \|v\|^2 + (Mv, v) = 0$$

da cui

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \|v\|^2 \leq c_1 \|v\| \|v\|.$$

Da questa si ricava facilmente la limitazione

$$|v(t)|^2 + \int_0^t \exp(c_1^2(t-\tau)) \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq \exp(c_1^2 t) |v_0|^2.$$

Perciò, per $0 \leq t \leq 1$, si ha

$$\int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq c_2 |v_0|^2.$$

D'altra parte si ha: $\|v(t)\|^2 \leq c_3 \|v(t')\|^2$ per $0 \leq t' \leq t \leq 1$. Da questa si deduce che

$$\|v(t)\|^2 \leq \frac{c_3}{t} \int_0^t \|v(t')\|^2 dt' \leq \frac{c_3 c_2}{t} |v_0|^2.$$

Possiamo concludere con la disuguaglianza:

$$(22) \quad \|\exp(t\tilde{A})\|_{N \rightarrow N^1}^2 \leq c_4/t \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Prendiamo ora la (20). Moltiplicando scalarmente per Av , in N , otteniamo la relazione

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + |Av(t)|^2 + (Mv(t), Av(t)) = (h(t), Av(t))$$

e da questa la disuguaglianza:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + |Av(t)|^2 \leq c_1 \|v(t)\| |Av(t)| + |h(t)| |Av(t)|$$

da cui

$$(23) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \frac{1}{2} |Av(t)|^2 \leq |h(t)|^2 + c_1^2 \|v(t)\|^2.$$

Ponendo $v_0 = 0$, otteniamo facilmente la diseuguaglianza

$$(24) \quad \left\| \int_0^t \exp(- (t - \tau) \tilde{A}) h(\tau) d\tau \right\|^2 \leq c_5 \int_0^t |h(\tau)|^2 d\tau \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1.$$

Dalla (23) si ottiene inoltre, integrando,

$$(25) \quad \int_0^t |Av(\tau)|^2 d\tau \leq \|v_0\|^2 + 2c_1^2 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau + 2 \int_0^t |h(\tau)|^2 d\tau.$$

5. Siamo ora in grado di ottenere maggiorazioni delle soluzioni della (20) in grande (rispetto alla variabile t) sotto ipotesi particolari sullo spettro di $\tilde{A}$. Una prima maggiorazione che cercheremo successivamente di raffinare, è espressa dal seguente lemma.

LEMMA: *Lo spettro dell'operatore $\tilde{A}$ abbia tutto parte reale positiva. Allora, per le soluzioni della (20) vale la limitazione*

$$(26) \quad \|v(t)\|^2 + \int_0^t |Av(\tau)|^2 d\tau \leq c_6 \left\{ \|v_0\|^2 + \int_0^t |h(\tau)|^2 d\tau \right\}$$

essendo c_6 una costante opportuna, indipendente da t . ($t > 0$).

Anzitutto osserviamo che, per quanto detto nel § 4 circa l'ubicazione dello spettro di $\tilde{A}$ e per le proprietà ora ammesse, esiste un numero $\gamma > 0$ tale che per ogni λ appartenente allo spettro di $\tilde{A}$ si abbia $\Re(\lambda) > \gamma$.

Dimostriamo ora che, preso un tale γ , esiste una costante c_7 , tale che

$$(27) \quad \begin{aligned} & \left\| \exp \{ - t \tilde{A} \} \right\|_{N \rightarrow N} \leq c_7 \exp(-\gamma t) \\ & \left\| \exp \{ - t \tilde{A} \} \right\|_{N^1 \rightarrow N^1} \leq c_7 \exp(-\gamma t). \end{aligned}$$

