RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CARLO GARIBALDI

Su una proprietà di media caratteristica per l'equazione dell'elastostatica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 306-318

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__306_0>

SU UNA PROPRIETÀ DI MEDIA CARATTERISTICA PER L'EQUAZIONE DELL'ELASTOSTATICA

Nota (*) *di* ANTONIO CARLO GARIBALDI (*a Genova*)

1. - Sia dato un solido elastico, in equilibrio, omogeneo ed isotropo, non soggetto a forze di massa, occupante un dominio T dello spazio in cui si introduca una terna di assi cartesiani ortogonali ξ, η, ζ, di origine 0; sia $\boldsymbol{s}(Q)$ il vettore che rappresenta lo spostamento elastico nel punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$. In ogni punto del dominio T, $\boldsymbol{s}(Q)$ soddisfa notoriamente all'equazione:

$$\Delta^2 \boldsymbol{s}(Q) + q \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s}(Q) = 0 \tag{1.1}$$

con q costante.

Indicheremo con $S(P, R)$ la sfera di centro P e raggio R, mentre $\sigma(P, R)$ sarà la superficie della stessa sfera e diremo poi T_R la porzione di T tale che ogni sfera $S(P, R)$ con $P \in T_R$ sia contenuta in T. Osserviamo subito che ogni punto interno a T appartiene a qualche T_R con R opportuno. Perciò, quanto enunceremo per T_R vale per ogni punto interno a T. Detto ora $P(x, y, z)$ un punto di T e $Q(\xi, \eta, \zeta)$ un punto generico di $S(P, R)$, converrà introdurre un sistema di coordinate sferiche di polo P, per cui si avrà:

$$\xi = x + \rho \cos \vartheta \sin \tau \qquad \eta = y + \rho \sin \vartheta \sin \tau \qquad \zeta = z + \rho \cos \tau$$

essendo: $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$, $0 \leq \tau < \pi$.

(*) Pervenuta in Redazione il 18 luglio 1957.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Genova.

Poniamo ora:

$$\boldsymbol{I}(P, \rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\sigma(P, \rho)} \boldsymbol{s}(Q) d\sigma \qquad \boldsymbol{K}(P, \rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\sigma(P, \rho)} s_\rho(Q) \boldsymbol{n} d\sigma$$

essendo $\boldsymbol{n}(Q) = \dfrac{Q-P}{\rho}$ la normale esterna a $\sigma(P, \rho)$ in Q ed $s_\rho = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}$.

Il prof. Sbrana ha stabilito [1] [1]), nell'ipotesi della continuità in T_R del vettore $\boldsymbol{s}(Q)$ e delle sue derivate parziali prime, la formula:

$$\boldsymbol{s}(P) = 3\frac{2-q}{6+2q}\boldsymbol{I}(P, \rho) + \frac{15q}{6+2q}\boldsymbol{K}(P, \rho) \tag{1.2}$$

valida per ogni ρ compreso tra 0 e R. Scriveremo più concisamente:

$$\boldsymbol{s}(P) = \lambda \boldsymbol{I}(P, \rho) + \mu \boldsymbol{K}(P, \rho) \tag{1.3}$$

avendo posto:

$$\lambda = 3\frac{2-q}{6+2q} \qquad \mu = \frac{15q}{6+2q}.$$

La (1.3) dà il valore di $\boldsymbol{s}(P)$ come combinazione lineare delle medie dei valori di $\boldsymbol{s}(Q)$ e di $s_\rho(Q)\boldsymbol{n}(Q)$ calcolate su sfere $\sigma(P, \rho)$ e rappresenta per le soluzioni di (1.1) una formula analoga a quella, ben nota, di Gauss:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\sigma(P, \rho)} u(Q) d\sigma \tag{1.4}$$

relativa alle funzioni armoniche, soluzioni dell'equazione:

$$\Delta^2 u(P) = 0. \tag{1.5}$$

Volendo rendere più esplicita questa analogia, che ci sarà di guida per il seguito, porremo:

$$\boldsymbol{u}(P, Q) = \lambda \boldsymbol{s}(Q) + \mu s_\rho(Q) \boldsymbol{n}(Q) \qquad Q \in S(P, \rho) \tag{1.6}$$

---

1) Tutti i numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia finale.

