RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLA VIGNOLI

Sull' eccitazione parametrica nei sistemi a due gradi di libertà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 375-386

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__375_0>

SULL' ECCITAZIONE PARAMETRICA NEI SISTEMI A DUE GRADI DI LIBERTÀ

Nota (*) *di* PAOLA VIGNOLI

1. - Si abbia un sistema oscillante ad un grado di libertà, per fissare le idee un circuito elettrico formato da una autoinduzione e da una capacità in serie e con resistenza trascurabile.

È ben noto, che se la capacità (o meglio la sua inversa) varia intorno ad un valore costante, con legge sinoidale di piccola ampiezza e con frequenza doppia della frequenza propria del circuito, l'ampiezza delle oscillazioni nel circuito tende a crescere indefinitamente [1]). Se però nel circuito si introducono opportuni elementi non lineari, è stata dimostrata dal Minorsky, in base al suo metodo stroboscopico, l'esistenza di un numero finito di soluzioni (approssimate sinoidali, stabili, con ampiezza indipendente dalle condizioni iniziali.

I fenomeni ora descritti rappresentano la cosidetta eccitazione parametrica, eccitazione lineare il primo, non lineare il secondo.

In questa nota mi sono proposta di studiare l'eccitazione parametrica nei sistemi a due gradi di libertà. Più precisamente ho considerato dapprima un sistema di due circuiti elettrici senza resistenza, accoppiati induttivamente, uno con capacità variabile nel modo sopra descritto, l'altro con capacità costante.

(*) Pervenuta in Redazione il 31 agosto 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Bologna.

[1]) Si veda per esempio, anche per le citazioni bibliografiche: N. MINORSKY, *Parametric Excitation*, Journal of Applied Physics, XXII (1951), pagg. 49-54.

Applicando il metodo stroboscopico, ho potuto dimostrare che le correnti nei due circuiti si possono esprimere mediante la somma di due funzioni sinoidali con frequenza ν_1 e ν_2 uguali rispettivamente alle frequenze proprie del sistema dei due circuiti. Però tanto la fase quanto l'ampiezza delle due funzioni sono, sia pure lentamente, variabili, anzi l'ampiezza di almeno una di quelle funzioni cresce indefinitamente (almeno nei limiti di validità del metodo stroboscopico) non solo se la frequenza ν, con cui varia la capacità, è doppia di ν_1 o ν_2 ma anche se ν vale la somma o la differenza di ν_1 e ν_2.

Supposto poi che nel circuito con capacità variabile venga introdotto un elemento non lineare, del tipo considerato da Van der Pol, ho ricercato, sempre col metodo stroboscopico, i casi in cui le predette funzioni sinoidali hanno, nei limiti d'approssimazione del metodo stroboscopico, ampiezza e fase costante. Il problema si riduce a un complicato sistema algebrico di nono grado di cui ho dimostrato, in un caso particolare, l'esistenza di soluzioni reali e positive. Ho però omesso la ricerca della stabilità di queste soluzioni che potrebbe farsi, con i metodi adoperati dal Minorsky, solo superando calcoli estremamente complicati.

2. - Come si è accennato, consideriamo due circuiti elettrici di autoinduzione L_1, L_2, mutua induzione $\mathfrak{M}$. La capacità C, inserita nel primo circuito, sia variabile con legge sinoidale di pulsazione Ω, più precisamente si possa scrivere:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1}(1 + \eta \cos \Omega t)$$

dove η è un numero molto piccolo; la capacità nel secondo circuito sia invece costante ed uguale a C_2. La resistenza del secondo circuito sia trascurabile, quella del primo sia invece una funzione non lineare dell'intensità di corrente, funzione che preciseremo più innanzi.