Infatti, per ogni $t > 0$, vale la rappresentazione (cfr. [4], cap. 11)

$$\exp \{ - t \tilde{A} \} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{-t\lambda} (\tilde{A} - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

dove l'integrale è esteso ad un segmento parallelo all'asse immaginario di ascissa γ . Poniamo ora $\lambda = \gamma + i\mu$ ed eseguiamo una integrazione per parti. Otteniamo, prendendo la norma $N \rightarrow N$, oppure $N^1 \rightarrow N^1$ e tenendo presente la (16) e la (19):

$$\begin{aligned} (28) \quad \| \exp \{ - t \tilde{A} \} \| &\leq \frac{1}{2\pi} \exp(-\gamma t) \int_{-\infty}^{+\infty} \| t^{-1} \exp(-it\mu) \cdot \\ &\cdot (\tilde{A} - (\gamma + i\mu)I)^{-1} \| d\mu \leq \frac{1}{2\pi} t^{-1} \exp(-\gamma t) \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \| (\tilde{A} - (\gamma + i\mu)I)^{-1} \| d\mu \leq \frac{1}{2\pi} t^{-1} \exp(-\gamma t) \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \| (\tilde{A} - (\gamma + i\mu)I)^{-1} \|^2 d\mu \leq c_1 t^{-1} \exp(-\gamma t). \end{aligned}$$

Poichè il semigruppò $\exp \{ - t \tilde{A} \}$ è fortemente continuo sia in N che in N^1 si possono trovare maggiorazioni uniformi per la sua norma nell'intervallo $0 \leq t \leq 1$ (Lo stesso risultato si può ottenere con maggiorazioni dirette, dalla (20)). Se ne deduce la validità delle (27).

La seconda delle (27) permette subito di maggiorare il primo termine a secondo membro nella (21). Si avrà

$$(29) \quad \| \exp \{ - t \tilde{A} \} v_0 \| \leq c_7 \| v_0 \| \exp(-\gamma t).$$

Il secondo termine potrà essere scritto, per $t \geq 1$:

$$\int_0^t \exp \{ - \tau \tilde{A} \} h(t - \tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \exp \{ -\tau \tilde{A} \} h(t - \tau) d\tau + \\
&+ \int_0^1 \exp \{ -\tau \tilde{A} \} h(t - \tau) d\tau = v_1(t) + v_2(t) .
\end{aligned}$$

Si ha ora

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \int_0^1 \exp \{ -\tau \tilde{A} \} h(t - \tau) d\tau = \\
&= \int_0^1 \exp \{ -(1 - \eta) \tilde{A} \} h(t - 1 + \eta) d\eta .
\end{aligned}$$

Possiamo infine applicare la (24), ponendo in essa $t = 1$, ottenendo

$$(30) \quad \| v_1(t) \|^2 \leq c_5 \int_0^1 | h(t - 1 + \eta) |^2 d\eta = c_5 \int_0^1 | h(t - \tau) |^2 d\tau .$$

Teniamo ora presente che si ha, per $t \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\| \exp \{ -t \tilde{A} \} \|_{N \rightarrow N^1} &\leq \| \exp \{ -\tilde{A} \} \exp \{ -(t-1) \tilde{A} \} \| \leq \\
&\leq \| \exp \{ -\tilde{A} \} \|_{N \rightarrow N^1} \| \exp \{ -(t-1) \tilde{A} \} \|_{N^1 \rightarrow N^1} .
\end{aligned}$$

Applicando ora la (22), con $t = 1$, e la seconda delle (27), si ottiene

$$\| \exp \{ -t \tilde{A} \} \|_{N \rightarrow N^1} \leq c_8 \exp (-\gamma t) , \quad \text{per } t \geq 1 .$$

Si ha allora

$$\| v_2(t) \| \leq \int_1^t \| \exp \{ -\tau \tilde{A} \} h(t - \tau) \| d\tau \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_1^t \|\exp\{-\tau \tilde{A}\}\|_{N \rightarrow N^1} |h(t-\tau)| d\tau \leq \\ &\leq c_8 \int_1^t \exp(-\gamma T) |h(t-\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Sia ora γ' un numero tale che $0 < \gamma' < \gamma$. Si ha

$$\begin{aligned} (31) \quad &\|v_2(t)\|^2 \leq \\ &\leq c_8^2 \left\{ \int_1^t \exp(-(\gamma - \gamma')\tau) \exp(-\gamma'\tau) |h(t-\tau)| d\tau \right\}^2 \leq \\ &\leq c_8^2 \int_1^{+\infty} \exp(-2(\gamma - \gamma')\tau) d\tau \cdot \int_1^t \exp(-2\gamma'\tau) |h(t-\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Da questa e dalla (30) si ricava

$$\begin{aligned} (32) \quad &\left\| \int_0^t \exp\{-\tau \tilde{A}\} h(t-\tau) d\tau \right\|^2 \leq 2 \|v_1(t)\|^2 + 2 \|v_2(t)\|^2 \leq \\ &\leq c_9 \int_0^t \exp(-2\gamma'\tau) |h(t-\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

