Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Aristide Deleanu

Sur l’intégration des fonctions d’ensemble

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 27-36

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__27_0>

SUR L'INTEGRATION DES FONCTIONS D'ENSEMBLE

Nota (*) *di* ARISTIDE DELEANU (*a Bucharest*)

Dans cet article on définit et on étudie des intégrales pour des fonctions d'ensemble dont les valeurs sont des parties d'un groupe muni d'une structure $\mathfrak{L}$. Les intégrales de A. Kolmogoroff et C. E. Rickart [5], ainsi que les intégrales considerées par C. T. Ionescu Tulcea [3], en sont des cas particuliers [1]).

§ 1. Définitions et notations.

1. - Nous appelons *espace* $\mathfrak{L}$ tout objet $\{E, \mathfrak{C}\}$ ou E est un ensemble nonvide et $\mathfrak{C}$ un ensemble des couples $(\mathfrak{F}, x)$, $\mathfrak{F}$ etant un filtre sur E et x un élément de E, satisfaisant aux conditions suivantes:

(C_1) Pour tout $x \in E$, si $\mathfrak{U}$ est l'ultrafiltre des parties $X \subset E$, $X \ni x$, $(\mathfrak{U}, x) \in \mathfrak{C}$.

(C_2) Si $(\mathfrak{F}, x) \in \mathfrak{C}$ et $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$, $(\mathfrak{F}', x) \in \mathfrak{C}$.

(C_3) Si $(\mathfrak{F}, x) \in \mathfrak{C}$ et $(\mathfrak{F}, y) \in \mathfrak{C}$, alors $x = y$.

Au lieu de $(\mathfrak{F}, x) \in \mathfrak{C}$ nous ecrivons $\mathfrak{F} \rightarrow x$ et disons que $\mathfrak{F}$ converge vers x.

Soient $\{E, \mathfrak{C}\}$ et $\{E', \mathfrak{C}'\}$ deux espaces $\mathfrak{L}$ et f une application de E dans E'. Nous disons que f est *continue* si, pour tout $x \in E$ et $\mathfrak{F} \rightarrow x$, le filtre de base $f(\mathfrak{F})$ converge vers $f(x)$. Si f

---

(*) Pervenuta in redazione il 26 gennaio 1957.

Indirizzo dell'Autore R.P.R., Istitutul de matematica, Bucarest (Romania).

1) Pour des suggestions utiles, l'auteur est obligé à M. C. T. Ionescu Tulcea.

est une application continue de $\{E, \mathfrak{C}\}$ dans $\{E', \mathfrak{C}'\}$ et g une application continue de $\{E', \mathfrak{C}'\}$ dans $\{E'', \mathfrak{C}''\}$, $g \circ f$ est une application continue de $\{E, \mathfrak{C}\}$ dans $\{E'', \mathfrak{C}''\}$.

2' - Si G est un groupe[2]) et $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont deux filtres sur G, nous désignons par $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ le filtre engendré par les parties $A + B$, ou $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{G}$. Pour tout filtre $\mathfrak{F}$ sur G, nous designons par $-\mathfrak{F}$ le filtre formé des parties $-A$, où $A \in \mathfrak{F}$.

Nous appelons *groupe* $\mathfrak{L}$ tout objet $\{G, \mathfrak{C}\}$ où:

(i) G est un groupe

(ii) $\{G, \mathfrak{C}\}$ est un espace $\mathfrak{L}$.

(iii) $\mathfrak{F} \to a$, $\mathfrak{G} \to b$ implique $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \to a + b$

(vi) $\mathfrak{F} \to a$, implique $-\mathfrak{F} \to -a$.

Nous disons qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur G est un *filtre Cauchy* si $\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \to 0$. D'après (iii) et (iv), si $\mathfrak{F} \to x$, $\mathfrak{F}$ est un filtre Cauchy; nous disons que $\{G, \mathfrak{C}\}$ est un groupe $\mathfrak{L}$ *complet* si tout filtre Cauchy converge vers un $x \in E$.

