RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 276-283

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__276_0>

SULLE PRECESSIONI D'UN CORPO RIGIDO COSTITUENTI MOTI DI HESS

Nota (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

Per il solido pesante asimmetrico con un punto fisso O, privo di attrito, sono noti alcuni tipi di precessioni, costituenti moti di Hess [1]).

Nasce la questione, che non mi appare in generale di facile soluzione, se quelli sono tutti i possibili moti di Hess precessionali o se ve ne siano altri.

In questa Nota porto un contributo alla soluzione del problema generale dimostrando che, se si suppone baricentrale l'asse di figura, o semplicemente orizzontale il momento delle quantità di moto, gli unici moti di precessione costituenti i moti di Hess sono quelli già conosciuti.

Se invece si suppone che l'asse di figura appartenga al piano coniugato all'asse baricentrale per O rispetto all'ellissoide principale d'inerzia relativo ad O, non sono possibili per il solido precessioni non degeneri.

1. - Premesse di carattere generale.

Considero un solido $\mathcal{C}$ fissato senza attrito per un punto $O \neq G$, rispetto a cui non abbia struttura giroscopica ma soddisfi la condizione strutturale di Hess. Esiste allora una terna

---

(*) Pervenuta in redazione il 25 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) G. GRIOLI, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca di moti di precessione.* Annali dell'Università di Ferrara, Sezione VII, Vol. III, N. 5, 1954.

solidale $\mathcal{T} \equiv (O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \equiv (O, x, y, z)$ per cui sia

$$OG = l\boldsymbol{k} \tag{1}$$

e, detti A, B, C i momenti d'inerzia rispetto x, y, z e A', B', C' i momenti centrifughi, si abbia

$$(A - B)C + A'^2 = 0 \quad B' = C' = 0. \tag{2}$$

La relazione invariante di Hess, coi simboli usuali si scrive

$$K_z = Cr - A'q = 0 \tag{3}$$

onde per (2) si ha

$$\boldsymbol{K}_0 = Ap\boldsymbol{i} + (Bq - A'r)\boldsymbol{j} = A(p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j}) = A\boldsymbol{e} \tag{4}$$

Per le note

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \dot\vartheta \cos\varphi \\ q = \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \dot\vartheta \sin\varphi \\ r = \dot\psi \cos\vartheta + \dot\varphi \end{cases} \tag{5}$$

(4) diviene

$$\boldsymbol{K}_0 = A\dot\psi \sin\vartheta(\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) + A\dot\vartheta(\cos\varphi\boldsymbol{i} - \sin\varphi\boldsymbol{j}) =$$
$$= A\dot\psi \sin\vartheta\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{N} + A\dot\vartheta\boldsymbol{N}$$

ove detta $T \equiv (O, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ la terna fissa, è

$$\boldsymbol{N} = \text{versore della linea dei nodi} = \tag{7}$$
$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\boldsymbol{c}_3 \wedge \boldsymbol{k} = \cos\varphi\boldsymbol{i} - \sin\varphi\boldsymbol{j}.$$

Per (2) e (3) si ha pure

$$2\mathcal{T} = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr = Ap^2 + \tag{8}$$
$$+ q^2\left(B + \frac{A'^2}{C} - 2\frac{A'^2}{C}\right) = A(p^2 + q^2).$$

Posto

(9) $\mathcal{H}$ = versore della verticale discendente $= \mathcal{H}_1\boldsymbol{i} + \mathcal{H}_2\boldsymbol{j} + \mathcal{H}_3\boldsymbol{k}$

le equazioni di Eulero si scrivono

$$(10)\qquad \begin{cases} \dot{p} = rq - \dfrac{mgl}{A}\mathcal{K}_2 \\ \dot{q} = -rp + \dfrac{mgl}{A}\mathcal{K}_1 . \end{cases}$$

Infatti per (4) è

$$mgl(-\mathcal{K}_2\boldsymbol{i} + \mathcal{K}_1\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{M}_0 = \frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_0 = A(\dot{p}\boldsymbol{i} + \dot{q}\boldsymbol{j} + \omega \wedge e) =$$

$$= A[(\dot{p} - rq)\boldsymbol{i} + (\dot{q} + rp)\boldsymbol{j}].$$

Essendo poi per (3) $r = \dfrac{A'}{C}q$, si ha

$$(11)\qquad p\dot{q} - \dot{p}q = -\frac{A'}{C}q(p^2 + q^2) + \frac{mgl}{A}(\mathcal{K}_1 p + \mathcal{K}_2 q)$$

che per l'integrale primo del momento verticale delle quantità di moto

$$(12)\qquad A(p\mathcal{K}_1 + q\mathcal{K}_2) = K_{\mathcal{K}} = \text{cost}$$

diviene

$$(13)\qquad p\dot{q} - \dot{p}q = -\frac{A'}{C}q(p^2 + q^2) + \frac{mgl}{A^2}K_{\mathcal{K}} .$$

È noto che condizione caratteristica affinchè il moto del corpo sia una precessione con z asse f di figura, è

$$(14)\qquad \pm\lambda = \frac{\dot{p}q - \dot{q}p - r(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^{3/2}}$$

con $\lambda = \operatorname{ctg}\widehat{\bar{p}f}$ e $\bar{p}$ asse di precessione [2]).

La (14) per (13) e (3) diviene

$$(15)\qquad \pm\lambda = \operatorname{ctg}\widehat{\bar{p}f} = \frac{mglK_{\mathcal{K}}}{A^2(p^2 + q^2)^{3/2}} .$$

---

[2]) G. GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*. Rendiconti del Seminario Mat. dell'Università di Padova, 1957, Vol. XXVII, Formula 42).

