RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Condizioni di associatività negli ipergruppoidi commutativi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 29 (1959), p. 215-226
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1959__29__215_0>

CONDIZIONI DI ASSOCIATIVITÀ NEGLI IPERGRUPPOIDI COMMUTATIVI

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Le ν^3 condizioni di associatività

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in H)$$

di un insieme H avente numero cardinale ν (≥ 2 e non necessariamente finito) non sono evidentemente indipendenti per gli ipergruppoidi *commutativi* (propri) di sostegno H (si veda l'introduzione della precedente nota [1] [1])). Ogni terna (x, y, z) di elementi di H è infatti associativa in un ipergruppoide commutativo di sostegno H se e soltanto se vi è associativa la sua opposta (z, y, x).

Detto Σ l'insieme delle ν^3 condizioni di associatività di H, nel presente lavoro vengono determinati tutti i sottinsiemi Σ' di Σ (costituiti, ciascuno, da condizioni) indipendenti ed equivalenti a (quelle di) Σ, con referenza, appunto, agli ipergruppoidi commutativi (propri) di sostegno H.

Il risultato raggiunto (teorema del n.° 1) differisce da quello già ottenuto da G. Szász (in [2]) con referenza ai gruppoidi commutativi di sostegno H (moltiplicazione univoca) soltanto per gli ordini 2 e 3.

Precisamente, se $\nu = 2, 3$, i sottinsiemi Σ' determinati nel presente lavoro non sono più indipendenti ove ci si riferisca a moltiplicazione univoca, pur restando tutti equivalenti a Σ.

(*) Pervenuta in Redazione il 6 ottobre 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

Da ciascuno dei sottinsiemi Σ' determinati nella presente nota nei casi $\nu = 2$, $\nu = 3$ si ottiene però un sottinsieme Σ'' di Σ indipendente ed equivalente a Σ con referenza a moltiplicazione univoca, mediante sottrazione di una sola (opportuna) condizione di associatività; (anzi, ogni tale sottinsieme Σ'' di Σ si può ottenere in questo modo).

1. - Un ipergruppoide ([1], n.° 1) si dirà *commutativo* se, qualunque siano i suoi elementi x, y, si ha

$$xy = yx. \tag{1}$$

Dalla (1) segue immediatamente che, se X ed Y sono due qualsiasi sottinsiemi non vuoti del sostegno ([1], n.° 1) di un ipergruppoide commutativo, si ha ([1], n.° 2):

$$XY = YX. \tag{2}$$

La frase « ipergruppoide commutativo proprio » ([1], n.° 1) verrà spesso abbreviata nel modo seguente: « *ipergruppoide c. p.* ».

Lo scopo del presente lavoro è quello di risolvere per gli ipergruppoidi commutativi propri il problema, (già risolto per i gruppoidi commutativi — moltiplicazione univoca — da G. Szász in [2]), di determinare tutti i sottinsiemi di Σ indipendenti ed equivalenti a Σ, intendendosi per Σ l'insieme costituito dalle seguenti eguaglianze:

$$(xy)z = x(yz), \tag{3}$$

dove x, y, z sono elementi di un dato insieme H avente numero cardinale $\nu \geq 2$, (le (3) diconsi le *condizioni di associatività* di H).

Per un sottinsieme *indipendente* (o costituito da condizioni *indipendenti*) di Σ, si deve intendere un sottinsieme Σ_1 di Σ tale che, fissata una qualunque condizione di Σ_1, esiste sempre un ipergruppoide c. p. di sostegno H nel quale la condizione fissata non è soddisfatta mentre tutte le rimanenti condizioni di Σ_1 vi sono invece soddisfatte. Se $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, per un sottinsieme di Σ_0 *equivalente* a Σ_0 (o costituito da condizioni *equivalenti* a quelle di Σ_0), si deve intendere un sottinsieme

Σ_2 di Σ_0 tale che il verificarsi delle condizioni di Σ_2 in un ipergruppoide c.p. H^0 di sostegno H implica sempre il verificarsi in H^0 di tutte le condizioni di Σ_0.

