RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 75-79

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__75_0>

SUI GRUPPI FINITI PER CUI IL RETICOLO DEI SOTTOGRUPPI DI COMPOSIZIONE È DISTRIBUTIVO

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

In due Note [1]) recenti Zappa ha caratterizzato i gruppi finiti risolulibili, col reticolo dei sottogruppi di composizione distributivo ed i gruppi finiti a sottoreticolo di composizione modulare. In questa io assegno una caratterizzazione dei gruppi finiti (rivolubili o non) col reticolo dei sottogruppi di composizione distributivo, dimostrando il seguente teorema: *Affinchè un gruppo finito G abbia il reticolo dei sottogruppi di composizione distributivo è necessario e sufficiente che fra i fattoriali delle catene principali di G siano ciclici quelli che risultino essere anche p-gruppi.*

1. - Indichiamo con G un gruppo d'ordine finito e con $\tilde{L}(G)$ il reticolo dei sottogruppi di composizione [2]) di G.

Supponiamo che il reticolo $\tilde{L}(G)$ sia distributivo. Indichiamo con N_1, N_2 due sottogruppi di composizione di G, N_2 essendo normale in N_1, e dimostreremo che in tali ipotesi $\frac{N_1}{N_2}$ è ciclico, se è un p-gruppo.

Notiamo anzitutto che il reticolo dei sottogruppi di composizione di $\frac{N_1}{N_2}$ è distributivo: ciò discende dal fatto che

---

(*) Pervenuta in Redazione il 26 marzo 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) Si veggano le Note [3] e [4], i numeri fra parentesi quadre riferendosi alla bibliografia posta in fondo a questo mio lavoro.

2) Chiamasi sottogruppo di composizione di un gruppo G, un gruppo che fa parte di una catena normale di G.

$\tilde{L}(G)$ è distributivo e che se $A \supset B$ sono due sottogruppi di G, con A sottogruppo di composizione di G, B è anch'esso di composizione per G se, e solo se, è tale per A. Ci siamo così ricondotti a provare che se il reticolo $\tilde{L}(H)$ di un p-gruppo H è distributivo, H è ciclico. E la cosa è immediata: allora infatti è distributivo anche il reticolo dei sottogruppi di composizione di $\frac{H}{\Phi(H)}$, $\Phi(H)$ essendo il gruppo di Frattini di H; ma $\tilde{L}\left(\frac{H}{\Phi(H)}\right)$ coincide col reticolo dei sottogruppi del gruppo abeliano $\frac{H}{\Phi(H)}$; sicchè $\frac{H}{\Phi(H)}$, in quanto abeliano elementare e distributivo è d'ordine p ed H, come volevasi, è ciclico in virtù di un noto teorema di Burnside. La necessità della condizione enunciata discende, da quanto precede, come caso particolare.

2. - Ci proponiamo di dimostrare che viceversa se i p-gruppi fattoriali delle catene normali di un gruppo finito G sono ciclici, il reticolo $\tilde{L}(G)$ è distributivo.

Ragionando per assurdo, supponiamo che $\tilde{L}(G)$ non sia distributivo. Allora $L(G)$, che è modulare in virtù di un risultato di Zappa [3]), contiene a norma di un teorema di Birkhoff [4]), tre elementi distinti N_1, N_2, N_3 che coprono un medesimo elemento Y e che sono coperti da uno stesso elemento Z: Y coincide quindi con ciascuna delle intersezioni $N_1 \cap N_2$, $N_1 \cap N_3$, $N_2 \cap N_3$, e Z con ciascuna delle unioni $N_1 \cup N_2$, $N_1 \cup N_3$, $N_2 \cup N_3$. Allora [5]) $N_1 \cap N_2$ è un sottogruppo normale (in N_1 ed N_2 e quindi) in $N_1 \cup N_2$, ed N_1, N_2 e N_3 sono normali in $N_1 \cup N_2$. Pertanto

$$\frac{N_1 \cup N_2}{N_1 \cap N_3} = \frac{N_1}{N_1 \cap N_2} \times \frac{N_2}{N_1 \cap N_2} =$$
$$= \frac{N_1}{N_1 \cap N_2} \times \frac{N_3}{N_1 \cap N_2} = \frac{N_2}{N_1 \cap N_2} \times \frac{N_3}{N_1 \cap N_2}.$$

3) Vedasi [4].
4) Vedasi [1] pag. 134.
5) Vedasi [2] pag. 213.

i gruppi $\dfrac{N_i}{N_1 \cap N_2}$ $(i = 1, 2, 3)$ essendo semplici. Epperò $\dfrac{N_1 \cup N_2}{N_1 \cap N_2}$ è un p-gruppo abeliano elementare d'ordine p^2, il che contraddice l'ipotesi di partenza.