ed è utile rilevare fin d'ora che il vettore $\boldsymbol{u}(P, Q)$ dipende dal punto P attraverso il vettore $\boldsymbol{n}(Q) = \dfrac{Q - P}{\rho}$ che interviene, esplicitamente ed implicitamente mediante s_ρ, nel secondo termine di (1.6). Riscriveremo pertanto la (1.3) nella forma definitiva:

$$\boldsymbol{s}(P) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\sigma(P,\rho)} \boldsymbol{u}(P, Q)d\sigma. \tag{1.7}$$

È noto da tempo che ogni funzione $u(P)$ che verifica in T la (1.4) soddisfa necessariamente alla (1.5) posto che valgano certe ipotesi sulla $u(P)$ di cui ora diremo e che sono state successivamente allargate. Il risultato più generale, dopo le ricerche di Levi [3] e di Tonelli [4] è questo: *ogni funzione $u(P)$ sommabile in T e verificante la* (1.4) *in T_R a meno di un insieme di punti di misura nulla e per quasi tutti i valori di ρ compresi tra O e R, soddisfa a* (1.5) *quasi ovunque in T_R*. Più brevemente, si dice che la (1.4) è caratteristica per le soluzioni di (1.5).

Il prof. Sbrana ha dimostrato ancora [2] che la sua formula di media (1.7) è caratteristica per i vettori $\boldsymbol{s}(Q)$ soddisfacenti ad (1.1) nell'ipotesi che $\boldsymbol{s}(Q)$ sia continuo in T_R insieme alle sue derivate parziali prime.

Scopo di questo lavoro è di enunciare in ipotesi più larghe il risultato di [2] ripetendo il procedimento noto per le funzioni armoniche e dimostrando precisamente che: *ogni vettore $\boldsymbol{s}(Q)$ sommabile in T e soddisfacente ad* (1.7) *in quasi tutti i punti di T e per quasi tutti i valori di ρ compresi tra O e R, verifica* (1.1) *quasi ovunque in T_R.*

Avremo occasione nella dimostrazione, di stabilire formule di media, ancora del tipo (1.7), per le derivate parziali prime di $\boldsymbol{s}(Q)$; daremo inoltre un'applicazione di questi risultati alla convergenza di successioni che approssimano in media d'ordine 2 una soluzione di (1.1).

Un'altra proprietà di media, sempre nell'ipotesi della sommabilità del vettore $\boldsymbol{s}(Q)$, è stata data dal prof. Pini [6].

2. - Vogliamo anzitutto dedurre da (1.7) una formula di media volumetrica, cioè su sfere $S(P, \rho)$, per il vettore $\boldsymbol{s}(P)$.

L'ipotesi che $\boldsymbol{s}(Q)$ sia sommabile in T porta subito a ritenere ivi sommabile anche $\boldsymbol{u}(P, Q)$ che è una combinazione lineare a coefficienti variabili ma limitati delle componenti di $\boldsymbol{s}(Q)$. Calcoliamo perciò $\iiint_{S(P,R')} \boldsymbol{u}(P, Q)dS$ tenendo conto di (1.7); si ha:

$$\iiint_{S(P,R')} \boldsymbol{u}(P, Q)dS = \int_0^{R'} d\rho \iint_{\sigma(P,\rho)} \boldsymbol{u}(P, Q)dS = \int_0^{R'} 4\pi\rho^2 \boldsymbol{s}(P)d\rho = \frac{4\pi R'^3}{3}\boldsymbol{s}(P)$$

da cui la formula cercata:

$$\boldsymbol{s}(P) = \frac{3}{4\pi R'^3} \iiint_{S(P,R')} \boldsymbol{u}(P, Q)dS, \tag{2.1}$$

valida per ogni ogni R' compreso tra O e R e, per le ipotesi fatte, in quasi tutti i punti P di T_R. Però il secondo membro di (2.1) ha senso in ogni punto di T_R per cui possiamo sostituire $\boldsymbol{s}(P)$ con il vettore definito da (2.1) in tutto T_R che coinciderà con il precedente a meno di un insieme di punti di misura nulla; per semplicità, indicheremo ancora con $\boldsymbol{s}(P)$ questo vettore su cui ragioniamo nei numeri seguenti.

