RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARISA MANARINI

Considerazioni sulla propagazione guidata e libera delle onde elettromagnetiche nei mezzi in moto

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 60-74

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__60_0>

CONSIDERAZIONI SULLA PROPAGAZIONE GUIDATA E LIBERA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE NEI MEZZI IN MOTO

Nota (*) *di* Anna Marisa Manarini (*a Bologna*)

1. - Nella presente nota ho ripreso il problema studiato dal prof. Agostinelli in una sua interessante pubblicazione [1]), cioè la propagazione di onde elettromagnetiche in una guida d'onda percorsa da un fluido dielettrico che si muove di moto traslatorio uniforme. Considerando oltre all'osservatore (S) al quale è riferito il moto del fluido anche un osservatore (S') solidale col fluido, ho dimostrato che il noto teorema, valido rispetto all'osservatore (S'), secondo cui la velocità di gruppo e la velocità media dell'energia elettromagnetica coincidono, è valido anche rispetto all'osservatore (S), cioè anche se il mezzo che riempie la guida è in moto traslatorio uniforme.

Inoltre ho dimostrato che la velocità di gruppo (e quindi anche la velocità media dell'energia elettromagnetica) rispetto all'osservatore (S) si ottiene componendo relativisticamente la velocità di traslazione del fluido con la velocità di gruppo rispetto all'osservatore (S').

Per stabilire questi teoremi mi sono valsa, come già in una mia nota precedente [2]), delle relazioni lineari che inter-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 13 febbraio 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

[1]) C. Agostinelli. *Onde elettromagnetiche guidate entro un tubo cilindrico percorso da un fluido dielettrico in moto traslatorio uniforme,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Torino, vol. XIV, pagg. 257-268, 1954-55.

[2]) A. M. Manarini, *Sulla propagazione delle onde piane nei conduttori in moto,* Rend. Acc. Lincei, vol. XX, pagg. 229-231, 1956.

corrono fra i vettori elettromagnetici rispetto all'osservatore (S') ed i corrispondenti vettori rispetto all'osservatore (S) e della trasformazione di Lorentz. Inoltre mediante tali relazioni ed applicando la trasformazione di Lorentz alle ben note equazioni e condizioni al contorno della guida cui soddisfa il campo elettromagnetico rispetto all'osservatore solidale col fluido, ho potuto ricavare risultati validi rispetto all'osservatore (S), già ottenuti dal prof. Agostinelli risolvendo le equazioni di Maxwell-Minkowski.

Infine, applicando sempre lo stesso metodo, ho potuto ritrovare con procedimento forse più rapido, alcune equazioni dell'elettrodinamica dei conduttori in moto traslatorio uniforme, ottenute dal prof. Zeuli e dal prof. Ferla partendo dalle equazioni di Minkowski.

2. - Consideriamo un corpo omogeneo ed isotropo, il quale si muova rispetto ad un osservatore (S) di moto traslatorio uniforme con velocità $\boldsymbol{v}$ non trascurabile rispetto alla velocità c della luce. Fissiamo il sistema di riferimento $S(x, y, z, t)$ in modo che la velocità di traslazione $\boldsymbol{v}$ sia diretta secondo l'asse z. Consideriamo poi un sistema di riferimento $S'(x', y', z', t')$ solidale col corpo e tale che l'asse z' coincida con l'asse z; inoltre le origini dei sistemi di riferimento (S) ed (S') coincidano nei rispettivi istanti iniziali.

Le coordinate di (S') sono quindi legate alle coordinate di (S) dalla trasformazione speciale di Lorentz:

$$(1) \qquad x' = x \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} z}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

dove si è posto $\beta = v/c$.