La disuguaglianza è stata ora dimostrata per $t \geq 1$, ma tenendo presente la (24) si riconosce immediatamente la sua validità per ogni $t \geq 0$, con una conveniente scelta della costante c_9 .

Dalla seconda delle (27) e dalla (32) si ricava intanto:

$$\begin{aligned} (33) \quad &\|v(t)\|^2 \leq c_{10} \left\{ \exp(-2\gamma t) \|v_0\|^2 + \right. \\ &\left. + \int_0^t \exp(-2\gamma'(t-\tau)) |h(\tau)|^2 d\tau \right\} \end{aligned}$$

dove è $0 < \gamma' < \gamma$ e la costante c_{10} è indipendente da t . Dalla (33) si ricava, integrando,

$$\int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq (2\gamma)^{-1} c_{10} \|v_0\|^2 + c_{10} \int_0^t d\eta \int_0^\eta \exp(-2\gamma'(\eta - \tau)) \cdot \\ \cdot \|h(\tau)\|^2 d\tau = (2\gamma')^{-1} c_{10} \|v_0\|^2 + (2\gamma)^{-1} c_{10} \int_0^t \|h(\tau)\|^2 d\tau.$$

Utilizzando la (25) si ottiene ora subito la (26). Il lemma risulta così dimostrato.

La (26) può essere migliorata. Sia infatti σ un numero reale > 0 , tale che lo spettro di $\tilde{A}$ si trovi a destra della parallela all'asse immaginario di ascissa σ . Eseguiamo nella (20) la sostituzione $w(t) = v(t) \exp \sigma t$; si ottiene l'equazione

$$(34) \quad \frac{dw}{dt} + \tilde{A}^* w = h^*(t)$$

dove si è posto

$$\tilde{A}^* = \tilde{A} - \sigma I = A + M - \sigma I \quad \text{e} \quad h^*(t) = \exp(\sigma t) h(t).$$

Osserviamo che l'operatore $\tilde{A}^*$ rientra fra quelli studiati nel § precedente e in questo. Infatti $M - \sigma I$ rappresenta una applicazione continua di N^1 in N . Inoltre è evidente che $\tilde{A}^*$ ha lo spettro con parte reale positiva. Possiamo allora applicare alla (34) il lemma 3, ottenendo la disuguaglianza

$$\|w(t)\|^2 + \int_0^t \|Aw(\tau)\|^2 d\tau \leq c^* \left\{ \|w_0\|^2 + \int_0^t \|h^*(\tau)\|^2 d\tau \right\}$$

da cui si ricava subito

$$(35) \quad \|v(t)\|^2 + \int_0^t \exp(-2\sigma(t - \tau)) \|Av(\tau)\|^2 d\tau <$$

$$\leq c^* \left\{ \exp(-2\sigma t) \|v_0\|^2 + \int_0^t \exp(-2\sigma(t-\tau)) |h(\tau)|^2 d\tau \right\}$$

dove la costante c^* non dipende da t .

6. Sia u^* una soluzione stazionaria del sistema di Navier-Stokes; indichiamo con M_{u^*} l'operatore $v \rightarrow M(u^*, v)$ introdotto nel § 3. Sussiste il seguente teorema di stabilità:

TEOREMA 3: *Se lo spettro dell'operatore $A + M_{u^*}$ ha tutto parte reale positiva, u^* è una soluzione stabile del sistema di Navier-Stokes.*