3. - Proviamo ora che il vettore $\boldsymbol{s}(P)$, definito da (2.1), è continuo. Presi due punti qualunque P, P' di T_R avremo:

$$\boldsymbol{s}(P') - \boldsymbol{s}(P) = \frac{3}{4\pi R^3}\left\{ \iiint_{S(P',R)} \boldsymbol{u}(P', Q)dS - \iiint_{S(P,R)} \boldsymbol{u}(P, Q)dS \right\}.$$

Consideriamo le due sfere $S(P', R)$ e $S(P, R)$: presi P' e P abbastanza vicini, indicheremo con S_1 l'intersezione di esse e con S_2, S_3 rispettivamente le parti restanti di $S(P', R)$ e di $S(P, R)$. Allora si ha subito:

$$|\boldsymbol{s}(P') - \boldsymbol{s}(P)| \leq \frac{3}{4\pi R^3}\left[\left|\iiint_{S_2} \boldsymbol{u}(P', Q)dS\right| + \right. \tag{3.1}$$

$$\left. + \left|\iiint_{S_3} \boldsymbol{u}(P, Q)dS\right| + \mu \iiint_{S_1} |s'_\rho \boldsymbol{n}' - s_\rho \boldsymbol{n}|\, dS\right],$$

avendo posto: $\boldsymbol{n}' = \dfrac{Q - P'}{\rho'}$, $\boldsymbol{n} = \dfrac{Q - P}{\rho}$ e $\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}' = s'_\rho$, $\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n} = s_\rho$.

Basterà dimostrare che quanto P' tende a P, cioè quando $|PP'| = h$ tende a zero, gli integrali scritti in (3.1) tendono a zero. Ciò segue facilmente per i primi due ricordando l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, in quanto per $h \to 0$ i volumi di S_2, S_3 tendono a zero. Quanto all'ultimo integrale della (3.1) occorre spezzarlo in due parti perchè, per $h \to 0$, S_1 tende alla sfera $S(P, R)$; diremo allora $\bar{S}_1$ la regione ottenuta da S_1 prendendo in essa tutti i punti che distano più di $\sqrt{h}$ da qualche punto del segmento PP'. Il volume della regione $(S_1 - \bar{S}_1)$ tende a zero per $h \to 0$ e quindi, ragionando come in precedenza, si può concludere che $\lim\limits_{h \to 0} \iiint\limits_{S_1 - \bar{S}_1} |s'_\rho \boldsymbol{n}' - s_\rho \boldsymbol{n}| \, dS = 0$.

Consideriamo ora l'integrale:

$$\iiint\limits_{\bar{S}_1} |s'_\rho \boldsymbol{n}' - s_\rho \boldsymbol{n}| \, dS. \tag{3.2}$$

Preso un punto Q qualsiasi di $\bar{S}_1$, la differenza tra le due normali $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ in Q risulta tale che:

$$|\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n}| = 2\,|\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{n}'| \sin\frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \tag{3.3}$$

essendo α l'angolo PQP'. Applicando al triangolo $\widehat{PQP'}$ il teorema di Carnot:

$$h^2 = PQ^2 + P'Q^2 - 2P'Q \cdot PQ \cos\alpha$$

$$\frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{h^2 - (PQ - P'Q)^2}{4PQ \cdot P'Q} \leq \frac{h^2}{4\sqrt{h} \cdot \sqrt{h}} = \frac{h}{4}$$

poichè in $\bar{S}_1$ PQ e $P'Q$ sono non inferiori a $\sqrt{h}$. Sostituendo in (3.3) si ha:

$$|\boldsymbol{n}'(Q) - \boldsymbol{n}(Q)| \leq \sqrt{h} \qquad Q \in \bar{S}_1. \tag{3.4}$$

Mediante la (3.4) possiamo maggiorare l'integrale (3.2) in questo modo:

$$\iiint_{\overline{S}_1} |s'_\rho \boldsymbol{n}' - s_\rho \boldsymbol{n}| \, dS \le \iiint_{\overline{S}_1} |s_\rho| \, |\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n}| \, dS +$$

$$+ \iiint_{\overline{S}_1} |s'_\rho - s_\rho| \, |\boldsymbol{n}| \, dS \le \iiint_{\overline{S}_1} |\boldsymbol{s}| \, |\boldsymbol{n}| \, |\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n}| \, dS +$$

$$+ \iiint_{\overline{S}_1} |\boldsymbol{s}| \, |\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n}| \, |\boldsymbol{n}| \, dS \le 2\sqrt{h} \iiint_{S(P,\,R)} |\boldsymbol{s}| \, dS .$$

Poichè $|\boldsymbol{s}|$ è sommabile in T per ipotesi si conclude che per $h \to 0$ anche l'integrale (3.2) tende a zero: con ciò tutti gli integrali di (3.1) tendono a zero e quindi la continuità di $\boldsymbol{s}(P)$ è dimostrata.