Per la proprietà di covarianza delle equazioni di Maxwell, i vettori elettromagnetici rispetto al sistema (S') sono legati da relazioni lineari ai vettori elettromagnetici rispetto all'osservatore (S). Indicando con accento le grandezze rispetto al sistema (S') e senza accento quelle rispetto al sistema (S), usando l'usuale simbolismo e la metrologia di Gauss razionalizzata, queste relazioni, scritte vettorialmente, sono:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{B} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right],\\
\boldsymbol{B}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{E} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right],\\
\boldsymbol{D}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{H} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right],\\
\boldsymbol{H}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{D} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^3}}{v^2}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right].
\end{aligned}
$$

Osserviamo esplicitamente che le componenti dei singoli vettori lungo la direzione di traslazione del corpo risultano uguali per i due osservatori (S) ed (S'), ossia si ha:

$$
(3)\qquad E_z = E'_z \quad , \quad B_z = B'_z \quad , \quad D_z = D'_z \quad , \quad H_z = H'_z \,.
$$

Dalle equazioni (2), come è noto, si ottengono immediatamente le equazioni di Minkowski. Indicando con ε la costante dielettrica e con μ la permeabilità magnetica del corpo, esse sono:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{H} &= \varepsilon\left[\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{B}\right],\\
\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{E} &= \mu\left[\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{D}\right].
\end{aligned}
$$

Scriviamo anche, giacchè ci saranno utili in seguito, le espressioni delle componenti cartesiane di $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{B}$, che si ottengono dalle (4) nell'ipotesi che sia $1 - n^2\beta^2 \neq 0$ $(n^2 = \varepsilon\mu)$. Ponendo:

$$
\varepsilon^* = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}\,\varepsilon \quad . \quad \mu^* = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}\,\mu \quad , \quad \beta^* = \frac{n^2-1}{1-n^2\beta^2}\,\beta
$$

esse sono:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
D_x &= \varepsilon^* E_x - \beta^* H_y \quad , & D_y &= \varepsilon^* E_y + \beta^* H_x \quad , & D_z &= \varepsilon E_z,\\
B_x &= \mu^* H_x + \beta^* E_y \quad , & B_y &= \mu^* H_y - \beta^* E_x \quad , & B_z &= \mu H_z.
\end{aligned}
$$

3. - Premesse queste considerazioni di carattere generale, vogliamo ora considerare il caso trattato dal prof. Agostinelli, ossia vogliamo studiare la propagazione di onde elettromagnetiche entro un tubo cilindrico perfettamente conduttore percorso da un fluido dielettrico omogeneo ed isotropo, in moto traslatorio uniforme con velocità v.

Riferendoci all'osservatore (S') solidale col fluido, scriviamo le note equazioni[3]) a cui soddisfa un'onda elettromagnetica di fase $e^{i(\omega' t' - a' z')}$ che si propaga nella guida d'onda considerata (supporremo cioè che il campo elettrico $\boldsymbol{E}'$ ed il campo magnetico $\boldsymbol{H}'$ dipendano dal tempo per il fattore $e^{i\omega' t'}$ e dalla coordinata z' per il fattore $e^{-ia' z'}$).

Posto:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_t' + E_z' \boldsymbol{k} \quad , \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}_t' + H_z' \boldsymbol{k},$$

dove $\boldsymbol{k}$ è il versore dell'asse z' ed $\boldsymbol{E}'$ e $\boldsymbol{H}_t'$ sono le componenti trasversali dei vettori $\boldsymbol{E}'$ e $\boldsymbol{H}'$, le componenti longitudinali E_z' e H_z' soddisfano alle equazioni:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 E_z'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 E_z'}{\partial y'^2} + \lambda^2 E_z' = 0, \\ &\frac{\partial^2 H_z'}{\partial x'^2} + \frac{\partial H_z}{\partial y'^2} + \lambda^2 H_z' = 0, \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$(7) \qquad \lambda^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega'^2 - a'^2$$

Le componenti trasversali sono espresse in funzione di E_z e H_z' dalle seguenti relazioni:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\lambda^2 \boldsymbol{E}_t' = - ia' \operatorname{grad} E_z' + i\omega' \frac{\mu}{c} \boldsymbol{k} \wedge \operatorname{grad} H_z', \\ &\lambda^2 \boldsymbol{H}_t' = - ia' \operatorname{grad} H_z' - i\omega' \frac{\varepsilon}{c} \boldsymbol{k} \wedge \operatorname{grad} E_z', \end{aligned}$$

(l'operatore gradiente si intende eseguito solo rispetto alle coordinate x' e y').

---

[3]) Cfr. D. GRAFFI, *Le guide d'onda*, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, Vol. XXI, 1950.