3. - Nous allons maintenant donner quelques exemples concernant les définitions introduites plus haut.

a) Soit E un ensemble muni d'une structure $\mathfrak{L}^*$ séparée au sens de Choquet [2]. Si nous écrivons $(\mathfrak{F}, x)$ lorsque $\mathfrak{F}$ converge vers x au sens de Choquet, et si nous désignons par $\mathfrak{C}$ l'ensemble des couples $(\mathfrak{F}, x)$, $\{E, \mathfrak{C}\}$ est un espace $\mathfrak{L}$.

b) Soit G un groupe topologique séparé. Si nous écrivons $(\mathfrak{F}, x)$ lorsque $\mathfrak{F}$ converge vers x dans la topologie de G, et si nous designons par $\mathfrak{C}$ l'ensemble des couples $(\mathfrak{F}, x)$, $\{G, \mathfrak{C}\}$ est un groupe $\mathfrak{L}$. G est complèt pour sa structure uniforme si et seulement si $\{G, \mathfrak{C}\}$ est complèt.

c) Soit G un groupe ordonné complètement réticulé[3]). Un filtre $\mathfrak{F}$ sur G est borné si $\mathfrak{F}$ possède un élément

[2]) Tous les groupes considérés dans cet ouvrage sont commutatifs.

[3]) Un ensemble ordonné E est dit complètement réticulé, si toute partie majorée (minorée) admet une borne supérieure (inférieure) dans E.

borné [1]. Pour tout filtre borné posons

$$\lim\sup \mathfrak{F} = \inf_{X} (\sup X) \quad \text{et} \quad \lim\inf \mathfrak{F} = \sup_{X} (\inf X)\ ^{4})$$

Si nous écrivons $(\mathfrak{F}, x)$ lorsque la limite infèrieure et la limite supérieure sont toutes les deux égales à x et si nous désignons par $\mathfrak{C}$ l'ensemble des couples $(\mathfrak{F}, x)$, $\{G, \mathfrak{C}\}$ est un groupe $\mathfrak{L}$.

Tout groupe ordonné complètement réticulé G est complet. En effet, soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur G tel que $\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \to 0$. Il s'ensuit: $\inf\limits_{X, Y \in \mathfrak{F}} (\sup (X - Y)) = \sup\limits_{X, Y \in \mathfrak{F}} (\inf (X - Y)) = 0$, et, par suite:

$$\inf_{X, Y \in \mathfrak{F}} (\sup X + \sup (-Y)) = \sup_{X, Y \in \mathfrak{F}} (\inf X + \inf (-Y))$$

donc:

$$\inf_{X \in \mathfrak{F}} (\sup X) - \sup_{X \in \mathfrak{F}} (\inf X) = \sup_{Z \in -\mathfrak{F}} (\inf Z) - \inf_{Z \in -\mathfrak{F}} (\sup Z);$$

le premier membre etant ≥ 0 et le second ≤ 0, il résulte que $\mathfrak{F}$ converge vers un élément de G. Donc $\{G, \mathfrak{C}\}$ est complet.

d) Soit $(\{G_\iota, \mathfrak{C}_\iota\})_{\iota \in I}$ une famille des groupes $\mathfrak{L}$. Sur le le groupe produit G considérons l'ensemble des couples $(\mathfrak{F}, x)$ ou $\mathfrak{F}$ est un filtre sur G et $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in G$, tel que, pour chaque $\iota \in I$, le filtre de base $pr_\iota (\mathfrak{F})$ converge vers x_ι. On constate facilement que $\{G, \mathfrak{C}\}$ est un groupe $\mathfrak{L}$. Nous appelons $\{G, \mathfrak{C}\}$ *le groupe $\mathfrak{L}$ produit* des groupes $\mathfrak{L}\{G_\iota, \mathfrak{C}_\iota\}$.