Allora, dette q_1 e q_2 le cariche su una armatura dei condensatori nei due circuiti (precisamente sull'armatura verso cui si dirige la corrente quando ha segno positivo), valgono le equazioni:

$$L_1\ddot{q}_1 + \mathfrak{M}\ddot{q}_2 + \frac{q_1}{C_1} = -\frac{q_1}{C_1}\eta\cos\Omega t - \dot{q}_1 g(\dot{q}_1) \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}\ddot{q}_1 + L_2\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0 \tag{2}$$

dove $g(\dot{q}_1)$ rappresenta la resistenza non lineare del primo circuito.

Detto per semplicità $f(q_1, \dot{q}_1, t)$ il secondo membro di (1), ovviamente il sistema (1) e (2) è un sistema lagrangiano di energia cinetica $\mathfrak{T}$ e potenziale V, rispettivamente uguali a:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(L_1\dot{q}_1^2 + 2\mathfrak{M}\dot{q}_1\dot{q}_2 + L_2\dot{q}_2^2) \tag{3}$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}\right) \tag{4}$$

e sul quale agiscono le forze lagrangiane:

$$Q_1 = f(q_1, \dot{q}_1, t) \quad , \quad Q_2 = 0 .$$

Ora è noto che esiste una trasformazione lineare:

$$\begin{cases} q_1 = y_1 + y_2 \\ q_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \end{cases} \tag{5}$$

dove β_1 e β_2 sono costanti, tale che, dopo questa sostituzione, $\mathfrak{T}$ e V assumono la forma:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\bar{L}_1\dot{y}_1^2 + \bar{L}_2\dot{y}_2) \qquad V = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{\bar{C}_1} + \frac{y_2^2}{\bar{C}_2}\right)$$

dove $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$, sono costanti positive perchè $\mathfrak{T}$ e V sono funzioni definite positive.

Inoltre poichè le Q si trasformano per covarianza in altre forze lagrangiane, che diremo Y_1 ed Y_2, avremo:

$$Y_1 = \frac{\partial q_1}{\partial y_1} Q_1 = 0 \qquad Y_2 = \frac{\partial q_1}{\partial y_2} Q_1 = Q_1 \tag{6}$$

Quindi, scrivendo le equazioni di Lagrange nelle nuove variabili y_1 e y_2, dividendo la prima per $\bar{L}_1$, la seconda per $\bar{L}_2$, indicando con ω_1^2 e ω_2^2 rispettivamente i prodotti $\frac{1}{\bar{L}_1\bar{C}_1}$, $\frac{1}{\bar{L}_2\bar{C}_2}$, avremo:

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= \frac{1}{\bar{L}_1} f(q_1, \dot{q}_1, t) \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= \frac{1}{\bar{L}_2} f(q_1, \dot{q}_1, t). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ovviamente ω_1 e ω_2 sono le pulsazioni proprie dei due circuiti quando le capacità hanno il valore costante $\bar{C}_1$ e $\bar{C}_2$ e mancano le resistenze. Noi supporremo sempre ω_1 e ω_2 differenti fra loro, più precisamente $\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}\right|$ grande rispetto a η.

3. - Poichè supporremo la resistenza non lineare molto piccola, come la parte variabile della capacità, per risolvere le (7) ci conviene applicare i metodi della meccanica non lineare.

Poniamo perciò:

$$y_i = r_i \operatorname{sen} \psi_i \qquad \dot{y}_i = r_i \cos \psi_i \qquad \psi_i = \omega_i t + \varphi_i \qquad (i = 1, 2) \tag{8}$$

dove r_i e φ_i sono nuove funzioni del tempo t.

Si ha allora con noti passaggi [2]):

$$\left\{\begin{aligned} \dot{r}_i &= \frac{1}{\bar{L}_i \omega_i} f(q_1, \dot{q}_1, t) \cos \psi_i \\ \dot{\varphi}_i &= -\frac{1}{r_i \omega_i \bar{L}_i} f(q_1, \dot{q}_1, t) \operatorname{sen} \psi_i . \end{aligned}\right. \tag{9}$$

---

[2]) Confronta MINORSKY, *Non- linear Mechanics*, J. D. Edwards Ann. Arbor (1947), pag. 185.

