

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI PROUSE

Analisi di alcuni classici problemi di propagazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 32 (1962), p. 338-373

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__338_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__338_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ANALISI DI ALCUNI CLASSICI PROBLEMI DI PROPAGAZIONE

Memoria () di GIOVANNI PROUSE (a Milano) (**)*

§ 1. Introduzione ¹⁾.

Sia Ω un insieme aperto, limitato e connesso dello spazio E_m ($x \equiv \{x_1, \dots, x_m\}$) e sia Γ la sua frontiera, che supporremo localmente lipschitziana; sia poi H^p ²⁾ lo spazio delle funzioni reali a quadrato sommabile in Ω insieme alle loro derivate (intese nel senso delle distribuzioni) fino all'ordine p compreso.

Supponiamo che, assegnato un operatore A , differenziale di ordine $2p$, si possa associargli una decomposizione del tipo

$$(1.1) \quad Au = \sum_{i,j}^{1 \dots s} A_{ij}^*(g_{ij}(x)A_j u)$$

(*) Pervenuta in redazione il 17 marzo 1962.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Politecnico, Milano.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961-62. Durante lo svolgimento di questo lavoro, l'autore ha usufruito di una borsa di studio del C.N.R.

¹⁾ L'impostazione del problema misto che daremo nel § I è dedotta da quella data da Lions nel suo libro [9] e, per i problemi al contorno relativi alle equazioni di tipo ellittico, in [8].

²⁾ Nel seguito scriveremo, per semplicità, H^p in luogo di $H^p(\Omega)$, ed analogamente per gli altri spazi che verranno introdotti.

dove le $g_{ij}(x)$ sono funzioni reali $\in L^\infty$ e gli A_i ($i = 1, \dots, s$) sono operatori lineari e continui da $\mathcal{D}$ in L^2 e da L^2 in $\mathcal{D}'$ ³⁾; con A_i^* si è indicato l'operatore aggiunto di A_i .

Sia $\mathcal{K}$ uno spazio di Hilbert $\subseteq L^2$, tale che l'immersione di $\mathcal{K}$ in L^2 sia continua e che $\mathcal{K}$ sia uno spazio normale di distribuzioni su Ω . Consideriamo lo spazio $\mathcal{E}$ delle funzioni reali $u \in \mathcal{K}$ tali che $A_i u$ (che, a priori è un elemento di $\mathcal{D}'$) appartenga a L^2 . Lo spazio $\mathcal{E}$ risulta hilbertiano se si pone:

$$(1.2) \quad (u, v)_{\mathcal{E}} = (u, v)_{\mathcal{K}} + \sum_{i=1}^s (A_i u, A_i v)_{L^2}$$

È infatti evidente che $\mathcal{E}$ è prehilbertiano; dimostriamo che esso è anche completo.

Sia $\{u_k\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{E}$; allora $\{u_k\}$ e $\{A_i u_k\}$ sono successioni di Cauchy rispettivamente in $\mathcal{K}$ e in L^2 che sono completi. Risulta perciò:

$$(1.3) \quad \|u_k - v\|_{\mathcal{K}} \rightarrow 0; \quad \|A_i u_k - w_i\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Essendo l'immersione di $\mathcal{K}$ in L^2 continua, dalla prima delle (1.3) segue:

$$(1.4) \quad \|u_k - v\|_{L^2} \rightarrow 0$$

In virtù dell'ipotesi che A_i è un operatore lineare e continuo da L^2 in $\mathcal{D}'$, dalla (1.4) segue che la successione $\{A_i u_k\}$ converge, nella topologia di $\mathcal{D}'$, verso l'elemento $A_i v \in \mathcal{D}'$. Dalla seconda delle (1.3) si deduce allora

$$A_i v = w_i$$

Con $\mathcal{E}_0$ indicheremo la chiusura di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{E}$.

All'operatore A definito dalla (1.1) associamo la forma bilineare

$$(1.5) \quad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{1\dots s} (g_{ij} A_i u, A_j v)_{L^2}$$

che, per la (1.2), è ovviamente continua su $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$.

³⁾ Con $\mathcal{D}$ indichiamo lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili a supporto compatto in Ω ; $\mathcal{D}'$ è lo spazio delle distribuzioni su Ω (duale di $\mathcal{D}$, munito della topologia forte).

Sia V un sottospazio di $\mathfrak{E}$, chiuso su $\mathfrak{E}$, con $\mathfrak{E}_0 \subseteq V \subseteq \mathfrak{E}$; poniamo, per definizione

$$(1.6) \quad (u, v)_{\mathfrak{r}} = (u, v)_{\mathfrak{E}}$$

Sia inoltre $\mathcal{S}(\Gamma)$ uno spazio di Banach, e sia γ un operatore lineare e continuo da V in $\mathcal{S}(\Gamma)$ nullo su $\mathfrak{E}_0$. Sia infine B un'applicazione lineare e continua, non dipendente da t , di V in $\mathcal{S}^*(\Gamma)$ (duale di $\mathcal{S}(\Gamma)$).

Definiamo la forma $((u, v))$ lineare e continua su $V \times V$ ponendo:

$$(1.7) \quad ((u, v)) = a(u, v) + \langle Bu, \gamma v \rangle$$

dove $\langle \rangle$ indica una forma bilineare e continua su $\mathcal{S}^*(\Gamma) \times \mathcal{S}(\Gamma)$.

Ciò premesso, supponiamo di aver assegnato le funzioni iniziali $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, gli spazi V e $\mathcal{S}(\Gamma)$, la forma $a(u, v)$, gli operatori γ e B ; risulta allora determinato un problema misto (secondo Hadamard) corrispondente « formalmente »⁴⁾ a tali dati.

Diremo che la funzione $u(x, t)$ è una soluzione debole in $\Omega \times J$ di tale problema per l'equazione

$$(1.8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au + f(x, t)$$

se sono verificate le seguenti condizioni:

a₁) $u(x, t)$ sia una funzione continua di $t \in J$ a valori in V e la sua derivata forte u_t sia una funzione debolmente continua a valori in L^2 ;

b₁) Detto $\alpha \vdash \beta$ un arbitrario intervallo $\subset J$ e $\Phi(x, t)$ una qualunque funzione appartenente, in $\alpha \vdash \beta$, alla stessa classe funzionale di $u(x, t)$ e, in più, tale che sia $\|\Phi(x, \alpha)\|_{\mathfrak{r}} = \|\Phi(x, \beta)\|_{\mathfrak{r}} = 0$, risulti

$$(1.9) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_t, \Phi_t)_{L^2} - ((u, \Phi)) + (f, \Phi)_{L^2}] dt = 0$$

$$(1.10) \quad \|u(x, 0) - \varphi(x)\|_{\mathfrak{r}} = 0 \quad \|u_t(x, 0) - \psi(x)\|_{L^2} = 0$$

⁴⁾ Tale « corrispondenza formale » verrà precisata nell'osservazione b) del § 3.

Come si può constatare, i problemi misti di tipo classico, con condizioni al contorno omogenee, rientrano, come casi particolari, nell'impostazione data sopra.

Nel § 2 verrà dimostrato un teorema di unicità ed esistenza del problema considerato.

Nel § 3 si esamineranno alcune classi di problemi misti con condizioni al contorno non omogenee e verranno precisate le ipotesi sotto le quali è possibile trasformare i problemi dati in altri con condizioni al contorno omogenee.

Si metteranno in luce, nel § 4, alcune proprietà della soluzione debole e verrà, in particolare, esaminato il problema di dare significato concreto all'equazione scritta in forma debole ed alle condizioni al contorno.

Nel § 5 si dimostrerà che, se i dati sono quasi-periodici, tutte le soluzioni deboli limitate sono q.p.; vengono così estesi recenti teoremi di Amerio [2].

Infine, nei §§ 6, 7 e 8, la teoria svolta verrà applicata a problemi misti, omogenei e non omogenei, concernenti l'equazione della membrana vibrante e l'equazione della piastra vibrante.

§ 2. Un teorema di esistenza ed unicità.

Dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 2.1: *Esiste una ed una sola soluzione debole del problema misto considerato nel § 1 per l'equazione (1.9), qualora siano verificate le seguenti ipotesi:*

a₁) Ω sia un insieme aperto, limitato e connesso.

b₁) La forma $((u, v))$ sia V -ellittica e hermitiana; risulti cioè:

$$(2.1) \quad ((u, u)) \geq \mu \|u\|_V^2, \quad ((u, v)) = ((v, u)) \\ (\mu > 0; u, v \in V)$$

c₁) I coefficienti $g_{ij}(x)$ appartengano a L^∞ e $f(x, t)$ sia una funzione di t a valori in L^2 , con $\|f(x, t)\|_{L^2}$ integrabile in $\alpha \vdash \beta$.

d₁) Le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ appartengano rispettivamente a V ed a L^2 .

e₁) L'immersione di V in L^2 sia completamente continua.

Dall'ipotesi b_2) segue [12], [17], che la forma $((u, v))$ definisce, per $u, v \in V$, un prodotto scalare in V di norma corrispondente equivalente alla norma $\|u\|_r$; indicheremo perciò nel seguito di questo paragrafo il prodotto scalare in V con la notazione $((u, v))$, mentre il prodotto scalare in L^2 verrà indicato con (u, v) .