La condizione di associatività $(xy)z = x(yz)$ verrà detta (cfr. [2], p. 130) la condizione di associatività *associata* alla terna (ordinata) (x, y, z), (e questa la terna *associata* a quella).

Denoteremo con H^3 l'insieme costituito dalle ν^3 terne di elementi di H. Le due terne (x, y, z) e (z, y, x) si diranno *opposte*, (ed ognuna si dirà l'*opposta* dell'altra).

Il problema suddetto viene risolto dal seguente

TEOREMA: *Se H è un insieme avente numero cardinale $\nu \geq 2$, e Σ è l'insieme delle ν^3 condizioni di associatività* (3) *di H, tutti i sottinsiemi Σ' di Σ che sono indipendenti ed equivalenti a Σ si ottengono nel modo seguente:*

1°. *Si considerino anzitutto tutte le coppie non ordinate di terne:*

$$\{(x, x, y), (y, x, x)\}$$

che si ottengono al variare dei due elementi distinti x, y in H, e in ciascuna di queste coppie non ordinate si scelga una qualsiasi delle due terne che la costituiscono.

2°. *Se $\nu > 2$, si considerino inoltre tutte le sestuple non ordinate di terne:*

$$\{(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y), (z, y, x), (x, z, y), (y, x, z)\},$$

che si ottengono al variare dei tre elementi (a due a due) distinti x, y, z in H, e si scelgano ancora in ciascuna di queste sestuple non ordinate due qualsiasi (distinte) fra le sei terne che la costituiscono, con l'unica restrizione che tali due terne non siano opposte.

Le condizioni di associatività associate alle terne così complessivamente scelte costituiscono appunto un sottinsieme Σ' di Σ indipendente ed equivalente a Σ.

Se ν è finito, è chiaro che il numero delle terne che vengono scelte in 1° e 2° è risp. $\nu(\nu-1)$ e $2\binom{\nu}{3}$, cosicché ogni Σ'

consta, se $\nu > 2$, di $\nu(\nu - 1) + 2\binom{\nu}{3}$ eguaglianze, se invece $\nu = 2$, di $2(2 - 1) = 2$ eguaglianze.

I sottinsiemi Σ' di cui si parla nel teor. su enunciato coincidono, se $\nu > 3$, con quelli trovati da Szász nel caso di moltiplicazione univoca ([2], § 1, Satz 1); invece, se $\nu = 2, 3$, ne differiscono, ciascun Σ' ottenendosi allora da uno di quelli trovati da Szász mediante l'aggiunta di una ulteriore eguaglianza ([2], § 1, Satz 1 e 2).

2. - Faremo in questo numero e nel successivo alcune considerazioni preliminari (cfr. [2], § 2), che ci serviranno per la dimostrazione del teor. del n.° 1.

Per un *tipo* di H^3 (n.° 1) intenderemo un sottinsieme $\mathcal{T}$ di H^3 costitutito da tutte le terne simili ([1], p. 233) ad una terna fissata; se questa è (x, y, z), $\mathcal{T}$ verrà denotato con

$$[x, y, z].$$

Due tipi distinti sono necessariamente disgiunti (cioè la loro intersezione è vuota), e la riunione di tutti i tipi coincide con H^3. Esistono quattro tipi (distinti) se $\nu > 2$, cinque se $\nu > 2$, e sono i seguenti:

$$[a, a, a],\ [a, b, a],\ [b, a, a],\ [a, a, b],\ [a, b, c] \tag{4}$$

(a, b, c elementi distinti di H, fissati una volta per tutte), l'ultimo presentandosi solo se $\nu > 2$.