4. - Vogliamo ora dimostrare che il nostro vettore $\boldsymbol{s}(P)$ definito in (2.1) possiede anche derivate parziali prime continue.

Calcoliamo esplicitamente, ad esempio, $\dfrac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial z}$ servendoci di un cambiamento di variabili suggerito dal prof. Sbrana. Riprendiamo il vettore $\boldsymbol{u}(P, Q)$ per osservare che in virtù della continuità di $\boldsymbol{s}(P)$ dimostrata nel numero precedente, esso risulta continuo in ogni punto di $S(P, R)$ tranne che nel centro in cui non essendo definita la normale $\boldsymbol{u}(P, Q)$ è indeterminato per quanto in un intorno qualunque di P $\boldsymbol{u}(P, Q)$ con $P \neq Q$ è limitato. Introduciamo ora un nuovo vettore ponendo:

$$\boldsymbol{s}(P, \varepsilon) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{S(P,\,R) - S(P,\,\varepsilon)} \boldsymbol{u}(P, Q) ds \tag{4.1}$$

L'integrale nel secondo membro è funzione continua; inoltre si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{s}(P, \varepsilon) = \boldsymbol{s}(P). \tag{4.2}$$

Passiamo ora a coordinate cilindriche di asse z ponendo:

$$\xi - x = \sqrt{\psi} \cos \varphi, \qquad \eta - y = \sqrt{\psi} \sin \varphi, \qquad \zeta - z = \zeta - z.$$

Si ha allora:

$$(4.2)\qquad \boldsymbol{s}(P,\varepsilon)=\frac{3}{4\pi R^3}\left\{\int\limits_{z-R}^{z-\varepsilon} d\zeta \int\limits_{0}^{R^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int\limits_{0}^{2\pi} \boldsymbol{u}(P,Q)d\varphi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} d\zeta \int\limits_{\varepsilon^2-(\zeta-z)^2}^{R^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int\limits_{0}^{2\pi} \boldsymbol{u}(P.\,Q)d\varphi+\int\limits_{z+\varepsilon}^{z+R} d\zeta \int\limits_{0}^{R^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int\limits_{0}^{2\pi} \boldsymbol{u}(P,Q)d\varphi\right\}.$$

La variabile z figura in (4.2) come parametro nei limiti di integrazione ed anche in $\boldsymbol{u}(P,\,Q)$ ma soltanto attraverso la normale $\boldsymbol{n}(Q)=\dfrac{Q-P}{\rho}$ mentre $\boldsymbol{s}(Q)$ non dipende da z per cui si ha:

$$(4.3)\quad \frac{\partial\boldsymbol{u}(P,Q)}{\partial z}=\lambda\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{s}(Q)+\mu\frac{\partial}{\partial z}(s_\rho\boldsymbol{n})=\mu\left(\boldsymbol{s}\times\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial z}\right)\boldsymbol{n}+\mu(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n})\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial z}.$$

Inoltre si vede facilmente che:

$$(4.4)\qquad \frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial z}=-\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\zeta}.$$

Deriviamo ora la (4.2) rispetto al parametro z con la regola solita:

$$\frac{\partial\boldsymbol{s}(P,\varepsilon)}{\partial z}=\frac{3}{4\pi R^3}\left\{\int\limits_{0}^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int\limits_{0}^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,Q)]_{\zeta=z-\varepsilon}d\varphi+\right.$$

$$+2\int\limits_{z-R}^{z-\varepsilon} d\zeta \int\limits_{0}^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-z)^2}(\zeta-z)d\varphi+$$

$$+\int\limits_{z-R}^{z-\varepsilon} d\zeta \int\limits_{0}^{R^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}d\varphi+\int\limits_{0}^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int\limits_{0}^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,Q)]_{\zeta=z+\varepsilon}d\varphi-$$

$$-\int\limits_{0}^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int\limits_{0}^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,Q)]_{\zeta=z-\varepsilon}d\varphi+2\int\limits_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} d\zeta \int\limits_{0}^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-z)^2}(\zeta-z)d\varphi-$$