Dette u, Φ due funzioni $\in V$, risulta (essendo l'immersione di V in L^2 continua):

$$(2.2) \quad |(u, \Phi)| \leq \|u\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} \leq r \|u\|_r \|\Phi\|_r$$

L'espressione (u, Φ) è quindi una forma bilineare continua in $V \times V$ ed esiste perciò una trasformazione S , lineare ed autoaggiunta, di V in sé tale che

$$(2.3) \quad (u, \Phi) = ((Su, \Phi)).$$

La trasformazione S è completamente continua; sia infatti $\{z_k\}$ una successione limitata di elementi $\in V$; per l'ipotesi e_2) si può estrarre da essa una sottosuccessione, che diciamo ancora $\{z_k\}$, convergente in L^2 . È allora

$$(2.4) \quad \begin{aligned} ((S(Z_m - Z_n), Z_m - Z_n)) &= \\ &= (Z_m - Z_n, Z_m - Z_n) \rightarrow 0 \quad \text{per } m, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La (2.4) dimostra, per un noto criterio [16], la completa continuità di S .

Indichiamo con $y_i(x)$ le autofunzioni di S e con μ_i i corrispondenti autovalori ($Sy_i = \mu_i y_i$). Essendo $(u, u) \geq 0$ e $(u, u) = 0$ solo per $u = 0$, gli autovalori sono tutti positivi e si può quindi porre $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i^2}$; inoltre la successione delle autofunzioni è completa in V ed in L^2 .

Da quanto si è detto segue, dalla (2.3), che valgono le relazioni:

$$(2.5) \quad (y_i, \Phi) = ((Sy_i, \Phi)) = \mu_i ((y_i, \Phi))$$

cioè

$$(2.6) \quad ((y_i, \Phi)) = \lambda_i^2 (y_i, \Phi).$$

Come è noto [1], [16], gli autovalori formano una successione tale che

$$(2.7) \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

Le corrispondenti autosoluzioni sono poi legate dalle condizioni di ortogonalità

$$(2.8) \quad (y_m(x), y_n(x)) = \left(\left(\frac{y_m(x)}{\lambda_m}, \frac{y_n(x)}{\lambda_n} \right) \right) = \delta_{mn}$$

Dette perciò $y(x)$ e $z(x)$ due funzioni appartenenti rispettivamente a V ed a L^2 , valgono le relazioni

$$(2.9) \quad y(x) = \sum_1^\infty \left((y(x), \frac{y_n(x)}{\lambda_n}) \right) \frac{y_n(x)}{\lambda_n} = \sum_1^\infty \lambda_n (y(x), y_n(x)) \frac{y_n(x)}{\lambda_n}$$

$$(2.10) \quad z(x) = \sum_1^\infty (z(x), y_n(x)) y_n(x).$$

Applichiamo le (2.9), (2.10) alla soluzione cercata $u(x, t)$ ed alla sua derivata $u_t(x, t)$; si ha:

$$(2.11) \quad u(x, t) = \sum_1^\infty \alpha_n(t) \frac{y_n(x)}{\lambda_n}$$

dove

$$\alpha_n(t) = \left(\left(u(x, t), \frac{y_n(x)}{\lambda_n} \right) \right) = \lambda_n (u(x, t), y_n(x)).$$

Inoltre:

$$(2.12) \quad u_t(x, t) = \sum_1^\infty \beta_n(t) y_n(x)$$

dove

$$\beta_n(t) = (u_t(x, t), y_n(x)).$$

Per le ipotesi fatte sulla $u(x, t)$, i coefficienti $\alpha_n(t)$ e $\beta_n(t)$ sono continui in $\alpha \mapsto \beta$ e si ha

$$(2.13) \quad \beta_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \alpha'_n(t).$$

Infatti, per le (2.6), (2.11), (2.12):

$$\beta_n(t) = (u_t, y_n) = \frac{d}{dt} (u, y_n) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\lambda_n} \left(\left(u, \frac{y_n}{\lambda_n} \right) \right) = \frac{1}{\lambda_n} \alpha'_n$$

Risulta quindi

$$(2.14) \quad u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha'_n(t)}{\lambda_n} y_n(x) .$$

È allora possibile, applicando un noto procedimento [1], [2], [7], dimostrare che la soluzione $u(x, t)$ esiste, è unica, ed è data dalla somma della serie, convergente uniformemente rispetto a t in ogni intervallo limitato:

$$(2.15) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + \right. \\ \left. + \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n(t - \eta) d\eta \right] \frac{y_n(x)}{\lambda_n}$$

dove

$$(2.16) \quad a_n = \left(\left(\varphi(x), \frac{y_n(x)}{\lambda_n} \right) \right) \\ b_n = (\psi(x), y_n(x)) \\ f_n(t) = (f(x, t), y_n(x)) .$$

Si dimostra inoltre che le $\alpha_n(t)$ sono dotate di derivate seconde e che la soluzione $u(x, t)$ è una funzione continua di t a valori in V , derivabile con continuità come funzione di t a valori in L^2 .

Posto poi

$$(2.17) \quad U(x, t) = \{u(x, t), u_t(x, t)\} \\ \|U(x, t)\|_{\mathbf{K}}^2 = \|u(x, t)\|_V^2 + \|u_t(x, t)\|_{L^2}^2 ,$$

vale una relazione di dipendenza continua della soluzione dai dati, espressa dalla formula (cfr. [1] pag. 410)

$$(2.18) \quad \|U(x, t)\|_{\mathbf{K}} \leq \|U(x, 0)\|_{\mathbf{K}} + \int_0^t \|f(x, \eta)\|_{L^2} d\eta .$$

§ 3. Alcuni problemi misti con condizioni al contorno non omogenee.

I problemi misti che rientrano nella formulazione del § 1 corrispondono, come si è detto, a condizioni al contorno omogenee. Ci proponiamo di esaminare ora alcune classi di problemi misti con condizioni al contorno non omogenee.

Nel seguito di questo paragrafo supporremo, per semplicità, che Ω sia di classe C^∞ ; per i casi particolari che verranno trattati nel § 8 potremo tuttavia fare su Ω ipotesi meno restrittive.

a) *Problemi con condizioni al contorno di tipo misto non omogenee, ma con dati di Dirichlet omogenei*⁵⁾.

Supponiamo $V \neq \emptyset$ e sia $g_1(t)$ una funzione di t a valori in $S^*(\Gamma)$.

La formulazione debole dei problemi che ora consideriamo è uguale a quella data nel § 1 per i problemi con condizioni al contorno omogenee, purchè si sostituisca alla (1.9) l'equazione

$$(3.1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_t, \Phi)_L - ((u, \Phi)) + \langle g_1, \gamma \Phi \rangle + (f, \Phi)_L] dt = 0$$

dove $\langle \rangle$ indica una forma bilineare continua su $S^*(\Gamma) \times S(\Gamma)$.

Dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 3.1: *È possibile ridurre il problema considerato ad un altro con condizioni al contorno omogenee (del tipo esaminato nei §§ 1 e 2) soddisfacente alle ipotesi del teorema 2.1, qualora siano verificate tutte le ipotesi di tale teorema ed inoltre:*

$f_2, g_1(t) \in C^1(\alpha, \beta; S^*(\Gamma))$ e $\|g_1'\|_{S^*(\Gamma)}$ sia integrabile in $\alpha \mapsto \beta$.

Risulta infatti anzitutto, essendo l'applicazione $u \rightarrow \gamma u$ continua da V in $S(\Gamma)$

$$(3.2) \quad |\langle g_1, \gamma \Phi \rangle| \leq \|g_1\|_{S^*(\Gamma)} \|\gamma \Phi\|_{S(\Gamma)} \leq M \|\Phi\|_V$$

⁵⁾ Per la trattazione di tali problemi nel caso ellittico vedi [12] cap. 2, § 9, b).

Esiste perciò una trasformazione lineare e continua T da $\mathfrak{S}^*(\Gamma)$ in V tale che

$$(3.3) \quad \langle g_1, \gamma\Phi \rangle = ((Tg_1, \Phi)) = ((\tilde{g}_1, \Phi)) .$$

Si avrà d'altra parte, per l'ipotesi f_2) e la linearità e continuità di T :

$$(3.4) \quad \tilde{g}_1(t) \in C^1(\alpha, \beta; V) ; \quad \| \tilde{g}_1'' \|_r \in L^1(\alpha, \beta)$$

La (3.1) può allora scriversi nella forma

$$(3.5) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_t, \Phi)_L - ((u, \Phi)) + ((\tilde{g}_1, \Phi)) + (f, \Phi)_L] dt = 0 .$$

Poniamo $w(x, t) = u(x, t) - \tilde{g}_1(x, t)$; per quanto si è detto sopra è chiaro che $w(x, t)$ appartiene alla medesima classe funzionale della $u(x, t)$. La (3.5) diventa:

$$(3.6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(w_t, \Phi)_L - ((w, \Phi)) + (\tilde{g}_{1t}, \Phi)_L + (f, \Phi)_L] dt = 0 .$$

Si ha d'altra parte

$$(3.7) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (\tilde{g}_{1t}, \Phi)_L dt = - \int_{\alpha}^{\beta} (\tilde{g}_{1tt}, \Phi)_L dt$$

e quindi, posto

$$(3.8) \quad \tilde{f}(x, t) = f(x, t) - \tilde{g}_{1tt}(x, t)$$

dalla (3.6) segue:

$$(3.9) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(w_t, \Phi)_L - ((w, \Phi)) + (\tilde{f}, \Phi)_L] dt = 0 .$$

Si osservi che, per la (3.4), la funzione $\tilde{f}(x, t)$ soddisfa all'ipotesi c_2) del teorema 2.1.