Diremo che la terna (x_1, y_1, z_1) (di H^3) è *isovalente* alla terna (x, y, z), e scriveremo

$$(x_1, y_1, z_1) \equiv (x, y, z), \tag{5}$$

se vale almeno una delle due eguaglianze:

$$(x_1, y_1, z_1) = (x, y, z), \quad (x_1, y_1, z_1) = (z, y, x,).$$

Si vede subito che la relazione binaria (5) è riflessiva, simmetrica e transitiva; quindi determina una suddivisione di H^3 in classi a due a due disgiunte, ognuna delle quali consta di due terne al più (precisamente, la classe contenente la terna (x, y, z) consta di questa unica terna se e soltanto se $x = z$).

Diremo che due sottinsiemi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ di H^3 sono *isovalenti*, e scriveremo

$$(6) \qquad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B},$$

se fra essi esiste una corrispondenza biunivoca φ (*isovalenza*) tale che terne corrispondenti siano isovalenti.

Osserveremo che due insiemi isovalenti possono anche esserlo mediante (almeno) due distinte isovalenze φ_1 e φ_2. Ciò però si verifica se e solo se in uno dei due insiemi isovalenti $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ (e quindi, per la biunivocità della φ e per la transitività della (5), anche nell'altro) vi sono (almeno) due terne isovalenti distinte. Infatti, se $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ mediante φ e se in $\mathfrak{A}$ vi sono due terne isovalenti distinte τ_1 e τ_2 (e quindi pure $\varphi(\tau_1) \equiv \varphi(\tau_2)$), la corrispondenza φ_2 che subordina la φ in $\mathfrak{A} - \{\tau_1, \tau_2\}$[2]) ed è tale che $\varphi_2(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$ e $\varphi_2(\tau_2) = \varphi(\tau_1)$ è evidentemente una isovalenza fra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ (sempre per la transitività della (5)) distinta dalla $\varphi_1 = \varphi$; viceversa, se $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ sia mediante φ_1 che φ_2, con $\varphi_1 \neq \varphi_2$, vi sarà una terna $\tau \in \mathfrak{A}$ tale che $\varphi_1(\tau) \neq \varphi_2(\tau)$, quindi vi saranno in $\mathfrak{B}$ le due terne isovalenti (per la transitività della (5)) e distinte $\varphi_1(\tau)$ e $\varphi_2(\tau)$. Dunque: Se $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, vi è fra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ un'unica isovalenza se e solo se nessuno dei due insiemi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ contiene due terne isovalenti distinte.

Due condizioni di associatività (di H) si diranno *isovalenti,* se tali sono le due terne ad esse associate (n.° 1).

Due sottinsiemi dell'insieme Σ (di tutte le condizioni di associatività di H) si diranno *isovalenti* se fra essi esiste una corrispondenza biunivoca (*isovalenza*) tale che condizioni corrispondenti siano isovalenti.

Osserviamo ora che (se $\nu > 2$) il tipo $[a, b, c]$ può essere suddiviso in classi a due a due disgiunte, ove si pongano in una medesima classe le 6 $(= 3!)$ terne che si ottengono per-

---

2) Il segno — denota, qui e nel seguito, differenza nel senso della teoria degli insiemi.

mutando tre elementi (distinti). Scegliamo allora (sfruttando, eventualmente, l'assioma della scelta) in ciascuna di queste classi una delle sei terne che la costituiscono. La classe in cui è stata scelta la terna (x, y, z) $(x \neq y, y \neq z, z \neq x)$ la denoteremo con

$$C[x, y, z], \tag{7}$$

e supporremo che la terna scelta nella classe contenente i tre elementi a, b, c (2° capov. di questo n.°) sia (a, b, c).

Denoteremo inoltre con

$$C[x, y, z]_r \tag{8}$$

la sottoclasse della (7) costituita dalle tre terne (a due a due non isovalenti):

$$(x, y, z), \quad (y, z, x), \quad (z, x, y), \tag{9}$$

e con

$$[a, b, c]_r \tag{10}$$

la riunione di tutte queste classi (8).