4. - Soit $\{G, \mathfrak{C}\}$ un groupe $\mathfrak{L}$ et $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de G; pour toute partie finie $H \subset I$, posons $s_H = \sum\limits_{\iota \in H} x_\iota$; nous disons que la famille (x_ι) est *sommable* si le filtre éngendré par les parties $B_H = \{s_K \mid K \text{ finie, } H \subset K \subset I\}$ (H parcourant la famille des parties finies de I) converge vers un élément s de G. Nous appelons s la somme de la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et écrivons: $s = \sum\limits_{\iota \in I} x_\iota$. Une famille des parties du groupe G,

---

[4]) X parcourt la famille des éléments bornés de $\mathfrak{F}$.

$(X_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable si chaque famille $(x_\iota)_{\iota \in I} \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$ est sommable. La partie:
$X = \{ \sum_{\iota \in I} x \mid (x_\iota)_{\iota \in I} \in \prod_{\iota \in I} X_\iota \}$ est la somme de la famille: $X = \sum_{\iota \in I} X_\iota$.

§ 2. Définition de l'intégrale.

Soit E un ensemble non-vide et $\mathfrak{J}$ un tribu des parties de E. Pour tout $A \in \mathfrak{J}$ designons par $\Pi(A)$ l'ensemble des partitions dénombrables de A formées avec des ensembles de $\mathfrak{J}$. Pour deux partitions $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(A)$ posons $\pi_1 \leq \pi_2$ si tout ensemble appartenant à π_2 est contenu dans un ensemble de π_1; « $\leq$ » est une rélation d'ordre, pour laquelle $\Pi(A)$ est filtrante à droite.

Considérons un groupe $\mathfrak{L}$, $\{G, \mathfrak{C}\}$. Désignons par $\mathfrak{M}_A(G)$ l'ensemble des applications f de $\mathfrak{J}$ dans $\mathfrak{P}(G)$ [5]), tels que:

(j) Pour tout $X \in \mathfrak{J}$, $f(X) \neq \emptyset$.

(jj) Il existe une partition $\pi_f(A) \in \Pi(A)$, telle que, pour tout $\pi \geq \pi_f(A)$, la famille $(f(X))_{X \in \pi}$ soit sommable.

Pour tout $f \in \mathfrak{M}_A(G)$ et $\pi \geq \pi_f(A)$ posons

$$s_f(\pi) = \sum_{X \in \pi} f(X).$$

Pour tout $A \in \mathfrak{J}$, désignons par $\mathfrak{F}(A)$ le filtre éngendé par les séctions à droite de $\Pi(A)$: $\{\pi \mid \pi \geq \pi_0, \pi \in \Pi(A)\}$ $(\pi_0 \in \Pi(A))$. Enfin, pour tout $\Lambda \in \mathfrak{F}(A)$, posons:

$$\widetilde{s_f}(\Lambda) = \bigcup_{\pi \in \Lambda} s_f(\pi).$$

DÉFINITION. *La fonction f est intégrable sur A si $f \in \mathfrak{M}_A(G)$ et si le filtre de base $\widetilde{s_f}(\mathfrak{F}(A))$ converge vers un élement de G, appélé l'integrale de la fonction f sur A et noté $\int_A f$.*

§ 3. Propriétés de l'intégrale.

1. - Soit $(\{G_\iota, \mathfrak{C}_\iota\})_{\iota \in I}$ une famille des groupes $\mathfrak{L}$, $\{G, \mathfrak{C}\}$ le groupe $\mathfrak{L}$ produit de cette famille et φ un homomorphisme

[5]) Ou $\mathfrak{P}(G)$ signifie l'ensemble des parties du groupe G.

continu de $\{G, \mathcal{C}\}$ dans un groupe $\mathfrak{L}$, $\{G', \mathcal{C}'\}$. Soit, pour tout $\iota \in I$, $f_\iota \in \mathfrak{M}_A(G_\iota)$ et f l'application qui, à chaque $X \in \mathfrak{J}$ associe la partie $\prod_{\iota \in I} f_\iota(X) \in \mathfrak{S}(G)$. Dans ces conditions, si $f \in \mathfrak{M}_A(G)$, $\varphi \circ f \in \mathfrak{M}_A(G')$ [6]).