Le (1.10) si trasformano d'altra parte nelle relazioni

$$(3.10) \quad \|w(x, 0) - \tilde{\varphi}(x)\|_V = 0 \quad \|w_t(x, 0) - \tilde{\psi}(x)\|_{L^2} = 0$$

dove si è posto

$$(3.11) \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \tilde{g}_1(x, 0) \in V, \quad \tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \tilde{g}_{1,t}(x, 0) \in L^2.$$

b) Problemi con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee. Indichiamo con D_A^V lo spazio delle funzioni $u \in V$ tali che $Au \in L^2$, normalizzato con la norma del grafico. Vale il seguente teorema:

TEOREMA 3.2: *Data una funzione $g_2(t)$ a valori in $\mathcal{S}(\Gamma)$, esiste una funzione $w(t) \in L^2(\alpha, \beta; D_A^V)$ insieme alle sue prime due derivate, tale che*

$$(3.12) \quad Aw = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \gamma w = g_2$$

qualora siano verificate le seguenti ipotesi:

$$a_2) \quad g_2^{(k)}(t) \in L^2(\alpha, \beta; \mathcal{S}(\Gamma)) \quad (k = 0, 1, 2);$$

$$b_2) \quad u \rightarrow \{Au, \gamma u\} \text{ sia un isomorfismo di } D_A^V \text{ su } L^2 \times \mathcal{S}(\Gamma).$$

Osserviamo infatti che, per l'ipotesi b_2), esistono, per ogni t , tre funzioni $w, w_1, w_2 \in D_A^V$ tali che

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \gamma w &= g_2; \quad Aw = 0 \quad \text{in} \quad \Omega; \quad \|w\|_{D_A^V} \leq \nu \|g_2\|_{\mathcal{S}(\Gamma)} \\ \gamma w_1 &= g_2'; \quad Aw_1 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega; \quad \|w_1\|_{D_A^V} \leq \nu \|g_2'\|_{\mathcal{S}(\Gamma)} \\ \gamma w_2 &= g_2''; \quad Aw_2 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega; \quad \|w_2\|_{D_A^V} \leq \nu \|g_2''\|_{\mathcal{S}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Per la linearità dell'operatore γ , si ha poi

$$(3.14) \quad \gamma \left(w_1(t) - \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} \right) = g_2'(t) - \frac{g_2(t + \Delta t) - g_2(t)}{\Delta t}$$

ed inoltre, per le (3.13):

$$(3.15) \quad \left\| w_1(t) - \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} \right\|_{D_A^r} \leq \\ \leq \nu \left\| g'_2(t) - \frac{g_2(t + \Delta t) - g_2(t)}{\Delta t} \right\|_{S(r)}.$$

Dalla (3.15) segue immediatamente

$$(3.16) \quad w_1(t) = w'(t).$$

Analogamente si dimostra che

$$(3.17) \quad w_2(t) = w'_1(t).$$

Poichè d'altra parte $g''_2(t) \in L^2(\alpha, \beta; S(\Gamma))$, sarà pure, grazie all'ultima delle (3.13) ed alla (3.17): $w''(t) \in L^2(\alpha, \beta; D_A^r)$.

Il teorema è perciò dimostrato.

È chiaro come si possa utilizzare ora il teorema 3.2 per trasformare problemi con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee, del tipo:

$$(3.18) \quad \gamma u = g$$

in corrispondenti problemi con condizioni al contorno omogenee.

Supponiamo infatti che siano verificate le ipotesi del teorema 3.2 e poniamo

$$(3.19) \quad \tilde{u}(x, t) = u(x, t) - w(x, t).$$

La funzione $\tilde{u}(x, t)$ soddisfa le equazioni

$$(3.20) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = A \tilde{u} + f - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad \Omega \times J$$

$$\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x) - w(x, 0),$$

$$(3.21) \quad \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) - \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$(3.22) \quad \gamma \tilde{u} = 0.$$

Per quanto si è dimostrato nel teorema 3.2, il nuovo termine noto $f - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ soddisfa d'altra parte all'ipotesi c_2 del teorema 2.1 ed il problema considerato risulta quindi trasformato in un altro con condizioni al contorno omogenee.

OSSERVAZIONE: Nell'impostazione dei problemi misti con condizioni al contorno non omogenee di Dirichlet sarà necessario tener conto delle condizioni di compatibilità per i dati (che, nel caso omogeneo, si riassumevano nella condizione: $\varphi(x) \in V$). Più precisamente, per un problema misto con condizioni al contorno (3.18) bisognerà supporre che $\varphi(x) \in \mathfrak{E}$ e sia $\gamma\varphi = g(0)$.

§ 4. Osservazioni complementari

a) Si può constatare che la funzione $u(x, t)$ data dalla (2.15) è dotata di derivata seconda debole, come funzione di t a valori in L^2 , relativamente all'insieme V .

Occorre per questo dimostrare che, detta $v(x)$ una qualunque funzione $\in V$, esiste la derivata $\frac{d^2}{dt^2}(u(x, t), v(x))$.

Infatti, posto

$$(4.1) \quad v(x) = \sum_{\mathbf{I}^n} v_n \frac{y_n(x)}{\lambda_n}$$

risulta, per le (2.11), (2.15):

$$(4.2) \quad (u(x, t), v(x)) = \int_{\Omega} \left[\sum_{\mathbf{I}^n} \alpha_n(t) \frac{y_n(x)}{\lambda_n} \right] \left[\sum_{\mathbf{I}^n} v_n \frac{y_n(x)}{\lambda_n} \right] d\Omega = \\ = \sum_{\mathbf{I}^n} \frac{\alpha_n(t)}{\lambda_n^2} v_n = \sum_{\mathbf{I}^n} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + \right. \\ \left. + \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n(t - \eta) d\eta \right] v_n.$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{\mathbf{I}^n} \alpha_n''(t) \frac{v_n}{\lambda_n^2} = - \sum_{\mathbf{I}^n} \left[a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t - \frac{1}{\lambda_n} f_n(t) + \right. \\ \left. + \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n(t - \eta) d\eta \right] v_n.$$

Essendo $(f(x, t), v(x))_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \frac{v_n}{\lambda_n}$, questa serie converge, per quanto si è dimostrato sopra, uniformemente rispetto a t in ogni intervallo limitato; risulta quindi, per la (4.2):

$$(4.3) \quad \frac{d^2}{dt^2} (u(x, t), v(x)) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda_n} f_n + \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n(t - \eta) d\eta \right] v_n.$$

La (1.9) è allora equivalente all'equazione

$$(4.4) \quad (u_{tt}(x, t), v(x))_{L^2} + ((u(x, t), v(x))) - (f(x, t), v(x))_{L^2} = 0$$

per qualunque $v \in V$ e $t \in J$.

Poniamo infatti nella (1.9) $\Phi(x, t) = v(x)\eta(t)$, con $\eta(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, $\eta(\alpha) = \eta(\beta) = 0$, $v(x) \in V$; si ha

$$(4.5) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [\eta'(t)(u_t(x, t), v(x))_{L^2} - \eta(t)((u(x, t), v(x))) + \\ + \eta(t)(f(x, t), v(x))_{L^2}] dt = 0.$$

Integrando per parti il primo termine della (4.5), risulta:

$$(4.6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_{tt}(x, t), v(x))_{L^2} + ((u(x, t), v(x))) - \\ - (f(x, t), v(x))_{L^2}] \eta(t) dt = 0.$$

Data l'arbitrarietà di $\eta(t)$, dalla (4.6) segue immediatamente la (4.4).

b) L'osservazione a) ci permette di precisare in che senso si deve intendere che la soluzione debole $u(x, t)$ soddisfi all'equazione (1.9) ed alle condizioni al contorno omogenee considerate nel § 1.

Osserviamo anzitutto che, se $w \in \mathfrak{D}$, vale, per $u \in V$, la relazione

$$(4.7) \quad \langle Au, w \rangle = - ((u, w))$$

essendo $\langle \rangle$ una forma bilineare continua su $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}$.

Sostituendo la (4.7) nella (4.4), si ottiene:

$$(4.8) \quad (u_{,t}(x, t), w(x))_{L^2} - \langle Au(x, t), w(x) \rangle - \\ - (f(x, t), w(x))_{L^2} = 0$$

per ogni $w \in \mathcal{D}$, $t \in J$.

Dalla (4.8) segue che la (1.8) risulta verificata nel senso delle distribuzioni in Ω .

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, ricordiamo che ad esse abbiamo potuto, fino ad ora, attribuire un significato formale, ottenuto scrivendo formalmente, per $u, v \in V$, formule di Green valide per funzioni u più regolari.

Cerchiamo ora di dare un significato concreto alle condizioni al contorno omogenee, imponendo alla soluzione debole $u(x, t)$ qualche ulteriore ipotesi di regolarità (rispetto a t).

Supponiamo che $u_{,t}(x, t)$ appartenga, per ogni $t \in J$ allo spazio $\mathcal{K}^*$ (duale di $\mathcal{K}$); dalla (4.8) segue allora che $Au(x, t)$ appartiene, per ogni $t \in J$ a $\mathcal{K}^*$.