Indichiamo con σ la superficie sezione della guida con un piano perpendicolare all'asse z', con s la curva che limita la superficie σ, con $\boldsymbol{n}$ il versore normale a s. Avendo supposto che le pareti della guida siano perfettamente conduttrici, sul contorno s valgono le relazioni:

$$\boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{n} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{H}' \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{9}$$

ed in particolare E'_z ed H'_z soddisfano alle seguenti condizioni al contorno, da associarsi alle equazioni differenziali (6):

$$E'_z = 0 \quad , \quad \frac{\partial H'_z}{\partial n} = 0, \tag{10}$$

È noto come le equazioni (6) con le condizioni al contorno (10) abbiano soluzioni non entrambe identicamente nulle solo per determinati valori discreti di λ^2, che sono gli autovalori.

4. - Anzichè all'osservatore (S') vogliamo ora riferirci all'osservatore (S), rispetto al quale il fluido si muove.

Osserviamo innanzi tutto che dalle (3) si ricava immediateamente che a modi *TE* o *TM* rispetto all'osservatore (S') corrispondono rispettivamente modi *TE* o *TM* rispetto all'osservatore (S).

Dalle (3) si ricava anche che le condizioni al contorno (10) si trasformano nelle analoghe condizioni rispetto all'osservatore (S):

$$E_z = 0 \quad , \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0. \tag{11}$$

Per potere scrivere la seconda condizione si è tenuto conto del fatto che, essendo il versore $\boldsymbol{n}$ ortogonale alla direzione di traslazione del fluido, la sua direzione rimane la stessa passando dal sistema (S') al sistema (S).

Inoltre è facile dimostrare che il vettore $\boldsymbol{E}$ è parallelo al versore $\boldsymbol{n}$ sul contorno della guida. Infatti dalla prima delle relazioni (2) (o, più esattamente, dalla relazione inversa, che si ottiene ponendo $-v$ al posto di v e scambiando l'accento ai vettori del primo e del secondo membro) si ha:

$$\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [\boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{n} - \mu\beta(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}') \wedge \boldsymbol{n} - (1 - \sqrt{1-\beta^2}) E'_z \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{n}],$$

da cui, ricordando che al contorno è $E'_z = 0$ e che valgono le (9), si ottiene:

$$\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} = 0. \tag{12}$$

Se viceversa si suppone che sia $\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} = 0$, si può facilmente dimostrare che di conseguenza è $\boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{n} = 0$.

Determiniamo ora la fase dell'onda, quale appare all'osservatore (S).

Applicando la trasformazione di Lorentz (1), si ha:

$$e^{i(\omega' t' - a' z')} = e^{i\left(\omega' \frac{t - \frac{\beta}{c} z}{\sqrt{1-\beta^2}} - a' \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)},$$

o anche:

$$e^{i(\omega' t' - a' z')} = e^{i(\omega t - a z)},$$

dove si è posto:

$$\omega = \frac{\omega' + a' v}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad a = \frac{\omega' \frac{\beta}{c} + a'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Per la linearità delle equazioni (2) e poichè l'ampiezza dell'onda considerata non dipende da z' e t', e quindi per la trasformazione di Lorentz (1) non dipende da z e t, $e^{i(\omega t - a z)}$ rappresenta la fase dell'onda rispetto al sistema (S).

Ricavando ω' e a' in funzione di ω e a, si ha:

$$\omega' = \frac{\omega - a v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a' = \frac{a - \omega \frac{\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{13}$$

Sostituendo nella (7) si trova che ω e a sono legati dalla relazione:

$$(1 - \beta^2)\lambda^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\omega - a v)^2 - \left(a - \omega \frac{\beta}{c}\right)^2. \tag{14}$$

È facile verificare che questa espressione di λ^2 coincide con l'espressione di λ^2 data dalla (29) nella citata Nota del prof. Agostinelli.

5. - Riferendoci all'osservatore (S) la velocità di gruppo, che indicheremo con V_g e la velocità media dell'energia elettromagnetica, che indicheremo con V_e, sono, come è noto, definite rispettivamente da:

$$V_g = 1 \Big/ \frac{\partial a}{\partial \omega} \quad , \quad V_e = \frac{2c \int_\sigma Re(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{k}\, d\sigma}{\int_\sigma (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{B}^*)\, d\sigma} ,$$

dove con l'asterisco si indica il vettore coniugato e con Re la parte reale.