Posto

$$[a, b, c]_s = [a, b, c] - [a, b, c]_r, \tag{11}$$

risulta allora

$$[a, b, c]_s \equiv [a, b, c]_r \tag{12}$$

(mediante una ben determinata isovalenza), come subito si riconosce osservando che la classe $C[x, y, z]_s = C[x, y, z] - C[x, y, z]_r$ consta delle tre terne opposte delle (9) e quindi è isovalente a $C[x, y, z]_r$.

D'altra parte si ha evidentemente

$$[b, a, a] \equiv [a, a, b] \tag{13}$$

(pure mediante una ben determinata isovalenza); quindi, posto [3]):

$$H_s^3 = [b, a, a] + [a, b, c]_s, \quad H_r^3 = [a, a, b] + [a, b, c]_r, \tag{14}$$

---

[3]) Il segno $+$ denota, qui e nel seguito, somma (riunione) nel senso della teoria degli insiemi.

dalle (12), (13) si trae

$$H^3_s \equiv H^3_r. \tag{15}$$

È chiaro che questi due sottinsiemi, H^3_s e H^3_r, di H^3 (ognuno dei quali consta delle terne opposte di quelle dell'altro) sono disgiunti, e che $H^3_s + H^3_r = [b, a, a] + [a, a, b] + [a, b, c]$.

3. - Per le (1), (2), è evidente che *ogni terna di ciascuno dei due tipi* $[a, a, a]$ *e* $[a, b, a]$ *è associativa* ([1], n.° 2) *in un qualsiasi ipergruppoide commutativo di sostegno* H.

È pure evidente (sempre per le (1), (2)) che *ogni terna di* H^3 *è associativa in un ipergruppoide commutativo di sostegno* H *se e soltanto se vi è associativa la sua opposta.* Dunque: In un ipergruppoide commutativo di sostegno H, due condizioni di associatività isovalenti (di H) o sono entrambe soddisfatte o entrambe non lo sono.

Supponiamo ora che un sottinsieme Σ' dell'insieme Σ (di tutte le condizioni di associatività di H) sia indipendente ed equivalente a Σ, (si noti che l'indipendenza di Σ' implica che in Σ' non vi possono essere due condizioni isovalenti distinte). Detto $\mathfrak{S}'$ il sottinsieme di H^3 costituito dalle terne associate alle condizioni di Σ', l'intersezione di $\mathfrak{S}'$ con $[a, a, a] + [a, b, a]$ è vuota (per l'indipendenza di Σ'), quindi risulta [4]): $\mathfrak{S}' \subseteq H^3_s + H^3_r$. Inoltre si vede subito che $\mathfrak{S}'$ è isovalente ad un (ben determinato) sottinsieme $\mathfrak{S}'_r$ di H^3_r: infatti $\mathfrak{S}_r$ è costituito da tutte le (eventuali) terne di $\mathfrak{S}'$ appartenenti ad H^3_r e dalle opposte di tutte le (eventuali) terne di $\mathfrak{S}'$ appartenenti a H^3_s. Dunque, denotato con

$$\Sigma_r$$

il sottinsieme di Σ costituito dalle condizioni di associatività associate alle terne di H^3_r (v. (14) e nota [4])), concludiamo che Σ' è isovalente ad un sottinsieme Σ_r' di Σ_r.

Poiché, evidentemente, se di due sottinsiemi isovalenti di Σ uno è indipendente ed equivalente a Σ, tale risulta an-

---

[4]) Se $\nu = 2$, si ritenga $H^3_s = [b, a, a]$, $H^3_r = [a, a, b]$.

che l'altro (v. il 2° capov. di questo n.°), Σ_r' risulta indipendente ed equivalente a Σ, e quindi a Σ_r.