Consideriamo, per $u, v \in V$ la forma $v \rightarrow \langle Au, v \rangle - a(u, v)$; essa si annulla su $\mathcal{E}_0$ e risulta, per quanto si è detto sopra, lineare e continua su V . Esiste allora (cfr. [12] n. 9, b)) un ben determinato elemento $T(u) \in \mathcal{S}^*(\Gamma)$ tale che, per ogni $v \in V$, risulti:

$$(4.9) \quad \langle Au, v \rangle - a(u, v) = \langle T(u), \gamma v \rangle.$$

Le due forme $\langle \rangle$ che compaiono nella (4.9) rappresentano rispettivamente due forme bilineari continue su $\mathcal{K}^* \times \mathcal{K}$ e su $\mathcal{S}^*(\Gamma) \times \mathcal{S}(\Gamma)$. Sostituendo la (4.9) nella (1.8) e confrontando tale equazione con la (4.4), si deduce:

$$(4.10) \quad Bu(x, t) - T(u(x, t)) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{S}^*(\Gamma) \quad (t \in J).$$

La (4.10) ci permette di dare un'interpretazione concreta alle condizioni omogenee al contorno esaminate nel § 1.

c) In molte applicazioni si assume

$$V = H^p, \quad \mathcal{S}(\Gamma) = \prod_{j=0}^{p-1} H^{p-j-1/2}(\Gamma).$$

*Un noto teorema di Prodi [14] ci permette allora in tali casi di precisare quali condizioni sia necessario imporre a Γ perchè l'applicazione $u \rightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots \gamma_{p-1} u\}$ *) risulti lineare e continua da V in $S(\Gamma)$.*

§ 5. Quasi-periodicità delle soluzioni deboli.

Alla soluzione $u(x, t)$ data dalla (2.15) è possibile applicare un teorema dimostrato da Amerio [2] (cfr. anche Bochner [3]). Il teorema, di cui riportiamo solo l'enunciato, rimandando per la dimostrazione ai lavori citati, è il seguente.

TEOREMA 5.1: *Sia $f(x, t)$ q.p. come funzione di t a valori in L^p e sia $u(x, t)$ una soluzione debole del problema considerato nei §§ 1 e 2, tale che risulti $\|U(x, t)\|_x \leq M$ per $t \in J$. Allora $U(x, t)$ risulta q.p. come funzione a valori in K .*

Per i problemi non omogenei esaminati nel § 3 valgono poi i seguenti due teoremi.

TEOREMA 5.2: *Consideriamo un problema con condizioni al contorno di tipo misto non omogenee, ma con dati di Dirichlet omogenei (§ 3, a)) e supponiamo che siano verificate le ipotesi dei teoremi 3.1 e 5.1 ed inoltre che $g_k^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, 2$) siano q.p. come funzioni a valori in $S^*(\Gamma)$; allora la soluzione debole $U(x, t)$ risulta q.p. come funzione a valori in K .*

TEOREMA 5.3: *Consideriamo il problema non omogeneo esaminato nel § 3. b) (problema con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee).*

Supponiamo che siano verificate le ipotesi dei teoremi 3.2 e 5.1 ed inoltre che $g_k^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, 2$) siano q.p. come funzioni a valori in $S(\Gamma)$; allora la soluzione debole $U(x, t)$ risulta q.p. come funzione a valori in K .

Le dimostrazioni dei teoremi 5.2 e 5.3 seguono immediatamente, tenendo presente quanto si è detto nel § 3, dalla seguente proposizione.

*) Con $\gamma_k u$ ($k = 0, \dots, p-1$) indichiamo la derivata di ordine k , su Γ della u rispetto alla conormale esterna.

Siano X e Y due spazi di Banach e T una trasformazione lineare e continua da X in Y ; sia poi $g(t)$ una funzione q.p. di t a valori in X .

Allora la funzione $h(t) = Tg(t)$ risulta q.p. come funzione a valori in Y .

Essendo infatti T continua, si ha, per ogni $t \in J$:

$$(5.1) \quad \|h(t)\|_Y \leq \mu \|g(t)\|_X \quad (\mu > 0).$$

Consideriamo poi una successione reale $\{t_k\}$; essendo $g(t)$ q.p., è possibile estrarre da essa una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $\{t_k\}$, tale che risulti

$$(5.2) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|g(t + t_n) - g(t + t_m)\|_X = 0.$$

Dalle (5.1), (5.2) si ha allora, per la linearità di T :

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|h(t + t_n) - h(t + t_m)\|_Y &< \\ &\leq \mu \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|g(t + t_n) - g(t + t_m)\|_X = 0. \end{aligned}$$

La (5.3) dimostra la nostra proposizione.

§ 6. Primo esempio: equazione del secondo ordine.

Sia A un operatore hermitiano del secondo ordine; consideriamo, per l'equazione

$$(6.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au + f(x, t).$$

il seguente problema misto:

$$(6.2) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \Omega)$$

$$(6.3) \quad u|_{s_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N} + k(x)u|_{s_1} = 0$$

dove Γ_1 è un insieme chiuso $\subseteq \Gamma$ e si è posto $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$, $S_1 = \Gamma_1 \times J$, $S_2 = \Gamma_2 \times J$; $\frac{\partial u}{\partial N}$ è la derivata di u secondo la co-normale esterna a Γ .

Assumiamo, nella decomposizione di A , come operatori elementari gli operatori $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, m$); la (1.1) assume la forma:

$$(6.4) \quad Au = \sum_{j,k}^{1\dots m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - a(x)u \quad (a_{jk} = a_{kj})$$

dove $a_{jk}(x)$ e $a(x)$ sono funzioni $\in L^\infty$. Risulta poi:

$$(6.5) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k}^{1\dots m} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a(x)uv \right] d\Omega.$$

Nel seguito del presente paragrafo supporremo sempre che Γ sia localmente lipschitziana, che $f(x, t)$ sia una funzione di t a valori in L^2 , con $\|f(x, t)\|_{L^2}$ integrabile in $\alpha \mapsto \beta$ e che sia verificata la condizione di ellitticità:

$$(6.6) \quad \sum_{j,k}^{1\dots m} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \nu \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \quad (\nu > 0, x \in \Omega).$$

Il problema che ci proponiamo di trattare in questo paragrafo rientra, come caso particolare, nell'impostazione data nel § 1 qualora si assuma:

$\alpha)$ $\mathcal{K} = L^2$

$\beta)$ $\mathcal{E} = H^1$

$\gamma)$ $\gamma = \gamma_0$ operatore « traccia » sopra Γ di una funzione $\in H^1$

$\delta)$ $V =$ spazio delle funzioni $u \in H^1$, tali che $\gamma_0 u|_{\Gamma_1} = 0$

$\varepsilon)$ $\mathcal{S}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)$

$\zeta)$ $B = k(x)\gamma_0$

La forma $((u, v))$ può essere definita da una formula analoga alla (1.7):

$$(6.7) \quad \begin{aligned} ((u, v)) &= \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k}^{1\dots m} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a(x)uv \right] d\Omega + \langle k(x)\gamma_0 u, \gamma_0 v \rangle \\ &= \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k}^{1\dots m} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a(x)uv \right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} k(x)uv d\Gamma \end{aligned}$$

Diremo perciò che la funzione $u(x, t)$ è una soluzione debole del problema misto (6.2), (6.3) per l'equazione (6.1) se:

a_3) $u(x, t)$ è una funzione continua di $t \in J$ a valori in V e la sua derivata forte u_t è una funzione debolmente continua di t a valori in L^2 .

b_3) Sono soddisfatte le equazioni:

$$(6.8) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_t, \Phi_t)_{L^2} - ((u, \Phi))] + (f, \Phi)_{L^2} dt = 0$$

$$\|u(x, 0) - \varphi(x)\|_{H^1} = 0 \quad \|u_t(x, 0) - \psi(x)\|_{L^2} = 0$$

essendo $\Phi(x, t)$ una qualsiasi funzione soddisfacente alla a_2) e tale che $\|\Phi(x, \alpha)\|_{H^1} = \|\Phi(x, \beta)\|_{H^1} = 0$.

Per quanto riguarda l'interpretazione delle condizioni al contorno, è evidente che la prima delle (6.3) va intesa verificata in $H^{1/2}(\Gamma)$. Per interpretare la seconda delle (6.3), osserviamo che $\mathcal{K} = L^2$; supponiamo quindi, tenendo presente quanto si è detto nell'osservazione b) del § 4, che $u_{tt}(x, t)$ appartenga, per ogni $t \in J$, a L^2 .

La (4.9) si riduce, nel nostro caso, alla formula (cfr. Lions-Magenes [10])

$$(Au, v)_{L^2} - a(u, v) = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle \quad (u \in D_A^1, v \in H^1)$$

dove il simbolo $\langle \rangle$ indica una forma bilineare continua su $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Si ha perciò, per ogni $v \in V$

$$\langle (\gamma_1 u + k\gamma_0 u), \gamma_0 v \rangle = 0$$

da cui si deduce che la seconda delle (6.3) è verificata in $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Come si può immediatamente constatare, risultano senz'altro verificate, grazie alle ipotesi fatte all'inizio del presente paragrafo, le condizioni a_2), c_2), d_2), e_2) del teorema 2.1 (cfr. l'osservazione c) del § 4 e [13]).