Ricordiamo il noto teorema per cui, rispetto all'osservatore (S') solidale col fluido, la velocità di gruppo coincide con la velocità media dell'energia elettromagnetica. Vogliamo dimostrare che questo teorema vale anche rispetto all'osservatore (S). Seguiremo un procedimento che nelle sue linee generali è dovuto a R. B. Adler [4]).

Posto:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial \omega} \wedge \boldsymbol{H}$$

e osservando che al contorno della guida $\boldsymbol{u}$ è ortogonale al versore $\boldsymbol{n}$, come si ricava ricordando la (12), si dimostra che, applicando il teorema della divergenza piana relativamente alla superficie σ, sezione della guida con un piano perpendicolare all'asse z, vale la relazione:

$$(15) \qquad \int_\sigma \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \times \boldsymbol{k}\, d\sigma .$$

Dalle equazioni di Maxwell:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{D} \quad , \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{B}$$

[4]) Cfr. R. B. Adler, *Technical Report N. 102*, Research Laboratory of Electronics M.I.T., Cambridge Mass. Oppure:

D. Graffi, Conferenze tenute al corso « *Propagazione delle Onde Elettromagnetiche* » del CIME a Varenna, 24 Agosto - 2 Settembre 1956.

e dalle analoghe equazioni a cui soddisfano i vettori coniugati:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^* = -i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{D}^* \quad , \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E}^* = i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{B}^*,$$

tenendo presente che i vettori elettromagnetici dipendono dalla coordinata z per il fattore e^{-iaz}, dopo facili passaggi si ottiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = i \frac{\partial a}{\partial \omega} (\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}^* + \boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H}),$$

o anche:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = 2i \frac{\partial a}{\partial \omega} Re(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}^*). \tag{16}$$

Analogamente si trova per div $\boldsymbol{u}$ la seguente espressione:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{i}{c} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{B}^*) +$$

$$+ i \frac{\omega}{c} \left(\boldsymbol{E} \times \frac{\partial \boldsymbol{D}^*}{\partial \omega} - \frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial \omega} \times \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}^*}{\partial \omega} - \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \omega} \times \boldsymbol{B} \right).$$

Dimostriamo che l'ultimo termine fra parentesi è nullo. Eseguendo cartesianamente i prodotti scalari e sostituendo al posto delle componenti cartesiane dei vettori $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{B}$ le loro espressioni date dalle (5), si ha:

$$\boldsymbol{E} \times \frac{\partial \boldsymbol{D}^*}{\partial \omega} - \frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial \omega} \times \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}^*}{\partial \omega} - \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \omega} \times \boldsymbol{B} =$$

$$= \varepsilon^* E_x \frac{\partial E_x^*}{\partial \omega} - \beta^* E_x \frac{\partial H_y^*}{\partial \omega} + \varepsilon^* E_y \frac{\partial E_y^*}{\partial \omega} + \beta^* E_y \frac{\partial H_x^*}{\partial \omega} + \varepsilon E_z \frac{\partial E_z^*}{\partial \omega} -$$

$$- \varepsilon^* \frac{\partial E_x^*}{\partial \omega} E_x + \beta^* \frac{\partial E_x^*}{\partial \omega} H_y - \varepsilon^* \frac{\partial E_y^*}{\partial \omega} E_y - \beta^* \frac{\partial E_y^*}{\partial \omega} H_x - \varepsilon \frac{\partial E_z^*}{\partial \omega} E_z +$$

$$+ \mu^* H_x \frac{\partial H_x^*}{\partial \omega} + \beta^* H_x \frac{\partial E_y^*}{\partial \omega} + \mu^* H_y \frac{\partial H_y^*}{\partial \omega} - \beta^* H_y \frac{\partial E_x^*}{\partial \omega} + \mu H_z \frac{\partial H_z^*}{\partial \omega} -$$

$$- \mu^* \frac{\partial H_x^*}{\partial \omega} H_x - \beta^* \frac{\partial H_x^*}{\partial \omega} E_y - \mu^* \frac{\partial H_y^*}{\partial \omega} H_y + \beta^* \frac{\partial H_y^*}{\partial \omega} E_x - \mu \frac{\partial H_z^*}{\partial \omega} H_z = 0.$$

Pertanto l'espressione di div $\boldsymbol{u}$ è la seguente:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{i}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{D}^*+\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{B}^*). \tag{17}$$

Sostituendo le (16) e (17) nella (15), si ha infine:

$$1\Big/\frac{\partial a}{\partial\omega}=\frac{2c\int_\sigma Re(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}^*)\times\boldsymbol{k}\,d\sigma}{\int_\sigma(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{D}^*+\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{B}^*)d\sigma},$$

ossia:

$$V_g=V_e.$$

6. - Considerando costante λ^2, determiniamo ora la velocità di gruppo dapprima rispetto all'osservatore (S'), che indicheremo con V'_g, poi rispetto all'osservatore (S).