THÉORÈME 1. *Si* $f \in \mathfrak{M}_A(G)$ *et* f_ι *sont intégrables sur* A *pour tout* $\iota \in I$, $\varphi \circ f$ *est intégrable sur* A *et*

$$\int_A \varphi \circ f = \varphi\left[\left(\int_A f_\iota\right)_{\iota \in I}\right]$$

φ étant continue, il est suffisant de montrer que

$$s_{\varphi \circ f}(\pi) = \varphi(s_f(\pi)) \tag{1}$$

$$s_f(\pi) = \prod_{\iota \in I} s_{f_\iota}(\pi) \tag{2}$$

quelque soit $\pi \geq \pi_f(A)$. L'égalité (1) est une conséquence des hypothèses faites sur la fonction φ; quant à (2), rémarquons que pour tout $\pi \geq \pi_f(A)$

$$s_f(\pi) = \sum_{X \in \pi} f(X) = \sum_{X \in \pi} \prod_{\iota \in I} f_\iota(X) = \prod_{\iota \in I} \sum_{X \in \pi} f_\iota(X) = \prod_{\iota \in I} s_{f_\iota}(\pi)$$

En choisissant convenablement la fonction φ, on déduit du théorème (1) la proposition suivante: *Si* f *et* g *sont intégrables sur* A, $f + g$ *est intégrable sur* A *et* $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

2. - THÉORÈME 2. *Si* f *est intégrable sur* A *et sur* B *et* $A \cap B = \emptyset$, f *est intégrable sur* $A \cup B$ *et*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Le filtre de base $\widehat{s_f}(\mathfrak{F}(A \cup B))$ étant identique au filtre éngéndré par les parties $\widehat{s_f}(\Gamma) + \widehat{s_f}(\Lambda)$, $\Gamma \in \mathfrak{F}(A)$, $\Lambda \in \mathfrak{F}(B)$, le théorème est une consequence immédiate de l'axiome (iii).

---

[6]) Nous désignons toujours par φ l'extension à l'ensemble des parties du produit $\prod_{\iota \in I} G_\iota$.

3. - THÉORÈME 3. *Si le groupe $\{G, \mathcal{C}\}$ est un groupe $\mathfrak{L}$ complet et f est intégrable sur A, f est intégrable sur B pour tout $B \subset A$.*

Désignons par $\mathfrak{F}_B$ le filtre de base $\widehat{s_f}(\mathfrak{F}(B))$ et par $\mathfrak{F}_{\complement B}$ le filtre de base $\widehat{s_f}(\mathfrak{F}(\complement_B))$. $\mathfrak{F}_B + \mathfrak{F}_{\complement B}$ est idéntique au filtre de base $\widehat{s_f}(\mathfrak{F}(A))$; donc $\mathfrak{F}_B + \mathfrak{F}_{\complement B} \to \int_A f$. Le filtre $\mathfrak{F}_B - \mathfrak{F}_B$ est plus fin que $(\mathfrak{F}_B + \mathfrak{F}_{\complement B}) - (\mathfrak{F}_B + \mathfrak{F}_{\complement B})$; il suffit d'observer que pour $\Gamma, \Gamma' \in \mathfrak{F}_B$ et $\Lambda, \Lambda' \in \mathfrak{F}_{\complement B}$: $\Gamma - \Gamma' \subset (\Gamma + \Lambda) - (\Gamma' + \Lambda')$. Il s'ensuit que $\mathfrak{F}_B$ est un filtre Cauchy et par suite, $\{G, \mathcal{C}\}$ etant complet, $\mathfrak{F}_B$ converge vers un élément de G. Donc f est intégrable sur B.

RÉMARQUE. La démonstration précédante nous montre en même temps que $\int_A f = \int_B f + \int_{\complement B} f$, ce qui résulte d'ailleurs aussi du théorème (2).