Dalla (6.7) appare d'altra parte evidente che la forma $((u, v))$ è hermitiana; ci rimane perciò da dimostrare che essa è V -ellittica,

ossia che, per ogni $u \in V$, risulta:

$$((u, u)) \geq \mu \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 \quad (\mu > 0).$$

Ricordiamo, per questo, anzitutto i seguenti lemmi.

LEMMA 1: Sia $u(x)$ una funzione $\in \tilde{H}^1$, essendo $\tilde{H}^1$ lo spazio delle funzioni $\in H^1$ aventi valor medio nullo in Ω . Vale allora la relazione (disuguaglianza di Poincaré) [4]:

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \eta_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

LEMMA 2: Supponiamo che sia verificata una almeno delle seguenti condizioni:

- I) $u \in V$ (Γ_1 ha misura $(m-1)$ -dimensionale positiva);
- II) $u \in H^1$ ($\Gamma_2 = \Gamma$) e risulta $u(x) = 0$ per $x \in \Omega_0$, dove Ω_0 è un insieme $\subset \Omega$, avente misura m -dimensionale positiva.

Vale allora la relazione:

$$(6.9) \quad \int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \eta_2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

La dimostrazione segue immediatamente dal lemma 1.

Supponiamo, per esempio, che sia verificata la II); posto allora

$$c = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u d\Omega, \quad \tilde{u}(x) = u(x) - c,$$

$\tilde{u}(x) \in \tilde{H}^1$. Si ha perciò, per il lemma 1:

$$(6.10) \quad \int_{\Omega} \tilde{u}^2 d\Omega \leq \eta_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega = \eta_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

D'altra parte:

$$\int_{\Omega} (u - c)^2 d\Omega = \int_{\Omega} u^2 d\Omega - 2c \int_{\Omega} u d\Omega + c^2 \Omega = \int_{\Omega} u^2 d\Omega - c^2 \Omega.$$

Dalla (6.10) segue quindi:

$$(6.11) \quad \int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq c^2 \Omega + \eta_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega .$$

Posto $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$ si ha poi, essendo $u = 0$ in Ω_0 :

$$c = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_1} u d\Omega$$

da cui si ricava:

$$|c\Omega| \leq \left\{ \int_{\Omega_1} u^2 d\Omega \right\}^{1/2} = \sqrt{\Omega_1} \left\{ \int_{\Omega_1} u^2 d\Omega \right\}^{1/2}$$

ossia anche:

$$(6.12) \quad |c\sqrt{\Omega}| \leq \sqrt{\frac{\Omega_1}{\Omega}} \left\{ \int_{\Omega_1} u^2 d\Omega \right\}^{1/2}$$

Sostituendo la (6.12) nella (6.11) si ottiene:

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \frac{\Omega_1}{\Omega} \int_{\Omega} u^2 d\Omega + \eta_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$$

e quindi:

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \frac{\eta_1 \Omega}{\Omega - \Omega_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega .$$

Se invece è soddisfatta la I), ci si può ridurre al caso esaminato sopra prolungando la funzione $u = 0$ sopra un dominio esterno ad Ω , che aderisce ad Ω lungo Γ_1 .

LEMMA 3: Sia $a(x)$ una funzione $\in L^\infty$, tale che $a(x) \geq 0$ per $x \in \Omega$, con $a(x) \geq \delta > 0$ per $x \in \Omega_0$, dove Ω_0 è un sottoinsieme aperto di Ω .

Risulta allora, per $u \in H^1$:

$$(6.13) \quad \int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \eta_3 \int_{\Omega} \left[\sum_1^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + a(x) u^2 \right] d\Omega.$$

Osserviamo che, come è noto [5], poichè $u \in H^1$ e Γ è localmente lipschitziana, ci si può ridurre a dimostrare la (6.13) supponendo che u sia di classe $C^1(\bar{\Omega})$ e che Ω sia costituito da cubi di lato l a spigoli paralleli agli assi e intersecato dalle rette parallele agli assi in un unico segmento di lunghezza variabile λ , con $l \leq \lambda \leq 2l$.

Per la dimostrazione, si osservi anzitutto che, posto $\gamma_0 = 1/\delta$, risulta:

$$(6.14) \quad \int_{\Omega_0} u^2 d\Omega \leq \gamma_0 \int_{\Omega_0} \left[\sum_1^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + a(x) u^2 \right] d\Omega.$$

Sarà inoltre lecito, impiccolendo eventualmente Ω_0 , supporre che Ω_0 sia un cubo di lato ε , con spigoli paralleli agli assi coordinati.

Indichiamo con Ω_i l'intersezione di Ω con il cilindro retto indefinito avente come base la faccia di Ω_0 perpendicolare a x_i e generatrici parallele a x_i ; detta γ una costante opportuna, si ha:

$$(6.15) \quad \int_{\Omega_i} u^2 d\Omega \leq \gamma \int_{\Omega_i} \left[\sum_1^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + a(x) u^2 \right] d\Omega \quad (i = 1, \dots, m).$$

Per le ipotesi fatte su Ω , è infatti possibile ricoprire Ω_i (senza sovrapposizioni) mediante un numero finito $r \leq 2l/\varepsilon$ di insiemi $\Omega_{0,i}^k (k = 1, \dots, r)$ che si possono ottenere da Ω_0 , o da un suo sottoinsieme, mediante una traslazione parallela all'asse x_i , senza uscire da Ω .

Si ha allora, detto P un punto $\in \Omega_{0,i}^k$ e Q il corrispondente punto di Ω_0 :

$$u(P) = u(Q) + \int_Q^P \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i.$$

da cui, con ovvia maggiorazione:

$$(6.16) \quad \int_{\Omega_{0,i}^k} u^2 d\Omega \leq 2 \int_{\Omega_0} u^2 d\Omega + 4l^2 \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

Facendo variare nella (6.16) l'indice k tra 1 ed r e sommando le equazioni che così si ottengono con la (6.14), si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} u^2 d\Omega &= \int_{\Omega_0} u^2 d\Omega + \sum_{k=1}^r \int_{\Omega_{0,i}^k} u^2 d\Omega \leq (2r+1) \int_{\Omega_0} u^2 d\Omega + 4l^2 r \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega < \\ &\leq \gamma \int_{\Omega_i} \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + a(x) u^2 \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Se $\bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ non ricopre tutto Ω , ripetiamo lo stesso procedimento partendo, non più da Ω_0 , ma dagli m insiemi Ω_i (ciascuno dei quali ha misura $\geq l\varepsilon^{m-1}$); sarà così possibile dimostrare la (6.15) per $m(m-1)$ insiemi $\subset \Omega$, aventi ciascuno misura $> l^2\varepsilon^{m-2}$, e così via, fino a che non si sia ricoperto tutto Ω .

Poichè Ω ha misura finita, è chiaro che ciò avverrà ripetendo il procedimento un numero finito di volte.

LEMMA 4: *Supponiamo che Γ_2 abbia misura $(m-1)$ -dimensionale positiva; sia $k(x)$ una funzione $\in L^\infty(\Gamma_2)$, tale che $k(x) > 0$ per $x \in \Gamma_2$, con $k(x) \geq \delta > 0$ per $x \in \Gamma_2$, dove Γ_2 è un sottoinsieme aperto di Γ_2 . Risulta allora, per $u \in H^1$:*

$$(6.17) \quad \int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \eta_4 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega + \eta_5 \int_{\Gamma_2} k(x) u^2 d\Gamma.$$

Indichiamo con Ω_i quella parte di Ω che si proietta, parallelamente all'asse x_i , su Γ_2 ; si ha, analogamente alla (6.16):

$$\int_{\Omega_i} u^2 d\Omega \leq 4l \int_{\Gamma_2} u^2 d\Gamma + 4l^2 \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \leq \eta_5 \int_{\Gamma_2} k(x) u^2 d\Gamma + 4l^2 \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega$$

Il lemma si dimostra ripetendo il procedimento seguito per la dimostrazione del lemma 2.

LEMMA 5: Supponiamo che esista una funzione $u(x, t)$ soddisfacente alle condizioni $a_3), b_3)$ del presente paragrafo, con $a(x) = k(x) = 0$; inoltre Γ_1 sia vuoto. Allora, se le funzioni $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ hanno valor medio nullo in Ω (per $t \in J$), la soluzione $u(x, t)$ è a valori in $\tilde{H}^1$ e la sua derivata u_t è a valori in $\tilde{L}^2$ (spazio delle funzioni $\in L^2$, aventi valor medio nullo in Ω).

Osserviamo infatti che, se Γ_1 è vuoto, $\Phi(x, t)$ è una qualunque funzione continua di t valori in H^1 , dotata di derivata Φ_t debolmente continua come funzione a valori in L^2 e tale che $\|\Phi(x, \alpha)\|_{H^1} = \|\Phi(x, \beta)\|_{H^1} = 0$.