Differenziando la (7), si ha:

$$V'_g=1\Big/\frac{\partial a'}{\partial\omega'}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\frac{a'}{\omega'},$$

o anche, sostituendo ad a' e ω' le loro espressioni in funzione di a e di ω:

$$V'_g=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\frac{a-\omega\frac{\beta}{c}}{\omega-av}.$$

Analogamente, differenziando la (14), si ha:

$$V_g=1\Big/\frac{\partial a}{\partial\omega}=\frac{v\frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\omega-av)+\left(a-\omega\frac{\beta}{c}\right)}{\frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\omega-av)+\frac{\beta}{c}\left(a-\omega\frac{\beta}{c}\right)}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\omega-av)$, si ha infine:

$$V_g=\frac{v+V'_g}{1+\frac{\beta}{c}V_g}.$$

La velocità di gruppo rispetto all'osservatore (S) risulta quindi dalla combinazione relativistica della velocità di traslazione del fluido con la velocità di gruppo rispetto all'osservatore (S') solidale col fluido.

Poichè sappiamo che la velocità di gruppo e la velocità dell'energia elettromagnetica coincidono rispetto all'osservatore (S') ed abbiamo dimostrato che ciò accade anche rispetto all'osservatore (S), possiamo concludere che un teorema analogo vale per la velocità media dell'energia elettromagnetica, ossia:

la velocità media dell'energia elettromagnetica rispetto all'osservatore (S) risulta dalla combinazione relativistica della velocità di traslazione del fluido con la velocità media dell'energia elettromagnetica rispetto all'osservatore (S') solidale col fluido.

7. - Vogliamo ora ricavare le equazioni a cui soddisfano i campi elettromagnetici nella guida d'onda considerata rispetto all'osservatore (S). Questi risultati sono stati ottenuti con metodo diverso dal prof. Agostinelli nella Nota citata.

Il nostro metodo consisterà essenzialmente nell'applicare alle equazioni valide rispetto all'osservatore (S') la trasformazione di Lorentz e le relazioni (2) che intercedono fra i vettori elettromagnetici dei due osservatori.

Osserviamo innanzi tutto che, applicando la trasformazione di Lorentz (1) alle equazioni (6), queste rimangono invariate nella forma, dato che in esse compaiono solo le derivate rispetto alle coordinate x' e y'. Poichè inoltre è $E'_z = E_z$, $H'_z = H_z$, esse divengono:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \lambda^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \lambda^2 H_z = 0 .$$

Ricordiamo che l'operatore gradiente che compare nelle equazioni (8) si intende eseguito solo rispetto alle coordinate x' e y'. Quindi, applicando la trasformazione di Lorentz alle (8), anche esse rimangono invariate. Sostituendo le (2) nelle

(8), indicando con $\boldsymbol{E}_t$, $\boldsymbol{B}_t$ ecc.... le componenti trasversali del campo elettrico, induzione magnetica, ecc.... e ricordando anche le (13), si ha:

$$\lambda^2\left(\boldsymbol{E}_t+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{B}_t\right)=-i\left(a-\omega\frac{\beta}{c}\right)\operatorname{grad}E_z+i(\omega-av)\frac{\mu}{c}\boldsymbol{k}\wedge\operatorname{grad}H_z,$$

$$\lambda^2\left(\boldsymbol{H}_t-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{D}_t\right)=-i\left(a-\omega\frac{\beta}{c}\right)\operatorname{grad}H_z-i(\omega-av)\frac{\varepsilon}{c}\boldsymbol{k}\wedge\operatorname{grad}E_z.$$

Volendo infine ottenere le equazioni (27) della citata Nota del prof. Agostinelli, basta introdurre le componenti cartesiane e fare sistema con le equazioni di Minkowski (4), come è facile verificare.