4. - **Consideriamo ora il caso in cui la resistenza non lineare sia nulla. Allora, sostituendo a q_1 il suo valore e posto $\varepsilon_i = \frac{\eta}{L_i \omega_i C_i}$ (poichè supporremo η positiva, tale sarà ε_i ed inoltre molto piccola come η) e ricordando il valore di $f(q_1, \dot{q}_1, t)$ le equazioni (9) assumono il valore:**

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{r}_1 &= -\varepsilon_1 r_1 \cos \Omega t \operatorname{sen} \psi_1 \cos \psi_1 - \varepsilon_1 r_2 \cos \Omega t \cos \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2 \\ \dot{\varphi}_1 &= \varepsilon_1 \cos \Omega t \operatorname{sen}^2 \psi_1 + \varepsilon_1 \frac{r_2}{r_1} \cos \Omega t \operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2 \\ \dot{r}_2 &= -\varepsilon_2 r_1 \cos \Omega t \operatorname{sen} \psi_1 \cos \psi_2 - \varepsilon_2 r_2 \cos \Omega t \operatorname{sen} \psi_2 \cos \psi_2 \\ \dot{\varphi}_2 &= \varepsilon_2 \frac{r_1}{r_2} \cos \Omega t \operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2 + \varepsilon_2 \cos \Omega t \operatorname{sen}^2 \psi_2 \,. \end{aligned} \right.$$

Ora, poichè ε_1, ε_2 sono molto piccoli, si ha che in un intervallo di tempo t, $t + T$ (qualora T non sia troppo lungo) si può ritenere, a meno di potenze superiori di ε_1 e ε_2, r_1 ed r_2 costanti, ψ_1 e ψ_2 uguali a $\omega_1 t + \varphi_1$, $\omega_2 t + \varphi_2$ dove φ_1 e φ_2 possono riguardarsi come costanti.

Allora, a meno di termini in ε_1^2 e ε_2^2, al secondo membro di (10) potremo riguardare r_1, r_2, φ_1 e φ_2 come costanti; quindi, applicando le formule di prostaferesi, si ha che a secondo membro delle equazioni ora citate compaiono termini di pulsazione Ω, $2\omega_1 + \Omega$, $2\omega_1 - \Omega$, $\omega_1 + \omega_2 + \Omega$, $\omega_2 + \omega_1 - \Omega$, $2\omega_2 + \Omega$, $2\omega_2 - \Omega$, $\omega_1 - \omega_2 + \Omega$, $\omega_1 - \omega_2 - \Omega$.

Sia ora, per fissare le idee, $\Omega = 2\omega_1$; allora nell'espressione di $\frac{dr_1}{dt}$ si ha (si tenga presente $\omega_1 \neq \omega_2$) un solo termine indipendente dal tempo, mentre gli altri sono funzioni sinoidali del tempo.

Supposto di poter scegliere T abbastanza grande in modo che gli integrali delle funzioni trigonometriche siano trascurabili, si ha:

$$(11) \qquad \frac{r_1(t+T) - r_1(t)}{T} = -\frac{\varepsilon_1 r_1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_1$$

Allora le stesse considerazioni che conducono il metodo stroboscopico ci portano a sostituire al primo membro di (11) la derivata rispetto a t e si ottiene:

$$\frac{dr_1}{dt} = -\frac{\varepsilon_1 r_1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi_1. \tag{12}$$