Assumiamo allora $\Phi(x, t) = \eta(t)$, con $\eta(t)$ funzione continua insieme alla sua derivata $\eta'(t)$ e tale che $\eta(\alpha) = \eta(\beta) = 0$. La prima delle $b_3)$ diventa allora:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\eta'(t) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) d\Omega + \eta(t) \int_{\Omega} f(x, t) d\Omega \right] dt = 0$$

ossia anche, ricordando che, per ipotesi, $\int_{\Omega} f(x, t) d\Omega = 0$:

$$(6.18) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \eta'(t) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) d\Omega dt = 0.$$

Poichè $\eta'(t)$ è una funzione continua arbitraria, tale che $\int_{\alpha}^{\beta} \eta'(t) dt = 0$, dalla (6.18) si ricava:

$$(6.19) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) d\Omega = \text{cost} = A$$

cioè

$$(6.20) \quad \int_{\Omega} u(x, t) d\Omega = At + B.$$

Si ha poi, per le ipotesi fatte:

$$\int_{\Omega} u(x, 0) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi(x) d\Omega = B = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, 0) d\Omega = \int_{\Omega} \psi(x) d\Omega = A = 0$$

e, di conseguenza, per le (6.19), (6.20)

$$(6.21) \quad \int_{\Omega} u(x, t) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} d\Omega = 0.$$

Dal lemma 5 segue immediatamente il

LEMMA 6: *Se $a(x) = k(x) = 0$ e se Γ_1 è vuoto, è sempre lecito supporre che la soluzione del problema (6.2), (6.3) per l'equazione (6.1) sia una funzione a valori in $\tilde{H}^1$, dotata di derivata a valori in $\tilde{L}^2$.*

Posto infatti:

$$F(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(x, t) d\Omega, \quad G(t) = \int_0^t (t - \eta) F(\eta) d\eta,$$

$$\Phi = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(x) d\Omega, \quad \Psi = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \psi(x) d\Omega,$$

effettuiamo il cambiamento di funzione incognita definito dalla relazione

$$(6.22) \quad z(x, t) = u(x, t) - \Psi t - G(t) - \Phi.$$

Tale funzione soddisfa, come si può immediatamente constatare, le ipotesi del lemma 5.

LEMMA 7: *Supponiamo che siano verificate le ipotesi del lemma 6; è allora lecito, nella dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità, supporre che la funzione $\Phi(x, t)$, oltre a soddisfare alla condizione a_3), sia a valori in $\tilde{H}^1$.*

Posto infatti

$$(6.23) \quad \Phi(x, t) = \Phi_0(x, t) + \bar{\Phi}(t)$$

dove $\Phi_0(x, t)$ è a valor medio nullo in Ω , osserviamo che, potendosi supporre per i lemmi 5 e 6 che $u(x, t)$ è a valori in $\tilde{H}^1$ e $u_t(x, t)$

è a valori in $\tilde{L}^2$, risulta

$$(6.24) \quad \begin{aligned} (u_t, \Phi_t)_{L^2} &= (u_t, \Phi_{0t})_{L^2}, \\ ((u, \Phi)) &= ((u, \Phi_0)), \\ (f, \Phi)_{L^2} &= (f, \Phi_0)_{L^2}. \end{aligned}$$

La prima delle b_s) si può perciò scrivere, nelle ipotesi poste:

$$(6.25) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_t, \Phi_{0t})_{L^2} - ((u, \Phi_0)) + (f, \Phi_0)_{L^2}] dt = 0.$$

I lemmi sopra riportati ci permettono di dare condizioni sufficienti perchè sia verificata l'ipotesi b_2) del teorema 2.1.

Supponiamo infatti, in un primo tempo, che non risulti contemporaneamente $\Gamma_2 = \Gamma$, $a(x) = 0$ per $x \in \Omega$, $k(x) = 0$ per $x \in \Gamma_2$ (nel senso precisato dai lemmi 3 e 4). Si ha allora, per le (6.9), (6.13), (6.17):

$$(6.26) \quad \int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \eta_7 \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + a(x) u^2 \right] d\Omega + \eta_8 \int_{\Gamma_1} k(x) u^2 d\Gamma$$

Ricordando le (5.8), si ottiene dalla (6.26):

$$(6.27) \quad \int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \eta_9 \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k=1}^{1 \dots m} a_{j,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x) u^2 \right] d\Omega + \\ + \eta_8 \int_{\Gamma_1} k(x) u^2 d\Gamma$$

Si ha poi, applicando le (6.27), (6.6):

$$(6.28) \quad \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + u^2 \right] d\Omega = \|u\|_7^2 \leq \\ \leq \eta_{11} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k=1}^{1 \dots m} a_{j,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x) u^2 \right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} k(x) u^2 d\Gamma \right\} = \\ = \eta_{11} ((u, u)).$$

Dalla (6.28) si deduce la V -ellitticità di $((u, v))$.

Vale perciò il seguente teorema

TEOREMA 6.1: *Esiste una ed una sola soluzione del problema (6.2), (6.3) per l'equazione (6.1) qualora siano verificate le seguenti ipotesi:*

$a_4)$ Ω sia un insieme aperto, limitato e connesso e Γ sia localmente lipschitziana

$b_4)$ I coefficienti $a_{jk}(x)$ e $a(x)$ appartengono a L^∞ e $k(x) \in L^\infty(\Gamma_2)$; risulti inoltre:

$$\sum_{j,k}^{1\dots m} a_{jk} \xi_j \xi_k \geq \nu \sum_j^m \xi_j^2 \quad (\nu > 0, x \in \Omega)$$

$$a(x) \geq 0 (x \in \Omega), \quad k(x) \geq 0 (x \in \Gamma_2)$$

e sia verificata almeno una delle seguenti condizioni:

I) Γ_1 abbia misura $(m-1)$ -dimensionale positiva;

II) Risulti $a(x) \geq \delta > 0$ per $x \in \Omega_0$ (sottoinsieme aperto di Ω);

III) Risulti $k(x) \geq \delta > 0$ per $x \in \Gamma_2$ (sottoinsieme aperto di Γ_2).

$c_4)$ $f(x, t)$ sia una funzione continua di t a valori in L^2 e la sua norma $\|f(x, t)\|_{L^2}$ sia integrabile in $\alpha \vdash \beta$.

$d_4)$ Le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ appartengano rispettivamente a V ed a L^2 .

Supponiamo ora che Γ_1 sia vuoto e che $a(x) = 0$, $k(x) = 0$; sarà allora $V = H^1$ ed inoltre

$$(6.29) \quad ((u, v)) = \int_{\Omega} \sum_{j,k}^{1\dots m} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega.$$

Per quanto si è dimostrato nei lemmi 5, 6, 7, sarà lecito supporre che sia la soluzione $u(x, t)$ che la funzione $\Phi(x, t)$ siano a valori in $\tilde{H}^1$.

In virtù della (6.6) e del lemma 1 si ha allora, detta u una

qualsiasi funzione $\in \tilde{H}^1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{j,k}^{1\dots m} a_{j,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Omega &\geq \nu \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega \geq \\ &\geq \eta_{12} \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + u^2 \right] d\Omega = \eta_{12} \|u\|_V^2 = \eta_{12} \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Si ha così il

TEOREMA 6.2: *Il teorema 6.1 continua a valere anche se risulta contemporaneamente $\Gamma = \Gamma_2$, $a(x) = 0$ per $x \in \Omega$, $k(x) = 0$ per $x \in \Gamma$.*

OSSERVAZIONE: Come è noto [1], [7], qualora $\Gamma_1 = \Gamma$, il teorema 6.1 vale sotto le seguenti ipotesi, meno restrittive:

- a_5) Ω sia un insieme aperto, limitato e connesso;
- b_5) I coefficienti $a_{j,k}(x)$ e $a(x)$ appartengano a L^∞ ;
- c_5) $f(x, t)$ sia una funzione continua di t a valori in L^2 e la sua norma $\|f(x, t)\|_{L^2}$ sia integrabile in $\alpha \vdash \beta$;
- d_5) $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ appartengano rispettivamente a H_0^1 ed a L^2 .

§ 7. Secondo esempio: equazione del quarto ordine.

Nel presente paragrafo ci proponiamo di esaminare due dei problemi misti più interessanti che si possono porre per l'equazione

$$(7.1) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^2} = \Delta^2 u - b(x)u + f(x, t)$$

essendo Δ l'operatore di Laplace e Δ^2 il suo quadrato.

1) *Problema misto con condizioni al contorno omogenee di Dirichlet (piastra incastrata lungo il bordo).*

Dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 7.1: *Esiste in $\Omega \times J$ una ed una sola soluzione debole dell'equazione (7.1) soddisfacente alle condizioni iniziali ed*

al contorno

$$(7.2) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x) & (x \in \Omega) \\ u|_s &= 0, & \frac{\partial u}{\partial n}|_s &= 0 \end{aligned}$$

qualora siano verificate le seguenti ipotesi:

$a_6)$ $b(x) \in L^\infty$ e sia $b(x) \geq 0$ per $x \in \Omega$;

$b_6)$ $f(x, t)$ sia una funzione di t a valori in L^2 e $\|f(x, t)\|_{L^2}$ sia integrabile in $\alpha \mapsto \beta$;

$c_6)$ $\varphi(x) \in H_0^2$ e $\psi(x) \in L^2$;

$d_6)$ Ω sia un insieme aperto, limitato e connesso.