8. - Con il procedimento qui adottato si possono in generale facilmente ricavare molti risultati validi rispetto all'osservatore (S) e ottenibili quindi dalle equazioni di Maxwell-Minkowski.

Come applicazione ci proponiamo di riottenere alcune equazioni, recentemente trovate dal prof. Zeuli [5]), cui devono soddisfare i vettori elettromagnetici in un corpo in generale conduttore mobile con velocità $\boldsymbol{v}$ rispetto all'osservatore (S).

Sia γ la conducibilità elettrica del corpo, che supporremo costante. Rispetto all'osservatore (S') solidale col corpo la densità di carica, che indicheremo con ρ', soddisfa alla notissima equazione:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho'=0.$$

Applicando la trasformazione di Lorentz si ha:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+v\frac{\partial\rho'}{\partial z}+\frac{\gamma}{\varepsilon}\sqrt{1-\beta^2}\rho'=0,$$

[5]) T. ZEULI, *Alcune considerazioni sulle equazioni dell'elettrodinamica nei corpi in moto traslatorio uniforme*, Boll. U.M.I., 1956, pagg. 189-197.

che possiamo anche scrivere:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho' \times \boldsymbol{v} + \frac{\gamma}{\varepsilon} \sqrt{1-\beta^2}\rho' = 0,$$

la quale coincide con la (12) della citata Nota del prof. Zeuli.

Le equazioni differenziali a cui soddisfano i vettori $\boldsymbol{E}'$ ed $\boldsymbol{H}'$ rispetto all'osservatore (S') sono, indicando con accento il laplaciano ed il gradiente rispetto al sistema di riferimento (S'):

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}'}{\partial t'^2} - \Delta'\boldsymbol{E}' + \frac{\mu\gamma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t'} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}' \rho',$$

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}'}{\partial t'^2} - \Delta\boldsymbol{H}' + \frac{\mu\gamma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t'} = 0,$$

da cui si ricavano immediatamente le equazioni a cui soddisfan $\boldsymbol{D}'$ e $\boldsymbol{B}'$. Avendo posto per semplicità di scrittura:

$$\Lambda' = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta' + \frac{\mu\gamma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}$$

dove Λ' è un operatore lineare differenziale, si ha:

$$\text{(18)} \qquad \begin{aligned} \Lambda'\boldsymbol{E}' &= -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}' \rho' \quad , \quad \Lambda'\boldsymbol{B}' = 0, \\ \Lambda'\boldsymbol{D}' &= -\operatorname{grad}' \rho' \quad , \quad \Lambda'\boldsymbol{H}' = 0, \end{aligned}$$

Esaminiamo dapprima rapidamente il caso in cui $\rho' = 0$, recentemente studiato dal prof. Ferla [6]). Applicando la trasformazione di Lorentz all'operatore Λ', esso si trasforma in un operatore lineare rispetto al sistema (S) che indicheremo con Λ, la cui espressione è:

$$\Lambda = \frac{n^2}{c^2}\frac{1}{1-\beta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + v^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} -$$

$$- \frac{1}{1-\beta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \frac{\mu\gamma}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

---

[6]) Cfr. A. FERLA, *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi omogenei in moto*, Boll. U.M.I., 1956, pagg. 227-237.

Eseguendo alcuni passaggi ed usando una scrittura più sintetica, possiamo anche scrivere:

$$(19)\qquad \Lambda = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{n^2-1}{c^2(1-\beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \\ + \frac{\mu\gamma}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Applicando la trasformazione di Lorentz alle equazioni (18), e tenendo conto che i secondi membri sono tutti nulli, si ha quindi

$$\Lambda\boldsymbol{E}' = 0 \quad , \quad \Lambda\boldsymbol{B}' = 0 \quad , \quad \Lambda\boldsymbol{D}' = 0 \quad , \quad \Lambda\boldsymbol{H}' = 0.$$

Da ciò si può immediatamente dedurre che i vettori ***E, B, D, H*** rispetto all'osservatore (S) soddisfano tutti all'equazione $\Lambda\varphi = 0$. Basta infatti osservare che le componenti dei vettori ***E, B, D, H*** sono, come risulta dalle (2), combinazioni lineari delle componenti di $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{H}'$, ciascuna delle quali soddisfa all'equazione considerata.