$$-2\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} d\zeta \int_0^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,\, Q)]_{\psi=\varepsilon^2-(\zeta-z)^2}(\zeta-z)d\varphi\,+$$

$$+\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} d\zeta \int_{\varepsilon^2-(\zeta-z)^2}^{R^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\, d\varphi - \int_0^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int_0^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,\, Q)]_{\zeta=z+\varepsilon} d\varphi\,+$$

$$+\,2\int_{z+\varepsilon}^{z+R} d\zeta \int_0^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,\, Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-z)^2}(\zeta-z)d\varphi\,+$$

$$+\int_{z+\varepsilon}^{z+R} d\zeta \int_0^{R^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\, d\varphi \Big\}.$$

Raggruppando opportunamente i termini e semplificando si ha:

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}(P,\, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{3}{4\pi R^3}\Big\{ 2\int_{z-R}^{z+R} d\zeta \int_0^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,\, Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-z)^2}(\zeta-z)d\varphi\,-$$

$$-\,2\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} d\zeta \int_0^{2\pi} [\boldsymbol{u}(P,\, Q)]_{\psi=\varepsilon^2-(\zeta-z)^2}(\zeta-z)d\varphi\,+$$

$$+\int_{z-R}^{z+R} d\zeta \int_0^{R^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\, d\varphi - \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} d\zeta \int_0^{\varepsilon^2-(\zeta-z)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\, d\varphi.$$

Tornando alla notazione solita si ottiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}(P,\, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{3}{4\pi R^3}\Big\{ \iint_{\sigma(P,\, R)} \boldsymbol{u}(P,\, Q)\, \frac{(\zeta - z)}{R}\, d\sigma\,- \tag{4.5}$$

$$-\iint_{\sigma(P,\, \varepsilon)} \boldsymbol{u}(P,\, Q)\, \frac{(\zeta - z)}{R}\, d\sigma + \iiint_{S(P,\, R)} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\, dS - \iiint_{S(P,\, \varepsilon)} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\, dS.$$

Per giustificare completamente gli ultimi due passaggi occorre ancora dimostrare che il vettore $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}$ è sommabile in

$S(P, R)$. Ricordando (4.3) e (4.4):

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = -\mu\left(\boldsymbol{s} \times \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \zeta}\right)\boldsymbol{n} - \mu(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n})\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \zeta}.$$

È facile vedere che $\left|\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \zeta}\right| \leq \frac{1}{\rho}$, $\rho = |\overline{PQ}|$ e quindi:

$$\left|\iiint\limits_{S(P, R)} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} dS\right| \leq 2\mu \iiint\limits_{S(P, R)} |\boldsymbol{s}| \frac{1}{\rho} dS \leq 4\pi M R^2, \tag{4.6}$$

essendo M il massimo della funzione continua $\boldsymbol{s}(Q)$ in T_R. Da (1.6) segue ora:

$$|\boldsymbol{u}(P, Q)| \leq (\lambda + \mu)\,|\boldsymbol{s}(Q)| \leq (\lambda + \mu)M. \tag{4.7}$$

Nella (4.5) si può passare al limite per $\varepsilon \to 0$ e le (4.6), (4.7) ci assicurano che i due integrali relativi a $S(P, \varepsilon)$ e a $\sigma(P, \varepsilon)$ tendono a zero uniformemente rispetto a P. Ricordando la (4.2), per un noto teorema di analisi si può affermare che:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial \boldsymbol{s}(P, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial z}$$

e sostituendo al limite il valore trovato si ha in definitiva:

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial z} = \frac{3}{4\pi R^3}\left\{\iint\limits_{\sigma(P, R)} \boldsymbol{u}(P, Q)\cos(\boldsymbol{n}, z)d\sigma - \right.$$

$$\left. - \mu \iiint\limits_{S(P, R)} \left[\left(\boldsymbol{s} \times \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \zeta}\right)\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n})\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \zeta}\right] dS \right\}.$$

Così è calcolata la derivata di $\boldsymbol{s}(P)$ rispetto a z; in modo analogo si calcolano le derivate rispetto alle altre variabili.