In modo analogo si trova:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{\varepsilon_1}{4}\cos 2\varphi_1 \\ &\frac{dr_2}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = 0 \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Dividendo (12) per la prima di (13) si ha:

$$\frac{dr_1}{d\varphi_1} = r_1 \operatorname{tang} 2\varphi_1$$

Da cui, separando le variabili ed integrando ed indicando con c_1 una costante, si ha:

$$r_1 = \frac{c_1}{\sqrt{|\cos 2\varphi_1|}}.$$

Invece, separando le variabili nelle (13) ed integrando si ha, indicando con c_2 un'altra costante:

$$\operatorname{tang}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) = c_2 e^{-\frac{\varepsilon_1}{2}t}$$

cioè (poichè si è supposto, per fissare le idee, η e quindi ε_1 positivo), per $t \to \infty$, φ_1 tende a $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ (con k intero); sicchè $\cos 2\varphi_1$ tende a zero e perciò $r_1 \to \infty$, mentre φ_2 e r_2 restano costanti.

Si generalizza perciò un risultato valido per i sistemi ad un grado di libertà e cioè, se un parametro di un sistema oscillante, nel nostro caso la capacità, viene fatto oscillare con frequenza doppia di una delle frequenze proprie del sistema, le oscillazioni del sistema tendono ad assumere ampiezza infinita.

5. - Passiamo al caso più interessante in cui sia $\omega_1 + \omega_2 = \Omega$.

Allora i termini che non dipendono dal tempo nelle (10) valgono rispettivamente: $-\frac{\varepsilon_1}{4} r_2$, $-\frac{\varepsilon_1}{4}\frac{r_2}{r_1}$, $-\frac{\varepsilon_1}{4} r_1$, $-\frac{\varepsilon_2}{4}\frac{r_1}{r_2}$.

Applicando il metodo stroboscopico ed indicando per brevità con b_1 e b_2 rispettivamente $-\frac{\varepsilon_1}{4}$ e $-\frac{\varepsilon_2}{4}$, il sistema assume la forma (ovviamente b_1 e b_2 hanno lo stesso segno),

$$
(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr_1}{dt} = b_1 r_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) \\[2ex] \dfrac{d\varphi_1}{dt} = b_1 \dfrac{r_2}{r_1} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\[2ex] \dfrac{dr_2}{dt} = b_2 r_1 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) \\[2ex] \dfrac{d\varphi_2}{dt} = b_2 \dfrac{r_1}{r_2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{cases}
$$

Per risolvere questo sistema, cominciamo col dividere fra loro la prima e la terza delle (14). Si ottiene:

$$\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{b_1}{b_2}\frac{r_2}{r_1}.$$

Separando le variabili ed integrando si ha: (c_1 indica una costante arbitraria)

$$(15) \qquad r_1^2 - \frac{b_1}{b_2} r_2^2 = c_1.$$

Sommando invece membro a membro la seconda e la quarta delle (14) si ottiene:

$$(16) \qquad \frac{d(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt} = \frac{b_1 r_2^2 + b_2 r_1^2}{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dividendo membro a membro la prima delle (14) con la (16) e separando le variabili:

$$\frac{b_1 r_2^2 + b_2 r_1^2}{b_1 r_2^2 r_1} dr_1 = \operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2) d(\varphi_1 + \varphi_2). \tag{17}$$

Ora, ricavando dalla (15) r_2^2 in funzione di r_1^2, si ha:

$$r_2^2 = (r_1^2 - c_1)\frac{b_2}{b_1} \tag{18}$$

e sostituendo nella (17):

$$\frac{2r_1^2 - c_1}{(r_1^2 - c_1) r_1} dr_1 = \operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2) d(\varphi_1 + \varphi_2)$$

cioè:

$$\frac{dr_1}{r_1} + \frac{r_1}{r_1^2 - c_1} dr_1 = \operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2) d(\varphi_1 + \varphi_2)$$

ed integrando e indicando con c_2 un'altra costante, si ha:

$$r_1\sqrt{r_1^2 - c_1} = \frac{c_2}{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Questa equazione ci permette di esprimere r_1^2 in funzione di $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Infatti, elevando al quadrato, si ha:

$$r_1^4 - c_1 r_1^2 - \frac{c_2^2}{\cos^2(\varphi_1 + \varphi_2)} = 0.$$

Risolvendo questa equazione e scartando la radice negativa a cui corrisponderebbero valori immaginari di r_1, rimane:

$$r_1^2 = \frac{c_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sqrt{c_1^2 \cos^2(\varphi_1 + \varphi_2) + 4c_2^2}}{2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}. \tag{19}$$