Viceversa, se Σ_r' è un sottinsieme di Σ_r indipendente ed equivalene a Σ_r, esso è pure equivalente a Σ (v. la (15) e i primi due capov. di questo n.°).

In conclusione: I sottinsiemi di Σ_r indipendenti ed equivalenti a Σ_r sono, a meno di isovalenze, gli unici sottinsiemi di Σ indipendenti ed equivalenti a Σ; (si noti inoltre che due sottinsiemi distinti di Σ_r non possono essere isovalenti).

In base alle considerazioni di questo n.° e del precedente, il teorema del n.° 1 si potrà dunque ritenere dimostrato non appena avremo dimostrato il seguente

LEMMA: *Se* $\nu = 2$, *vi è un solo sottinsieme di* Σ_r *ad esso equivalente e costituito da condizioni indipendenti, ed è* Σ_r *stesso. Se invece* $\nu > 2$, *tutti sottinsiemi di* Σ_r *che sono indipendenti ed equivalenti a* Σ_r *si ottengono nel modo seguente: Si consideri l'insieme* $\mathfrak{S}_r'$ *formato e da tutte le terne del tipo* $[a, a, b]$ *e da tutte quelle che si ottengono scegliendo due terne qualsiasi (distinte) in ciascuna delle classi* (8); *le condizioni di associatività associate alle terne di* $\mathfrak{S}_r'$ *costituiscono appunto un sottinsieme* Σ_r' *di* Σ_r *indipendente ed equivalente a* Σ_r.

4. - Diremo *corrispondente* della terna (ordinata) (x, y, z) di H^3 in una corrispondenza biunivoca f di H su sé stesso la terna $(f(x), f(y), f(z))$. È chiaro che le corrispondenti (in f) di due terne distinte sono pure distinte.

Diremo che due sottinsiemi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ di H^3, aventi lo stesso numero cardinale, sono *simili*, e scriveremo

$$\mathfrak{A} \backsim \mathfrak{B}, \tag{16}$$

se esiste una corrispondenza biunivoca f di H su sé stesso nella quale le terne di $\mathfrak{B}$ sono le corrispondenti delle terne di $\mathfrak{A}$.

Si dirà che un sottinsieme $\mathfrak{A}$ di H^3 è *isolato* in un ipergruppoide commutativo H^0 di sostegno H, se le terne di $\mathfrak{A}$ e le loro opposte non sono associative in H^0, mentre tutte le rimanenti terne di H^3 vi sono invece associative.

Una terna di H^3 si dirà *isolata* in un ipergruppoide commutativo H^0 di sostegno H, se vi è isolato il sottinsieme (di H^3) da essa costituito.

Una classe [5]) di terne, oppure una terna, di elementi di H si dirà *cp-iperisolabile* (commutativamente propriamente iperisolabile) in H, se esiste un ipergruppoide c. p. di sostegno H nel quale essa è isolata. Si riconosce allora subito che (cfr. [1], n.° 3, penult. capov.):

Una classe di terne (risp. una terna) di elementi di H è cp-iperisolabile in H, se e solo se è tale ogni altra classe di terne (risp. ogni altra terna) di elementi di H ad essa simile.

Infatti, basta osservare che dalla (16) segue $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \backsim \backsim \mathfrak{B} + \mathfrak{B}'$, dove $\mathfrak{A}'$ (risp. $\mathfrak{B}'$) è costituito dalle terne opposte di quelle di $\mathfrak{A}$ (risp. di $\mathfrak{B}$).

5. - Dimostriamo ora che ([1], n.° 1, fine 3° capov.):

I) *La terna* (a, a, b) *è cp-iperisolabile nell'insieme* $H_1 = \{a, b\}$. Essa è infatti isolata nell'ipergruppoide c. p. H_1^0 di sostegno H_1 definito dalla seguente tabella (di moltiplicazione):

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & H_1 \\ b & H_1 & b \end{array} \qquad (H_1 = \{a, b\}). \tag{17}$$

E invero, si verifica subito che in H_1^0 risulta $(aa)b \neq a(ab)$, $(bb)a = b(ba)$, il che è appunto sufficiente (in base ai primi due capoversi del n.° 3) per la conclusione.