sicchè valgono le formule:

$$
(4.8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial x} &= \frac{3}{4\pi R^3}\left\{ \iint\limits_{\sigma(P,R)} \boldsymbol{u}(P,\, Q)\cos(\boldsymbol{n},\, x)d\sigma - \right. \\
&\qquad \left. - \mu \iiint\limits_{S(P,R)} \left[\left(\boldsymbol{s}\times\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi}\right)\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n})\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi}\right] dS \right\} \\
\frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial y} &= \frac{3}{4\pi R^3}\left\{ \iint\limits_{\sigma(P,R)} \boldsymbol{u}(P,\, Q)\cos(\boldsymbol{n},\, y)d\sigma - \right. \\
&\qquad \left. - \mu \iiint\limits_{S(P,R)} \left[\left(\boldsymbol{s}\times\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \eta}\right)\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n})\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \eta}\right] dS \right\} \\
\frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial z} &= \frac{3}{4\pi R^3}\left\{ \iint\limits_{\sigma(P,R)} \boldsymbol{u}(P,\, Q)\cos(\boldsymbol{n},\, z)d\sigma - \right. \\
&\qquad \left. - \mu \iiint\limits_{S(P,R)} \left[\left(\boldsymbol{s}\times\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \zeta}\right)\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n})\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \zeta}\right] dS \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Eseguendo una trasformazione sui primi integrali mediante le formule di Gauss-Green e semplificando si hanno le altre formule:

$$
(4.9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial x} &= \frac{3}{4\pi R^2} \iiint\limits_{S(P,R)} \left[\lambda\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \xi} + \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \xi}\times\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right] dS \\
\frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial y} &= \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{S(P,R)} \left[\lambda\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \eta} + \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \eta}\times\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right] dS \\
\frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial z} &= \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{S(P,R)} \left[\lambda\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \zeta} + \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \zeta}\times\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right] dS.
\end{aligned}
\right.
$$

Poichè le (4.9) sono del tipo (2.1) ed esprimono le derivate parziali del vettore $\boldsymbol{s}(P)$ come medie sulla sfera $S(P,\, R)$ di un vettore composto con esse nello stesso modo in cui $\boldsymbol{u}(P,\, Q)$ è composto con $\boldsymbol{s}(Q)$ è chiaro che, ripetendo il procedimento del numero 3 si dimostra la continuità delle $\dfrac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial z}$.

Ci siamo così ricondotti alle ipotesi del prof. Sbrana [4] sul vettore $\boldsymbol{s}(P)$ soddisfacente alla (2.1): ripetendo a questo punto il suo ragionamento, si conclude che $\boldsymbol{s}(P)$ verifica (1.1). Per lo spostamento definito ovunque in T_R da (2.1) la (1.1) è verificata in tutti i punti $P \in T_R$: supposto quindi di avere un vettore $\boldsymbol{s}(P)$ sommabile e verificante (2.1) solo quasi ovunque in T_R anche la (1.1) sarà valida quasi ovunque perchè, come s'è già rilevato, i due vettori coincidono quasi ovunque.

5. - Per fare un'applicazione delle formule di media trovate, tenendo presente [5] prendiamo una successione $\{\boldsymbol{s}_k\}$ di vettori, sommabili col quadrato del modulo e verificanti quasi ovunque in T_R la (1.1) o, ciò che è ormai lo stesso, la (2.1).

Supponiamo che la successione $\{\boldsymbol{s}_k\}$ converga in media d'ordine 2 ad un vettore $\boldsymbol{s}$; avremo per ipotesi:

$$\iiint_D |\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{s}|^2 \, dS = \varepsilon_k^2 , \qquad \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k^2 = 0 , \tag{5.1}$$

essendo D un dominio qualsiasi contenuto in T_R. Giova rilevare anzitutto che la successione $\{\boldsymbol{u}_k\}$ definita da:

$$\boldsymbol{u}_k = \lambda \boldsymbol{s}_k + \mu(\boldsymbol{s}_k \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \tag{5.2}$$

converge in media al vettore $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{s} + \mu(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$; si ha infatti:

$$\iiint_D |\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}|^2 \, dS \leq \iiint_D [\lambda \, |\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{s}| + \mu \, |(\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{n}|] dS \leq \tag{5.3}$$

$$\leq 2 \iiint_D |\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{s}|^2 \, dS \cdot (\lambda^2 + \mu^2) = 2(\lambda^2 + \mu^2)\varepsilon_k^2 .$$

Vogliamo ora dimostrare che:

I) *la successione delle medie* $\dfrac{3}{4\pi R^3} \iiint_{S(P,R)} \boldsymbol{u}_k(Q) dS = \boldsymbol{s}_k(P)$ [2])