§ 4. Additivité complète.

Disons qu'une famille de filtres $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable s'il existe une famille sommable $(X_\iota)_{\iota \in I}$, où $X_\iota \in \mathfrak{F}_\iota$ $(\iota \in I)$. Si $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille somable, l'ensemble des parties $\{\sum_{\iota \in I} X_\iota \mid X_\iota \in \mathfrak{F}_\iota, \ \iota \in I\}$ est la base d'un filtre, que nous allons désigner par $\sum_{\iota \in I} \mathfrak{F}_\iota$.

Nous disons qu'un groupe $\mathfrak{L}$, $\{G, \mathcal{C}\}$ satisfait à *la condition* (*) si, pour toute famille sommable $(\mathfrak{F}_i)_{i \in N}$ [7]) des filtres sur G telle que $\mathfrak{F}_i \to a_i$ $(i \in N)$ et $\sum_{i \in N} \mathfrak{F}_i \to a$, la famille $(a_i)_{i \in N}$ est sommable et $\sum_{i \in N} a_i = a$.

Nous allons indiquer dans la suite des cas ou la condition (*) est remplie. Demontrons d'abord le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soit $\{G, \mathcal{C}\}$ un groupe $\mathfrak{L}$ ayant la propriété* (*). *Si $(A_i)_{i \in N}$ est une famille dénombrable des parties disjointes de $\mathfrak{I}$ et f est une fonction intégrable sur A_i $(i \in N)$ et sur*

[7]) N represente l'ensemble des nombres naturels.

$\bigcup_{i \in N} A_i$ [8]), *alors la famille* $\left(\int_{A_i} f\right)_{i \in N}$ *est sommable et*

$$\sum_{i \in N} \int_{A_i} f = \int_{\bigcup_{i \in N} A_i} f.$$

Soit $\mathfrak{F}_i$ le filtre de base $\widehat{s_f}(\mathfrak{F}(A_i))$. La famille $(\mathfrak{F}_i)_{i \in N}$ est sommable et a pour somme le filtre de base $\widehat{s_f}(\mathfrak{F}(\bigcup_{i \in N} A_i))$. En effet, pour tout $\Lambda \in \mathfrak{F}(\bigcup_{i \in N} A_i)$ on peut trouver un $\Lambda' = \underset{i \in N}{\circ} \Lambda_i \subset \Lambda$ où $\Lambda_i \in \mathfrak{F}(A_i)$ [9]) et

$$\widehat{s_f}(\Lambda) \supset \widehat{s_f}(\Lambda') = \widehat{s_f}(\underset{i \in N}{\circ} \Lambda_i) = \bigcup_{\pi \in \underset{i \in N}{\circ} \Lambda_i} s_f(\pi) = \bigcup_{\pi_i \in \Lambda_i} s_f(\underset{i \in N}{\circ} \pi_i) =$$

$$= \bigcup_{\pi_i \in \Lambda_i} \sum_{i \in N} s_f(\pi_i) = \sum_{i \in N} \bigcup_{\pi_i \in \Lambda_i} s_f(\pi_i) = \sum_{i \in N} \widehat{s_f}(\Lambda_i).$$

Il résulte que $\left(\int_{A_i} f\right)_{i \in N}$ est sommable et a pour somme $\int_A f$.

§ 5. La condition (*).

La condition (*) est vérifiée dans les deux cas suivants:

a) Soit G un groupe topologique séparé et complet. Supposons que $(\mathfrak{F}_i)_{i \in N}$ est sommable et que $\sum_{i \in N} \mathfrak{F}_i \to a$. On voit tout comme dans la demonstration du théorème 3 que chaque $\mathfrak{F}_i$ converge vers un $a_i \in G$. Soit V un voisinage symmétrique arbitraire de l'élément neutre; on peut construire facilement une famille des voisinages $(W_i)_{i \in N}$, telle que $\sum_{i \in H} W_i \subset V$ pour chaque partie finie $H \subset N$. On peut choisir pour chaque $i \in N$

---

[8]) Si $\{G, \mathfrak{C}\}$ est complet, alors l'integrabilité de f sur A_i résulte de l'intégrabilité sur $\bigcup_{i \in N} A_i$.