II) *La classe* $\{(a, b, c), (b, c, a)\}$ *è cp-iperisolabile nell'insieme* $H_2 = \{a, b, c\}$. Essa è infatti isolata nell'ipergruppoide c.p. H_2^0 di sostegno H_2 definito dalla seguente tabella:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & H_2 & E & D \\ b & E & b & c \\ c & D & c & F \end{array} \tag{18}$$

---

5) Classe è sinonimo di insieme.

dove ($H_2 = \{a, b, c\}$ c):

(19) $$D = \{a, b\}, \quad E = \{a, c\}, \quad F = \{b, c\}.$$

E invero, si verifica facilmente che in $H_2{}^0$ risulta $(ab)c \neq a(bc)$, $(bc)a \neq b(ca)$, $(ca)b = c(ab)$, $(xx)y = x(xy)$ (x, y elementi distinti qualsiasi di H_2), il che appunto basta per concludere come affermato.

III) *Se $\nu \geq 2$, ogni terna del tipo $[a, a, b]$ è cp-iperisolabile in H.*

Infatti, in base alla I) e al lemma 1 di [1] (n.° 4), è intanto cp-iperisolabile in H la terna (a, a, b), (un ipergruppoide c. p. di sostegno H in cui tale terna è isolata, si ottiene invero, se $\nu > 2$, associando ad H la moltiplicazione che subordina in H_1 quella di $H_1{}^0$ ed è tale che $ux = xu = H - H_1$ per ogni $u \in H - H_1$ e per ogni $x \in H$). Ma allora, dal penult. capoverso del preced. n.° 4 segue appunto che è cp-iperisolabile in H (in quanto simile alla (a, a, b)) anche ogni altra terna del tipo $[a, a, b]$.

IV) *Se $\nu > 2$, ogni classe costituita da due terne qualsiasi (distinte) appartenenti ad una medesima delle classi* (8) *è cp-iperisolabile in H.*

Infatti, in base alla II) e al lemma 1 di [1] (n.° 4), è intanto cp-iperisolabile in H la classe $\{(a, b, c), (b, c, a)\}$, (cfr. il ragionamento fatto qui sopra per la III)). D'altra parte, considerata una qualsiasi, $C[x, y, z]_r$, delle classi (8), ciascuna delle sue sottoclassi costituita da due terne, cioè ciascuna delle tre classi $\{(x, y, z), (y, z, x)\}$, $\{(y, z, x), (z, x, y)\}$, $\{(z, x, y), (x, y, z)\}$ è evidentemente simile alla classe $\{(a, b, c), (b, c, a)\}$, dunque (penult. capov. del n.° 4) è appunto cp-iperisolabile in H.

6. - Si osservi che (come segue immediatamente dalla (2)), *se due qualsiasi fra le tre terne*:

(20) $$(x, y, z), \ (y, z, x), \ (z, x, y)$$

($x, y, z \in H$) sono associative in un ipergruppoide commutativo di sostegno H, vi è associativa anche la terza.

Da questa osservazione e dalle proposizioni III) e IV) del preced. n.° 5 si ottiene appunto la dimostrazione del lemma del n.° 3.

E infatti, la prima parte di quel lemma ($\nu = 2$) è un'immediata conseguenza della III).

Quanto alla seconda parte ($\nu > 2$), si consideri uno qualsiasi dei sottinsiemi $\mathfrak{S}'_r$ di H^3 dei quali si parla nell'enunciato del lemma. È chiaro che le condizioni di associatività associate alle terne di un tale sottinsieme costituiscono un sottinsieme di Σ_r indipendente (per le III), IV)) ed equivalente a Σ_r (per quanto detto nel 1° capov. di questo n.°).