---

[2]) I vettori $\boldsymbol{s}_k(P)$ così definiti coincidono quasi ovunque con gli $\boldsymbol{s}_k(P)$ della successione convergente in media (vedi numero 2) e lo stesso avviene per i limiti delle due successioni, $\boldsymbol{s}_k$ e $\dfrac{3}{4\pi R^3} \iiint_{S(P,R)} \boldsymbol{u}_k dS$.

converge uniformemente e quindi in media in T_R al vettore

$$\frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{S(P,R)} \boldsymbol{u}(Q)dS = \boldsymbol{s}(P).$$

II) *le successioni analoghe per le derivate prime, ad esempio* $\displaystyle\frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{S(P,R)}\left[\lambda\frac{\partial \boldsymbol{s}_k}{\partial\xi} + \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}_k}{\partial \xi}\times \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}dS = \frac{\partial \boldsymbol{s}_k(P)}{\partial x}\right.$, *convergono alle derivate prime del limite* $\boldsymbol{s}(P)$.

III) $\boldsymbol{s}(P)$ *verifica quasi ovunque la* (1.1).

Infatti dalla definizione di $\boldsymbol{s}_k(P)$ e $\boldsymbol{s}(P)$ applicando la diseguaglianza di Schwartz e ricordando (5.1) e (5.3) segue:

$$(5.4)\qquad |\boldsymbol{s}_k(P) - \boldsymbol{s}(P)| \leq \frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{S(P,R)} |\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}|\, dS \leq \sqrt{\frac{3(\lambda^2+\mu^2)}{2\pi R^3}}\,\varepsilon_k .$$

Per le derivate prime occorre tener presenti le (4.8) da cui si ha:

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial x}\right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{4\pi R^3}\left\{\iint\limits_{\sigma(P,\rho)} |\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}|\, d\sigma + 2\mu\iiint\limits_{S(P,\rho)} |\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{s}|\left|\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi}\right| dS\right\}.$$

Integrando ambo i membri della precedente rispetto a ρ tra O e R si ha:

$$\frac{4\pi}{3}\int_0^R \rho^3\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial x}\right| d\rho \leq \iiint\limits_{S(P,R)} |\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}|\, dS +$$

$$+ 2\mu\int_0^R d\rho \iiint\limits_{S(P,\rho)} |\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{s}|\left|\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi}\right| dS;$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{s}(P)}{\partial x}\right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{\pi R^4}\left\{\iiint\limits_{S(P,R)} |\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}|\, dS + 2\mu R\iiint\limits_{S(P,R)} |\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{s}|\left|\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \xi}\right| dS.\right.$$

Ancora applicando la diseguaglianza di Schwartz, ricordando (5.1) e (5.3), ed osservando che $\left|\frac{\partial n}{\partial \xi}\right|$ è di quadrato sommabile in $S(P, R)$, posto $C^2 = \iiint\limits_{S(P,R)} \left|\frac{\partial n}{\partial \xi}\right| dS$ segue:

$$(5.5) \quad \left|\frac{\partial s_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial s(P)}{\partial x}\right| \leq \frac{3}{\pi R^4} \left\{ \sqrt{2(\lambda^2 + \mu^2)} \sqrt{\frac{4\pi R^3}{3}} + 2\mu R C \right\} \varepsilon_k \text{ }^{3)}.$$

Le (5.4), (5.5) dimostrano quanto abbiamo asserito in I) e II) e i secondi membri danno la maggiorazione dell'errore commesso prendendo s_k al posto di s. La III) è ormai ovvia.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. SBRANA: *Il teorema della media per le equazioni dell'elasticità.* Quaderno scientifico del Convegno matematico di Modena, 1952.

[2] F. SBRANA: *Una proprietà caratteristica delle equazioni dell'elasticità.* Atti dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere, vol. IX, 1952.

[3] E. LEVI: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie V, vol. XVIII, 1909.

[4] L. TONELLI: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serieV, vol. XVIII, 1909.

[5] F. SBRANA: *Sul calcolo approssimato di una funzione armonica in tre variabili, e delle sue successive derivate.* Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie VI, vol. VI, 1927.

[6] B. PINI: *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità.* Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, vol. XXI, 1952.

---

[3]) Naturalmente, la (5.5) vale anche per $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$, come si verifica subito.