[9]) Nous désignons par $\underset{i \in N}{\circ} \Lambda_i$ l'ensemble des partitions $\underset{i \in N}{\circ} \pi_i$ de $\bigcup_{i \in N} A_i$, òu $\pi_i \in \Lambda_i$ et $\underset{i \in N}{\circ} \pi_i$ est la partition formée de tous les ensembles appartenant à tous les π_i, $i \in N$.

un $X_i \in \mathcal{F}_i$ de sorte que $X_i - a_i \subset W_i$ et $(X_i)_{i \in N}$ soit sommable; on déduit, pour chaque partie finie $H \subset N$:

$$\sum_{i \in H} X_i - \sum_{i \in H} a_i \subset \sum_{i \in H} W_i \subset V. \tag{3}$$

Soient $x_i \in X_i$ $(i \in N)$ et H fini, $H \subset N$, tels que $\sum_{i \in K} x_i - \sum_{i \in L} x_i \in V$, quelques soient K, $L \supset H$, parties finies de N. On déduit $\sum_{i \in K} a_i - \sum_{i \in L} a_i \subset V + V + V$; donc $(a_i)_{i \in N}$ est sommable. On peut donc déduire de (3) $\sum_{i \in N} X_i - \sum_{i \in N} a_i \subset \overline{V}$ et par consequant, $\sum_{i \in N} a_i = a$.

b) Soit G un groupe ordonné, complètement réticulé. Démontrons le lemme suivant:

LEMME. Si $(A_i)_{i \in N}$ est une famille sommable, chaque A_i etant majoré, et si l'ensemble $\sum_{i \in N} A_i$ est majoré, la famille $(\sup A_i)_{i \in N}$ est sommable et

$$\sup \sum_{i \in N} A_i \leq \sum_{i \in N} \sup A_i.$$

En effet, si $a' = \sum_{i \in N} a'_i$, $a'_i \in A_i$, on a pour tout $H \subset N$, H fini:

$$\sup_{a_i \in A_i} \Big(\sum_{i \in H} a_i + \sum_{i \in \complement H} a'_i \Big) = \sum_{i \in H} \sup A_i + \sum_{i \in \complement H} a'_i.$$

Mais $\{ \sum_{i \in H} a_i + \sum_{i \in \complement H} a'_i \mid a_i \in A_i \} \subset \sum_{i \in N} A_i$, donc:

$$\sum_{i \in H} \sup A_i \leq \sup \sum_{i \in N} A_i - \sum_{i \in \complement H} a'_i$$

$$\sum_{i \in H} \sup A_i \leq \sup \sum_{i \in N} A_i - \Big(a' - \sum_{i \in H} a'_i\Big)$$

donc:

$$\sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i) \leq \sup \sum_{i \in N} A_i - a'.$$

G etant complètement réticulé, il existe $m = \sup_H \big(\sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i) \big)$. On voit facilement que $m = \sup_K \big(\inf_{H \supset K} \sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i) \big) \leq \inf_K \big(\sup_{H \supset K} \sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i) \big) \leq m$. Il résulte que la famille $(\sup A_i - a'_i)_{i \in N}$, donc la famille $(\sup A_i)_{i \in N}$, sont sommables.

Supposons, maintenant, que le groupe G satisfait au postulé suivant dû à E. J. Mc Shane [4]:

POSTULÉ. $S_1, S_2, \ldots$ etant une famille denombrable des parties de G dirigées par « $\leq$ » et avec $\inf S_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots$, il est possible de choisir des éléments $g_1, g_2, \ldots$, $g_i \in S_i (i \in N)$ tels que l'ensemble des sommes $g_1 + g_2 + \ldots + g_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ soit majoré.