Assumiamo, nella decomposizione di Δ^2 , come operatori elementari gli operatori $\partial^2/\partial x_j \partial x_k$, ponendo

$$(7.3) \quad \Delta^2 u = \sum_{j,k}^{1\dots m} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right).$$

Dalla (7.3) si ricava, ricordando la (1.5):

$$(7.4) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{j,k}^{1\dots m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} d\Omega.$$

Il problema che stiamo trattando è un caso particolare di quello esaminato nel § 1 quando si assuma:

$\alpha)$ $\mathcal{K} = L^2$;

$\beta)$ $\mathcal{E} = H^2$;

$\gamma)$ $V = H_0^2$;

$\delta)$ $\gamma = \{\gamma_0, \gamma_1\} = B = 0$.

Posto

$$(7.5) \quad ((u, v)) = a(u, v) + (bu, v)_L$$

diremo che $u(x, t)$ è una soluzione debole del problema (7.2) per l'equazione (7.1) se:

$a_7)$ $u(x, t)$ è una funzione continua di $t \in J$ a valori in H_0^2 e la sua derivata forte u_t è una funzione debolmente continua di t a valori in L^2 ;

b.) Sono soddisfatte le relazioni ⁷⁾:

$$(7.6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_t, \Phi)_L - ((u, \Phi)) + (f, \Phi)_L] dt = 0$$

$$\|u(x, 0) - \varphi(x)\|_{H^1} = 0, \quad \|u_t(x, 0) - \psi(x)\|_{L^2} = 0$$

essendo $\Phi(x, t)$ una qualsiasi funzione soddisfacente alla condizione α_7) e tale che $\|\Phi(x, \alpha)\|_{H^1} = \|\Phi(x, \beta)\|_{H^1} = 0$.

Come nel caso dell'equazione del secondo ordine, si vede immediatamente che, se sono verificate le ipotesi del teorema 7.1, e se si dimostra che

$$(7.7) \quad ((u, u)) \geq \mu \|u\|_{H^1}^2$$

sono pure soddisfatte le ipotesi del teorema 2.1 ed il teorema 7.1 risulta perciò dimostrato.

Per dimostrare la (7.7) osserviamo che, come è noto, la forma $\alpha(u, v)$ data dalla (7.4) definisce, per le funzioni $u \in H_0^1$, una norma equivalente alla norma $\|u\|_{H^1}$; essendo poi $b(x) \geq 0$ per $x \in \Omega$, risulta, per ogni $u \in H_0^1$:

$$(7.8) \quad ((u, u)) \geq \alpha(u, u) \geq \mu \|u\|_{H^1}^2.$$

Il teorema è perciò dimostrato.

II) *Problema misto con condizioni al contorno omogenee, corrispondenti al caso di una piastra appoggiata lungo il bordo.*

Consideriamo, sempre per l'equazione (7.1), il seguente problema misto:

$$(7.9) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & (x \in \Omega) \\ u|_s &= 0, \quad \Delta u + k(x)\varrho(x) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_s = 0 \end{aligned}$$

⁷⁾ La prima delle (7.6) si ottiene tenendo presente la formula [8]:

$$(\Delta^2 u, v)_L = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) - S(u) \right] v d\Gamma - \int_{\Gamma} T(u) \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma + \alpha(u, v)$$

dove $\Delta^2 u$ si intende decomposto secondo la (6.3) e $S(u)$, $T(u)$ sono opportuni operatori differenziali di frontiera.

dove $k(x)$ è un parametro elastico positivo e $\rho(x)$ è la curvatura di Γ ; risulta pertanto:

$$(7.10) \quad h(x) = k(x)\rho(x) \geq 0 \quad (x \in \Gamma).$$

Supponiamo, per semplicità che Ω sia di classe C^∞ ; decomponiamo l'operatore Δ^2 negli operatori elementari Δ :

$$(7.11) \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) .$$

Risulterà allora:

$$(7.12) \quad a(u, v) = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} .$$

Tenendo presente le notazioni introdotte nel § 1, assumiamo ora:

$$\alpha) \mathcal{K} = H_0^1;$$

$\beta) \mathcal{E} = V =$ spazio delle funzioni $u \in H_0^1$, tali che $\Delta u \in L^2$; tale spazio coincide d'altra parte, come è noto, con $H^2 \cap H_0^1$ e potremo quindi assumere $(u, v)_V = (u, v)_{H^2}$;

$$\gamma) \gamma = \gamma_1;$$

$$\delta) S(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma).$$

Ricordiamo che, grazie a noti risultati di Prodi [14], le applicazioni $u \rightarrow \gamma_0 u$ e $u \rightarrow \gamma_1 u$ sono, nelle ipotesi fatte su Ω , lineari e continue da H^2 su $H^{3/2}(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$ rispettivamente.

Introduciamo la forma $((u, v))$, bilineare e continua su $V \times V$, definita dalla relazione

$$(7.13) \quad \begin{aligned} ((u, v)) &= a(u, v) + (bu, v)_{L^2} + \int_{\Gamma} h\gamma_1 u \gamma_1 v d\Gamma = \\ &= (\Delta u, \Delta v)_{L^2} + (bu, v)_{L^2} + \int_{\Gamma} h\gamma_1 u \gamma_1 v d\Gamma . \end{aligned}$$

Diremo che $u(x, t)$ è una soluzione debole del problema (7.9) per l'equazione (7.1) se:

$$a_s) \quad u(x, t) \text{ è una funzione continua di } t \in J \text{ a valori in } H^2 \cap H_0^1;$$

$u_t(x, t)$ sia inoltre una funzione debolmente continua a valori in L^2 ;
 b_8) Sono soddisfatte le relazioni

$$(7.14) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(u_t, \Phi_t)_{L^2} - ((u, \Phi)) + (f, \Phi)_{L^2}] dt = 0$$

$$\|u(x, 0) - \varphi(x)\|_{H^1} = 0, \quad \|u_t(x, 0) - \psi(x)\|_{L^2} = 0$$

essendo $\Phi(x, t)$ una qualsiasi funzione soddisfacente alla condizione a_8) e tale che $\|\Phi(x, \alpha)\|_{H^1} = \|\Phi(x, \beta)\|_{H^1} = 0$.

Vediamo in che senso risultano verificate le condizioni al contorno (7.9).

È evidente che la terza delle (7.9) risulta, per quanto si è detto sopra, verificata in $H^{3/2}(\Gamma)$.

Per interpretare la quarta delle (7.9), osserviamo che $\mathcal{K} = H_0^1$ e quindi $\mathcal{K}^* = H^{-1}$; la (4.9) si riduce nel nostro caso alla seguente formula di Green:

$$(7.15) \quad \langle \Delta^2 u, v \rangle = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} - \langle \gamma_0 \Delta u, \gamma_1 v \rangle$$

valida per le funzioni u tali che $\Delta u \in L^2$, $\Delta^2 u \in H^{-1}$ e per $v \in H^2 \cap H_0^1$. La (7.15) segue dalla relazione (cfr. Lions-Magenes [10] Th. 4.3):

$$(u, \Delta v)_{L^2} - \langle \Delta u, v \rangle = \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle$$

valida per $u \in \mathcal{K}_d^0$ (spazio delle funzioni $u \in L^2$ con $\Delta u \in H^{-1}$) e $v \in H^2 \cap H_0^1$, sostituendo Δu al posto di u . I due simboli $\langle \rangle$ che compaiono nella (7.15) rappresentano forme bilineari continue rispettivamente su $H^{-1} \times H_0^1$ e su $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Dalle (7.13), (7.15) segue allora, per ogni $v \in H^2 \cap H_0^1$:

$$(7.16) \quad \int_{\Gamma} h \gamma_1 u \gamma_1 v d\Gamma + \langle \gamma_0 \Delta u, \gamma_1 v \rangle = 0.$$

Possiamo quindi concludere che se $u_{tt}(x, t)$ è, per ogni $t \in J$, a valori in H^{-1} , risulta, in $H^{-1/2}(\Gamma)$

$$(7.17) \quad h(x) \gamma_1 u + \gamma_0 \Delta u = 0.$$

Dimostriamo ora il seguente teorema.

TEOREMA 7.2: *Esiste una ed una sola soluzione debole del problema (7.9) per l'equazione (7.1) qualora siano verificate le seguenti ipotesi:*

- $a_2)$ Ω sia un insieme aperto, limitato e connesso, di classe C^∞ ;
- $b_2)$ $b(x) \in L^\infty$ e risulti $b(x) \geq 0$ per $x \in \Omega$;
- $c_2)$ $h(x) \in L^\infty(\Gamma)$;
- $d_2)$ $f(x, t)$ sia una funzione continua di t a valori in L^2 , con $\|f(x, t)\|_{L^2}$ integrabile in $\alpha \vdash \beta$;
- $e_2)$ Le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ appartengano rispettivamente a V ed a L^2 .

Osserviamo infatti che, se sono verificate le ipotesi del presente teorema, risultano senz'altro verificate le ipotesi $a_2)$, $c_2)$, $d_2)$, $e_2)$ del teorema 2.1. In particolare, poichè $V \subset H_0^1$, l'immersione di V in L^2 è completamente continua.

Dimostriamo che anche la condizione $b_2)$ è soddisfatta, ossia che:

$$(7.18) \quad ((u, u)) \geq \mu \|u\|_{L^2}^2; \quad ((u, v)) = ((v, u)) \quad (\mu > 0, u \in V).$$

Dalla (7.13) si deduce anzitutto che la seconda delle (7.18) è certamente verificata.