Ritornando al caso generale in cui è $\rho' \neq 0$, osserviamo innanzi tutto che dalle (18) si ha:

$$\Lambda'(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\varepsilon}\,\text{grad}'\,\rho'\times\boldsymbol{v} \quad , \quad \Lambda'(\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{v}) = 0,$$

$$\Lambda'(\boldsymbol{D}'\times\boldsymbol{v}) = -\,\text{grad}'\,\rho'\times\boldsymbol{v} \quad . \quad \Lambda'(\boldsymbol{H}'\times\boldsymbol{v}) = 0.$$

Per le (3) quindi si ha anche:

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\Lambda'(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\varepsilon}\,\text{grad}'\,\rho'\times\boldsymbol{v} \quad , \quad \Lambda'(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}) = 0,\\ &\Lambda'(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{v}) = -\,\text{grad}'\,\rho'\times\boldsymbol{v} \quad , \quad \Lambda'(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v}) = 0. \end{aligned}$$

Sostituiamo le relazioni (2) nelle equazioni (18). Tenendo presente le (20), si ha:

$$(21)\qquad \Lambda'\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{B}\right) = -\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\varepsilon}\,\text{grad}'\,\rho' - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\varepsilon v^2}(\text{grad}'\,\rho'\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v},$$

$$(22)\qquad \Lambda'\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{E}\right) = 0,$$

$$(23)\quad \Lambda'\left(\boldsymbol{D}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{H}\right)=-\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{grad}'\rho'-\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}(\mathrm{grad}'\rho'\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v},$$

$$(24)\quad \Lambda'\left(\boldsymbol{H}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\wedge\boldsymbol{D}\right)=0.$$

Con procedimento di calcolo molto elementare dalle equazioni ora scritte facendo sistema con le (20) si possono ottenere altrettante equazioni a cui soddisfano rispettivamente i vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$. Ad esempio, moltiplicando vettorialmente ambo i membri della (21) per $\boldsymbol{v}/c$ e ricordando la seconda delle (20), sa ha:

$$\Lambda'\left(\boldsymbol{E}\wedge\frac{\boldsymbol{v}}{c}+\beta^2\boldsymbol{B}\right)=-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\varepsilon}\,\mathrm{grad}'\rho'\wedge\frac{\boldsymbol{v}}{c}.$$

Sottraendo membro a membro dall'equazione (22), si ottiene:

$$\Lambda'(1-\beta^2)\boldsymbol{B}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\varepsilon}\,\mathrm{grad}'\rho'\wedge\frac{\boldsymbol{v}}{c}.$$

Applichiamo ora la trasformazione di Lorentz. Ricordando che l'operatore Λ' si trasforma nell'operatore Λ definito dalla (19) ed osservando che la componente del gradiente normale alla traslazione del corpo è uguale rispetto ai due osservatori, si ha infine:

$$\Lambda\boldsymbol{B}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{grad}\,\rho'\wedge\frac{\boldsymbol{v}}{c}.$$

equazione che coincide con la (23') della citata Nota del prof. Zeuli.

Analogamente, moltiplicando vettorialmente la (24) per $\boldsymbol{v}/c$, si ha:

$$\Lambda'\left[\boldsymbol{H}\wedge\frac{\boldsymbol{v}}{c}-\beta^2\boldsymbol{D}+\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right]=0.$$

Sommando membro a membro con la (23) e ricordando la terza delle (20) si ha:

$$\Lambda'(1-\beta^2)\boldsymbol{D}=-\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{grad}'\rho'+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}\right)(\mathrm{grad}'\rho'\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}.$$

Si verifica facilmente che è:

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2} = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}\,.$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\Lambda' \boldsymbol{D} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\operatorname{grad}' \rho' - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}\,(\operatorname{grad}' \rho' \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right].$$

Infine, applicando la trasformazione di Lorentz, si ottiene dopo alcuni passaggi:

$$\Lambda \boldsymbol{D} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\operatorname{grad} \rho' + \frac{\partial \rho'}{\partial t}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\right) = -\frac{1}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(c^2 \operatorname{grad} \rho' + \frac{\partial \rho'}{\partial t}\boldsymbol{v}\right)$$

che è l'equazione cercata, coincidente con la (24) della citata Nota del prof. Zeuli.