Ricavando da (18) r_2^2 in funzione di $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ si ottiene:

$$r_2^2 = \frac{b_2}{b_1}\left[\frac{\sqrt{c_1^2 \cos^2(\varphi_1 + \varphi_2) + 4c_2^2} - c_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}\right]. \tag{20}$$

E moltiplicando fra loro la (19) e la (20) si ha:

$$r_1 r_2 = \pm \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \frac{c_2}{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Per la (17) si ha dunque l'espressione:

$$\frac{d(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt} = \pm \frac{\sqrt{b_1 b_2}}{c_2} \sqrt{c_1^2 \cos^2(\varphi_1 + \varphi_2) + 4c_2^2} \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Dividendo ambo i membri di questa equazione per $\cos^2(\varphi_1 + \varphi_2)$, si ha:

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi_1 + \varphi_2)} \frac{d(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt} = \pm \frac{\sqrt{b_1 b_2}}{c_2} \sqrt{c_1^2 + \frac{4c_2^2}{\cos^2(\varphi_1 + \varphi_2)}} \tag{21}$$

Posto per semplicità:

$$x = \frac{2c_2}{\sqrt{c_1^2 + 4c_2^2}} \operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2); \qquad \alpha = 2\sqrt{b_1 b_2}$$

la (21) si riduce a:

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \pm \alpha dt.$$

È noto [3]) allora che

$$x = \operatorname{sen} h[(\pm \alpha t) + K].$$

Ora, per $t \to \infty$, il secondo membro di questa equazione e perciò anche $\operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, cioè $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ tende allo zero per $t \to \infty$.

---

[3]) Cfr. per es. G. CIMMINO, *Istituzioni di Analisi*, Patron, Bologna, pag. 435.

Si ha subito allora dalle espressioni di r_1^2 e r_2^2 che esse tendono a $+\infty$, per $t \to \infty$.

Anche in questo caso non solo non esistono soluzioni periodiche, ma le oscillazioni tendono a crescere in maniera illimitata.

Analoghe considerazioni potrebbero farsi nel caso di $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, ma su ciò non insisteremo.

6. - Supporremo ora non nullo il termine non lineare $g(\dot{q}_1)$ che rappresenta la resistenza; supporremo anzi che $g(\dot{q}_1)$ abbia l'espressione quadratica usata da Van der Pol, cioè sia:

$$g(\dot{q}_1) = -e(1 - \gamma \dot{q}_1)$$

dove e e γ sono costanti positive, la prima molto piccola.

Dovremo perciò aggiungere a secondo membro delle equazioni (10) quattro espressioni che chiameremo rispettivamente A_1, B_1, A_2, B_2, rispettivamente della forma: (indicheremo per brevità con e_1 e e_2 $-\dfrac{e}{\overline{L}_1\omega_1}$ ed $-\dfrac{e}{\overline{L}_2\omega_2}\Big)$.

$$A_1 = -\frac{1}{\overline{L}_1\omega_1}\dot{q}_1 g(\dot{q}_1)\cos\psi_1 = -e_1[r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2 - \\ - \gamma(r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2)^3]\cos\psi_1$$

$$B_1 = \frac{1}{r_1\omega_1\overline{L}_1}\dot{q}_1 g(\dot{q}_1)\operatorname{sen}\psi_1 = +\frac{e_1}{r_1}[r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2 - \\ - \gamma(r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2)^3]\operatorname{sen}\psi_1$$

$$A_2 = -\frac{1}{\overline{L}_2\omega_2}\dot{q}_1 g(\dot{q}_1)\cos\psi_2 = -e_2[r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2 - \\ - \gamma(r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2)^3]\cos\psi_2$$

$$B_2 = \frac{1}{r_2\omega_2\overline{L}_2}\dot{q}_1 g(\dot{q}_1)\operatorname{sen}\psi_2 = \frac{e_2}{r_2}[r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2 - \\ - \gamma(r_1\cos\psi_1 + r_2\cos\psi_2)^3]\operatorname{sen}\psi_2$$