Possiamo fare uso della disuguaglianza (35). Applichiamo questa con un opportuno $\sigma > 0$, alla (11), ponendo $h(t) = R(v(t))$. Teniamo poi presente la maggiorazione (6). Così ricaviamo:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 + \int_0^t \exp(-2\sigma(t-\tau)) |Av(\tau)|^2 d\tau &\leq c^* \left\{ \exp(-2\sigma t) \|v_0\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \int_0^t \exp(-2\sigma(t-\tau)) |Av(\tau)| \|v(\tau)\|^2 d\tau \right\} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 &\leq c^* \exp(-2\sigma t) \|v_0\|^2 + \\ &\quad + \frac{c^{*2} k_2}{4} \int_0^t \exp(-2\sigma(t-\tau)) \|v(\tau)\|^4 d\tau. \end{aligned}$$

Ponendo $\psi(t) = \|v(t)\|^2 \exp(-2\sigma t)$ si ottiene la disequazione

$$\psi(t) \leq c^* \|v_0\|^2 + \frac{c^{*2} k_2}{4} \int_0^t \exp(-4\sigma\tau) \psi^2(\tau) d\tau.$$

Evidentemente, detta $z(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{dz}{dt} = \frac{c^* k_3^2}{4} \exp(-4\sigma t) z^3$$

assumendo il valore iniziale $z(0) = c^* \|v_0\|^2$, si ha per ogni $t \geq 0$, $\psi(t) \leq z(t)$. Da semplici calcoli si ottiene

$$\|v(t)\|^2 \leq \frac{c^* \|v_0\|^2 e^{-2\sigma t}}{\left(1 - \frac{k_3^2 c^{*4}}{8\sigma} (1 - e^{-4\sigma t}) \|v_0\|^2\right)^{1/2}}.$$

Si ha pertanto una limitazione a priori, valida per $0 \leq t < +\infty$, nel caso che $\|v_0\|^2 < (8\sigma/k_3^2 c^{*4})$. Da questa si ottiene la dimostrazione della stabilità asintotica della soluzione identicamente nulla; inoltre viene precisato che, nella norma $\|\cdot\|$, le soluzioni relative a valori iniziali piccoli subiscono un decremento esponenziale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CATTABRIGA L.: *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 31, 308-340, 1961.
- [2] FINN R.: *On the steady-states solutions of the Navier-Stokes equations, III*. Acta Math., 105, 197-244, 1961.
- [3] FUJITA H.: *On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations*.
- [4] HILLE E., PHILLIPS R.: *Functional analysis and semi-groups*. 1957.
- [5] KATO T., FUJITA H.: *On the nonstationary Navier-Stokes system*. (In corso di stampa su questi Rendiconti).
- [6] KISELEV A. A., O. A. LADYZENSKAIA: *Sull'esistenza e unicità della soluzione del problema non stazionario per un liquido viscoso incompressibile*. Izv. Akad. Nauk SSSR, 21, 655-680, 1957.
- [7] KREIN S. G.: *Le equazioni differenziali negli spazi di Banach e la loro applicazione all'idrodinamica*. Uspehi Mat. Nauk, XII, 73, 208-211, 1957.
- [8] LADYZENSKAIA O. A.: *Ricerche sulle equazioni di Navier-Stokes del movimento di un fluido incompressibile nel caso stazionario*. Uspehi Mat. Nauk, XIV, 3 (87), 75-97, 1959.

- [9] LERAY J.: *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*. J. Math. Pures Appl. IX, 12, 1-82, 1933.
- [10] LERAY J.: *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta Math., 63, 193-248, 1934.
- [11] LIN C. C.: *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge, 1955.
- [12] LIONS J. L.: *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine 2, 419-432, 1958.
- [13] ODQVIST F. K. G.: *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*. Math. Zeitschr., 32, 329-385, 1930.
- [14] PRODI G.: *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes*. Ann. Mat. Pura Appl., IV, 48, 173-182, 1959.
- [15] SOBOLEVSKI P. E.: *Sulle equazioni non stazionarie della idrodinamica dei liquidi viscosi*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 128, 1959.
- [16] VOROVICH I. I., YUDOVICH V. I.: *Moto stazionario di un liquido viscoso incompressibile*. Mat. Sbornik, 53 (95), 393-428, 1961.
- [17] WEYL H.: *The method of orthogonal projection in potential theory*. Duke Math. J., 7, 411-444, 1940.