Il est facile à voir que ce postulé entraine la condition suivante: (Δ) *Si* $(S_i)_{i \in N}$ *est une famille dénombrable des parties de* G *dirigées par* « $\leq$ » *et avec* $\inf S_i = 0 (i \in N)$ *et si* S *est l'ensemble des sommes* $\sum_{i \in N} g_i$ *des toutes les familles sommables* $(g_i)_{i \in N}$, $g_i \in S_i$, S *est dirigé par* « $\leq$ » *et* $\inf S = 0$.

Nous allons montrer maintenant que dans un groupe G complètement réticulé satisfaisant à (Δ), la condition $(^*)$ est aussi remplie. Supposons que $(\mathfrak{F}_i)_{i \in N}$ est sommable et que $\mathfrak{F} = \sum_{i \in N} \mathfrak{F}_i \to a$. D'après § 1, 3, c), chaque $\mathfrak{F}_i$ converge vers un $a_i \in G$. Cela signifie

$$\sup_{X_i \in \mathfrak{F}_i} (\inf X_i) = \inf_{X_i \in \mathfrak{F}_i} (\sup X_i) = a_i \qquad (i \in N) \tag{4}$$

$$\sup_{X \in \mathfrak{F}} (\inf X) = \inf_{X \in \mathfrak{F}} (\sup X) = a \tag{5}$$

Soit $X \in \mathfrak{F}$ et majoré. On peut trouver des $X'_i \in \mathfrak{F}_i (i \in N)$ tels que $\sum_{i \in N} X'_i \subset X$. Il s'ensuit que $\sup \sum_{i \in N} X'_i$ existe.

(4) entraîne la rélation: $\inf_{X_i \in \mathfrak{F}_i} (\sup X_i - a_i) = 0$ et, par consequent, la famille

$$S_i = \{ \sup X_i - a_i \mid X_i \in \mathfrak{F}_i \} \qquad (i \in N)$$

satisfait aux hypothèses de (Δ). On déduit qu'il existe au moins une famille sommable: $(\sup X''_i - a_i)_{i \in N}$. Choisissons pour chaque $i \in N$ un $X_i \in \mathfrak{F}_i$ tel que: $X_i \subset X'_i \cap X''_i$. La famille $(\sup X_i - a_i)_{i \in N}$ est donc sommable et, en outre, l'ensemble $\sum_{i \in N} X_i$ est majoré; en appliquant le lemme, on déduit que la famille $(\sup X_i)_{i \in N}$ est sommable. Il résulte que la famille $(a_i)_{i \in N}$ est sommable.

Mais (Δ) permet aussi d'inférer que $\inf S = 0$, ou S est l'ensemble des sommes des toutes les familles sommables de la forme $(\sup X_i - a_i)_{i \in N}$, $X_i \in \mathfrak{F}_i$. On a: $\inf S = \inf\limits_{X_i} (\sum\limits_{i \in N} \sup X_i) - \sum\limits_{i \in N} a_i$ et, par suite:

$$\sum_{i \in N} a_i = \inf_{X_i} (\sum_{i \in N} \sup X_i) \geq \inf_{X_i} (\sup \sum_{i \in N} X_i) \geq \inf_{X \in \mathfrak{F}} (\sup X) = a.$$

Or, la condition (Δ) implique sa duale, de sorte qu'on peut déduire aussi $\sum\limits_{i \in N} a_i \leq a$. q. e. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI: *Intégration*, Act. scientifiques et ind. Hermann, Paris 1952, p. 28.

[2] G. CHOQUET: Annales de l'Univ. de Grenoble, tome XXIII, 1948, pp. 57-112.

[3] C. T. IONESCU TULCEA: Studii si cercetari matematice, tome V, no. 1-2, 1954, pp. 73-142.

[4] E. J. MCSHANE: *Order-preserving maps and integration processes*, Princeton Univ. press 1953, p. 55.

[5] C. E. RICKART: Trans. Amer. Math. Soc., 1942, tome LII, pp. 498-521.