Ora, eseguendo i prodotti indicati nell'espressione di A_1, ne risultano anzitutto termini in $\cos\psi_1 \cos\psi_2$, $\cos\psi_1 \cos^3\psi_2$, $\cos^3\psi_1 \cos\psi_2$, che, trasformati con le formule di prostaferesi, danno luogo a funzioni sinoidali del tempo trascurabili agli effetti del metodo stroboscopico [4]).

Rimangono termini in $\cos^2\psi_1$, $\cos^4\psi_1$, $\cos^2\psi_1 \cos^2\psi_2$, moltiplicati per opportune costanti. Essi si possono scindere in termini sinoidali, trascurabili ancora agli effetti del metodo stroboscopico, e in termini costanti che valgono rispettivamente $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$.

Perciò, supposto ancora $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, applicando il metodo stroboscopico alla prima di (9), tenendo ora conto della resistenza non lineare, si trova:

$$\frac{dr_1}{dt} = b_1 r_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{e_1 r_1}{2} + \frac{3}{8} e_1 \gamma r_1^3 + \frac{3 e_1 \gamma r_1 r_2^2}{4}. \tag{22}$$

Analogamente, applicando il metodo stroboscopico alle altre equazioni, si ha:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = b_1 \frac{r_2}{r_1} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{23}$$

$$\frac{dr_2}{dt} = b_2 r_1 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{e_2 r_2}{2} + \frac{3 e_2}{8} \gamma r_2^3 + \frac{3}{4} e_2 \gamma r_1^2 r_2 \tag{24}$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = b_2 \frac{r_1}{r_2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2). \tag{25}$$

Le (22), (23), (24), (25), costituiscono un sistema di cui ci limiteremo a studiare le soluzioni stazionarie, cioè quelle soluzioni corrispondenti a valori costanti di r_1, r_2, φ_1, φ_2.

Ora, φ_1 e φ_2 sono costanti se $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$, cioè se $\varphi_1 + \varphi_2$ vale un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$. Si ha allora $\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = \pm 1$, sicchè r_1 e r_2 sono costanti solo se (nel caso in cui

[4]) Supporremo $3\omega_1 \neq \omega_2$, $3\omega_2 \neq \omega_1$.

sen $(\varphi_1 + \varphi_2) = -1)$ si ha:

$$\begin{cases} b_1 r_2 + \dfrac{e_1}{2} r_1 - \dfrac{3}{8} e_1 \gamma r_1^3 - \dfrac{3 e_1 \gamma}{4} r_1 r_2^2 = 0 \\ b_2 r_1 + \dfrac{e_2}{2} r_2 - \dfrac{3}{8} e_2 \gamma r_2^3 - \dfrac{3}{4} e_2 \gamma_1^2 r_2 = 0 . \end{cases}$$

La discussione di questo sistema si presenta alquanto difficile. Ci limiteremo a verificare l'esistenza di casi particolari, in cui esistono soluzioni reali e positive.

Supponiamo $e_1 = b_1$, $e_2 = b_2$. Allora si verifica subito che il sistema è soddisfatto ponendo:

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{4}{3\gamma}}$$

cioè attribuendo a r_1 e r_2 i valori che competono alle ampiezze degli oscillatori di Van der Pol.

Si è così provato, almeno in un caso particolare e conforme a quanto si è detto in principio, l'esistenza, nei due circuiti, di oscillazioni rappresentate da due funzioni sinoidali di frequenza diversa e ampiezza indipendente dalle condizioni iniziali.