Vale d'altra parte [12], per una qualsiasi funzione $\in H^2 \cap H_0^1$, la maggiorazione

$$(7.19) \quad \|u\|_{H^1} \leq \nu \|Au\|_{L^2} \quad (\nu > 0).$$

Risulta perciò

$$(7.20) \quad \begin{aligned} ((u, u)) &= \|Au\|_{L^2}^2 + (bu, u)_{L^2} + \int_{\Gamma} h(x) \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 d\Gamma \geq \\ &\geq \|Au\|_{L^2}^2 \geq \nu_1 \|u\|_{H^1}^2 = \nu_1 \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Il teorema è quindi dimostrato.

§ 8. Equazioni con condizioni al contorno non omogenee.

Nel presente paragrafo prenderemo ancora in considerazione le equazioni esaminate nei paragrafi 6 e 7, considerando però

per esse dei problemi con condizioni al contorno non omogenee.

1) Consideriamo l'equazione (6.1) e sostituiamo alle condizioni al contorno (6.3) la seguente:

$$(8.1) \quad u|_s = g(t) .$$

Vale allora, come è stato dimostrato in [15] per un'equazione leggermente più generale della (6.1) il seguente

TEOREMA 8.1: *È possibile ricondurre la risoluzione del problema considerato a quella di un analogo problema con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee qualora siano verificate le seguenti ipotesi:*

$$\begin{aligned} a_{10}) \quad & g^{(k)}(t) \in L^2(\alpha, \beta; H^{1/2}(\Gamma)) (k = 0, 1, 2); \\ b_{10}) \quad & \Gamma \text{ sia localmente lipschitziana.} \end{aligned}$$

II) Sostituiamo ora le (6.3) con le condizioni

$$(8.2) \quad u|_{s_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N} + k(x)u|_{s_1} = g(t) .$$

Per risolvere questo problema applicheremo la teoria generale esposta nel § 3 a).

Supponiamo che Γ sia localmente lipschitziana; lo spazio $\mathfrak{S}(\Gamma)$ coincide, nel presente caso, con $H^{1/2}(\Gamma)$ (cfr. § 6, ε)).

Tenendo perciò presente il teorema 3.1, possiamo concludere che è possibile ridurre il problema (8.2) ad un altro ad esso analogo, ma omogeneo, qualora risulti:

$$(8.3) \quad g(t) \in C^1(\alpha, \beta; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad \|g''\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \in L^1(\alpha, \beta)$$

III) Consideriamo ora l'equazione (7.1); in luogo delle condizioni al contorno (7.3) imponiamo le seguenti:

$$(8.4) \quad u|_s = g_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_s = g_2(t) .$$

Supponiamo, per semplicità, che Ω sia di classe C^∞ e che siano verificate tutte le ipotesi fatte nel § 7, 1). Come è noto dalla teoria

delle equazioni ellittiche (cfr. ad esempio [11]), l'applicazione $u \rightarrow \{\Delta^2 u, \gamma_0 u, \gamma_1 u\}$ è un isomorfismo di D_{Δ^2} su $L^2 \times H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Se perciò assumiamo $\mathcal{S}(\Gamma) = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ e supponiamo che $g_1(t) \in L^2(\alpha, \beta; H^{3/2}(\Gamma))$, $g_2(t) \in L^2(\alpha, \beta; H^{1/2}(\Gamma))$ insieme alle loro prime due derivate rispetto a t , risultano verificate tutte le ipotesi del teorema 3.2 e il problema (7.1), (7.2), (8.4) si può trasformare nel problema, già esaminato, (7.1), (7.2), (7.3) nella nuova funzione incognita $\tilde{u} = u - w$ essendo $w(x, t)$ la funzione tale che

$$(8.5) \quad \gamma_0 w = g_1, \quad \gamma_1 w = g_2, \quad \Delta^2 w = 0.$$

IV) Sempre per l'equazione (7.1), esaminiamo un problema misto con le seguenti condizioni al contorno:

$$(8.6) \quad u|_s = g_1(t), \quad \Delta u + k(x)\varrho(x) \frac{\partial u}{\partial n}|_s = g_2(t).$$

Supponiamo che $g_1^{(k)}(t) \in L^2(\alpha, \beta; H^{5/2}(\Gamma))$ ($k = 0, 1, 2$); per un teorema di isomorfismo analogo a quello ricordato nel numero III), esisterà una funzione $w(t)$ tale che $w^{(k)}(t) \in L^2(\alpha, \beta; D_{\Delta^2})$ ($k = 0, 1, 2$) ed inoltre:

$$(8.7) \quad \gamma_0 w = g_1, \quad \gamma_1 w = 0, \quad \Delta^2 w = 0.$$

Posto $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, la funzione $\tilde{u}(x, t)$ soddisferà all'equazione

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} &= \Delta^2 \tilde{u} - b(x)\tilde{u} + f - \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b(x)w &= \Delta^2 \tilde{u} - b(x)\tilde{u} + \tilde{f} \end{aligned}$$

ed alle condizioni al contorno ed iniziali

$$(8.9) \quad \tilde{u}|_s = 0, \quad \Delta \tilde{u} + h(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}|_s = g_2 - \gamma_0 \Delta w = \tilde{g}_2.$$

$$(8.10) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(x, 0) &= \varphi(x) - w(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \\ \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) - \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \tilde{\psi}(x). \end{aligned}$$

Per le ipotesi fatte, i nuovi dati iniziali ed il termine noto soddisfano ovviamente ancora alle condizioni d_0 , e_0 del teorema 7.2.

Come si può immediatamente verificare, seguendo un procedimento analogo a quello visto nel § 7, II), la formulazione debole del problema (8.8), (8.9), (8.10) coincide con quella ivi data purchè si sostituisca alla prima delle (7.20) l'equazione

$$(8.11) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [(\tilde{u}_t, \Phi_t)_{L^2} - ((\tilde{u}, \Phi)) + \langle \tilde{g}_2, \gamma_1 \Phi \rangle + (\tilde{f}, \Phi)_{L^2}] dt = 0$$

È perciò possibile trattare questo problema non omogeneo seguendo il procedimento del § 3, a).

Osserviamo che, poichè $\Delta w \in H^1$, $\gamma_0 \Delta w$ è a valori in $H^{1/2}(\Gamma)$ [13]; per le ipotesi fatte su $g_1(t)$, risulta poi $[\gamma_0 \Delta w(t)]^{(k)} \in L^2(\alpha, \beta; H^{1/2}(\Gamma))$ ($k = 0, 1, 2$).

Supponiamo ora che $g_2(t) \in C^1(\alpha, \beta; H^{1/2}(\Gamma))$, con $\|g''\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ integrabile in $\alpha \mapsto \beta$. Allora la forma $\langle \tilde{g}_2, \gamma_1 \Phi \rangle$ risulta bilineare e continua su $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ e la funzione $\tilde{g}_2(t)$ soddisfa all'ipotesi f_2 del teorema 3.1. È perciò possibile, con opportuno cambiamento della funzione incognita, ridurre il problema dato ad uno con condizioni al contorno omogenee.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMERIO L.: *Problema misto e quasi-periodicità per l'equazione delle onde non omogenea*. Ann. di Mat. (IV), vol. XLIX (1960).
- [2] AMERIO L.: *Quasi-periodicità degli integrali ad energia limitata dell'equazione delle onde con termine noto quasi-periodico*. Acc. dei Lincei VIII, vol. XXVIII (1960), note I, II, III.
- [3] BOCHNER S.: *Almost-periodic solutions of the inhomogeneous wave equation*. Proc. of the Nat. Acad. of Sc. (1960).
- [4] DENY J., LIONS J. L.: *Les espaces de B. Levi*. Ann. Inst. Fourier, 5 (1953-54).

- [5] GAGLIARDO E.: *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*. Ricerche di Mat., vol. VII (1958).
- [6] KONDRASHOV V. I.: *Alcune proprietà di funzioni in più variabili* (in russo). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 48 (1945).
- [7] LADYZENSKAJA O. A.: *Il problema misto per le equazioni di tipo iperbolico* (in russo). Mosca, 1953.
- [8] LIONS J. L.: *Problèmes au limites en théorie des distributions*. Acta Math., 94 (1955).
- [9] LIONS J. L.: *Equations différentielles operationelles*. Springer (1961).
- [10] LIONS J. L., MAGENES E.: *Problèmes aux limites non homogènes* (2). Ann. Inst. Fourier, II (1961).
- [11] LIONS J. L., MAGENES E.: *Problemi ai limiti non omogenei* (5). Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa vol. XVI (1962).
- [12] MAGENES E., STAMPACCHIA G.: *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, III vol. XII (1958).
- [13] PRODI G.: *Tracce sulla frontiera delle funzioni di B. Levi*. Rend. Sem. Mat. Padova, 26 (1956).
- [14] PRODI G.: *Tracce di funzioni con derivate di ordine l a quadrato integrabile su varietà di dimensione arbitraria*. Rend. Sem. Mat. Padova, 28 (1958).
- [15] PROUSE G.: *Soluzioni quasi-periodiche di un'equazione iperbolica a coefficienti variabili*. In corso di stampa su Ricerche di Mat.
- [16] RIESZ F., NAGY B. Sz.: *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Budapest, 1952, pag. 204.
- [17] SCHWARTZ L.: *Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico*. Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano, vol. XXVII (1958).