Abbiamo pertanto il teorema: Condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo finito G abbia il reticolo dei sottogruppi di composizione distributivo è che fra i gruppi fattoriali delle catene normali siano ciclici quelli che risultino essere anche p-gruppi.

3. - Affiniamo ora la condizione sufficiente trovata, in guisa da ottenere completamente il risultato esposto nella prefazione. Supponiamo perciò che per il gruppo finito G risultino ciclici tutti quei gruppi fattoriali di catene principali che siano dei p-gruppi. *E per un tal gruppo G dimostriamo che ogni sottogruppo di composizione, se risolubile, ha ciclici i propri sottogruppi di Sylow ed è normale in G.*

Infatti se H è un tal sottogruppo di G, l'unione, T, dei coniugati di H in G non è soltanto normale in G ma [6]) è anche risolubile. Inoltre la catena $G \supseteq T = T^{(0)} \supset T^{(1)} \supset \ldots \supset T^{(v)} = 1$ dove $T^{(i)}$ è il derivato i-esimo di T, è una catena principale di G ed i gruppi fattoriali $\dfrac{T^{(i-1)}}{T^{(i)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, v)$, abeliani senz'altro, sono anche ciclici in conseguenza dell'ipotesi fatta su G. Quindi T è supersolubile, epperò dispersibile [7]). Di qui e dall'ipotesi fatta su G segue che i sottogruppi di Sylow sono ciclici.

Ma allora basta ricordare che in T ogni sottogruppo di composizione è caratteristico in T per concludere che H coincide con T.

Donde il lemma enunciato.

Ed ora siamo appunto in grado di dimostrare che nelle ipotesi attuali sul gruppo G, il reticolo $\tilde{L}(G)$ è distributivo.

Allo scopo basterà far vedere (n.° 2) che allora quei gruppi

---

6) Vedasi [2] pag. 218.

7) Vedasi ad es. [5].

fattoriali di catene normali, che risultano p-gruppi, sono ciclici.

Procederemo per induzione rispetto al numero dei divisori primi dell'ordine di G.

Siano N_1, N_2 due sottogruppi di composizione di G con N_2 normale in N_1 ed $\frac{N_1}{N_2}$ p-gruppo. Se $N_2 = 1$, N_1 risulta senz'altro ciclico, per il lemma. Possiamo pertanto supporre $N_2 \supset N_1$. Sia N un sottogruppo di composizione minimo di G contenuto in N_2. Se N è normale in G, le ipotesi del teorema sono soddisfatte anche per $\frac{G}{N}$ epperò $\frac{N_1}{N_2}$ è ciclico in quanto isomorfo al gruppo $\frac{N_1/N}{N_2/N}$, ciclico in virtù dell'ipotesi induttiva. Resta dunque il caso che N non sia normale in G. Allora, in virtù del lemma, N è un p-gruppo semplice e non abeliano. Consideriamo l'unione, T, dei coniugati di N in G. Il gruppo T è un prodotto diretto di gruppi isomorfi ad N [8]). I gruppi $T \cap N_1$, $T \cap N_2$ come sottogruppi di composizione di T, sono quindi prodotti diretti di gruppi isomorfi ad N. Il gruppo $\frac{N_1 \cap T}{N_2 \cap T}$ non può quindi essere un p-gruppo; ma d'altra parte esso è isomorfo ad un sottogruppo di $\frac{N_1}{N_2}$, pertanto risulta necessariamente $N_1 \cap T = N_2 \cap T$. Da qui segue $\frac{N_1}{N_2} \simeq \frac{TN_1}{TN_2}$ ([9]). D'altra parte $\frac{G}{T}$ soddisfa anch'esso alle ipotesi del teorema, sicchè, per l'ipotesi alla base del procedimento di induzione, il p-gruppo $\frac{TN_1}{TN_2} \simeq \frac{TN_1/T}{TN_2/T}$ è ciclico; epperò è tale anche il gruppo $\frac{N_1}{N_2} \simeq \frac{TN_1}{TN_2}$. E il teorema è completamente dimostrato.

---

[8]) Vedasi [2] pag. 224.

[9]) Vedasi [6] pag. 71.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BIRKHOFF: *Lattice Theory.* [American Math. Soc., 1948].

[2] H. WIELANDT: *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen.* [Math. Zeitschrift, vol. 45, pp. 209-244].

[3] G. ZAPPA: *Sui gruppi finiti risolubli per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo.* [Boll. Un. Mat. Ital., serie III, Anno XI].

[4] G. ZAPPA: *Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare.* [ibidem, serie III, Anno XI].

[5] G. ZAPPA: *Sui gruppi supersolubili.* [Rend. Sem. Mat. Univ. Roma, vol. 2].

[6] W. SPECHT: *Gruppentheorie.* [Springer, Verlag, Berlin, 1956].