Sia, viceversa, Σ_r' un qualsiasi sottinsieme di Σ_r indipendente ed equivalente a Σ_r. Allora Σ_r' deve contenere le condizioni (di associatività) associate a tutte le terne del tipo $[a, a, b]$ (per la III) e per l'equivalenza a Σ_r); inoltre Σ_r' deve contenere le condizioni associate ad almeno due terne di ciascuna delle classi (8) (per la IV) e per l'equivalenza a Σ_r); infine Σ_r' non può contenere tutte e tre le condizioni associate alle tre terne costituenti una qualsiasi delle classi (8) (per l'indipendenza e per l'osservazione iniziale di questo n.°). Dunque Σ_r' è l'insieme delle condizioni di associatività associate alle terne di uno degli insiemi $\mathfrak{S}'_r$ dei quali si parla nell'enunciato del lemma.

Il lemma del n.° 3 (e quindi il teorema del n.° 1) è perciò dimostrato.

7. - OSSERVAZIONE 1ª. Che ogni terna del tipo $[a, a, b]$ sia cp-iperisolabile in H *se* $\nu \geq 5$ (cfr. n.° 5, proposiz. III)), e che ogni classe costituita da due terne qualsiasi appartenenti ad una medesima delle classi (8) sia cp-iperisolabile in H *se* $\nu > 5$ (cfr. n.° 5, proposiz. IV)), poteva anche esser dedotto facilmente da due risultati di Szász ([2], §§ 5 e 3) tramite il lemma 1 di [1] (n.° 4).

Infatti, se $\nu \geq 5$, esiste un ipergruppoide commutativo (non proprio) di sostegno $\{a, b, c\}$ (definito dalle (39) di [2], p. 142) nel quale la terna (a, a, b) è isolata. Ma allora (lemma 1 di [1]) (a, a, b) è isolata anche in un ipergruppoide commutativo proprio di sostegno H (quello che si ottiene aggiungendo alle posizioni (39) di [2], relative ai tre elementi $a, b, c,$ le seguenti: $ux = xu = H - \{a, b, c\}$ per ogni $u \in H - \{a, b, c\}$ e per ogni $x \in H$); dunque (n.° 4) ogni terna del tipo $[a, b, c]$ è appunto cp-iperisolabile in H.

Se poi $\nu > 5$, detto d un qualsiasi elemento di H distinto da $a, b, c,$ basta fare un ragionamento analogo, basato questa volta sull'esistenza di un ipergruppoide commutativo (non proprio) di sostegno $\{a, b, c, d\}$ (immagine isomorfa di quello definito dalle (8) di [2], p. 136, mediante la corrispondenza $a \to c,\ b \to a,\ c \to b,\ d \to d$) nel quale la classe $\{(a, b, c), (b, c, a)\}$ è isolata.

OSSERVAZIONE 2ª. In quanto è detto nell'ultimo capoverso del n.° 1 è implicito che: Tutti i sottinsiemi Σ' di Σ dei quali si parla nell'enunciato del teor. del n.° 1 sono equivalenti a Σ anche nel caso di moltiplicazione univoca; però, in tal caso, essi sono indipendenti se e soltanto se $\nu > 3$. Invece, se $\nu = 2, 3$, ogni sottinsieme di Σ che, con referenza a moltiplicazione univoca, sia indipendente ed equivalente a Σ, si ottiene da uno dei suddetti Σ' mediante la sottrazione di una condizione di associatività (associata ad una terna del tipo $[a, b, c]$ se $\nu = 3$ — [2], § 1, Satz 1 e 2 —).

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di associatività negli ipergruppoidi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 27 (1957), pp. 228-244.

[2] SZÁSZ, G.: *Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplikativer Strukturen*, Acta Scientiarum Math., vol. 15 (1954), pp. 130-142.