2. - Qualche considerazione sui moti di Hess.

a) Prendendo in esame la (15) si conclude che *per il solido pesante C considerato, le uniche possibili precessioni non degeneri aventi per asse di figura f la retta OG e costituenti moti di Hess sono* ∞^3 *precessioni con asse di precessione* $\bar{p}$ *verticale e* ∞^3 *precessioni con* $\bar{p}$ *orizzontale.*

Infatti considero prima il caso

$$\widehat{pf} \neq \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

In (15) è allora $\lambda \neq 0$, $K_{\mathcal{H}} \neq 0$ onde, tenendo conto di (8), (15), risulta $\mathcal{T} = \text{cost}$, ma allora, per la conservazione dell'energia, $\bar{p}$ deve essere verticale, ed è noto che vi sono solo ∞^3 di tali precessioni [3]).

Nell'altro caso

$$\widehat{pf} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{è} \quad \lambda = 0 \quad \text{quindi per (15)} \tag{17}$$

$$K_{\mathcal{H}} = 0. \tag{18}$$

Assunta la terna fissa $T \equiv (O, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ con $\boldsymbol{c}_3$ — versore di $\bar{p}$, essendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ per (7) è $\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{N} = \boldsymbol{c}_3$ quindi (6) diviene semplicemente

$$\boldsymbol{K}_0 = A\dot{\psi}\boldsymbol{c}_3$$

che è compatibile con la (18) solo se $\bar{p}$ è orizzontale. Si ricade così nelle precessioni con $\bar{p}$ orizzontale di cui nell'enunciato, alle quali si perviene anche considerando moti rigidi con un punto O fisso con $\boldsymbol{K}_0$ dotato di carattere precessionale [4]).

b) Il contenuto del § 1 permette di fare anche la seguente osservazione:

Per il solido C considerato non sono possibili moti di Hess effettivamente precessionali con asse di figura appartenente

---

[3]) Loc. cit. in nota [1]).

[4]) Loc. cit. in nota [1]), Num. 4.

al piano β, *coniugato alla* $z = (O, G)$ *rispetto all'ellissoide principale d'inerzia* $\mathcal{E}_0$.

Infatti per (2) β ha equazione

$$Cz - A'y = 0 \tag{19}$$

onde per (3) contiene l'asse di moto a_t (che in ogni moto di Hess appartiene a β).

Dalla complanarità di p, f, a_t, se f appartiene a β, segue che o f coincide sempre con a_t, e allora il moto è rotatorio, o $\bar{p}$ appartiene a β (in tutto un intevallo di tempo). Poichè inoltre β è solidale e $\bar{p}$ forma un angolo costante con la retta solidale f, anche $\bar{p}$ è solidale; si ricade di nuovo in un moto rotatorio.

3. - Sui moti di Hess aventi il momento K_0 delle quantità di moto orizzontale.

Detto $\boldsymbol{u}$ un versore solidale a $\mathcal{C}$ la condizione affinchè questo compia una precessione in modo che f abbia $\boldsymbol{u}$ per versore, può scriversi vettorialmente

$$\gamma = \pm \operatorname{ctg} \widehat{pf} = \frac{\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{u}[\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})^2]}{[\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})^2]^{3/2}} \,. \tag{20}$$

Ciò risulta facendo in (14) $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}$. Posto, generalmente, invece

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{i} + u_2 \boldsymbol{j} + u_3 \boldsymbol{k}$$

è

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} = (\dot{q}r - \dot{r}q)u_1 + (\dot{r}p - \dot{p}r)u_2 + (\dot{p}q - \dot{q}p)u_3 \tag{21}$$

Suppongo ora che il moto sia di Hess

Allora per (3) è $\dot{q}r - \dot{r}q = 0$ e:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} = \left(\dfrac{A'}{C} u_2 - u_3\right)(\dot{q}p - \dot{p}q) \\ \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} = u_1 p + \left(u_2 + \dfrac{A'}{C} u_3\right) q = u_1 p + \bar{u} q \\ \omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})^2 = p^2 + \left(1 + \dfrac{A'^2}{C^2}\right) q^2 - (u_1 p + \bar{u} q)^2. \end{cases} \tag{22}$$

L'eliminazione delle derivate da (20) indipendentemente dalla sollecitazione, implica per (22)

$$A'u_2 - Cu_3 = 0$$

ossia per (19) l'appartenenza di f al piano β, quindi, come si è visto, la riduzione della precessione a una rotazione.

Tenendo conto, invece, della sollecitazione, tramite la (13), la $(22)_1$ diviene

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} = \left(\frac{A'}{C} u_2 - u_3\right)\left(-\frac{A'}{C} q(p^2 + q^2) + \frac{mgl}{A^2} K_{\mathcal{H}}\right) \tag{23}$$

Suppongo ora

$$K_{\mathcal{H}} = 0 \tag{24}$$

Allora la (20) in cui si divida per q^3 numeratore e denominatore, per $(22)_{2,3}$ e (23) diviene una relazione nella sola $\xi = \frac{p}{q}$, che dimostro essere un'identità nel solo caso $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$, ossia

$$f = OG \qquad \text{e} \qquad \widehat{pf} = \frac{\pi}{2}.$$

Infatti la (20) per (22) e (23) si scrive

$$\gamma = \pm \operatorname{ctg} \widehat{pf} = \frac{N(\xi)}{\sqrt{\delta(\xi)^3}} \tag{25}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} N(\xi) &= \left(u_3 - \frac{A'}{C} u_2\right)(\xi^2 + 1) - (u_1\xi + \bar{u})\left\{\xi^2 + 1 + \frac{A'^2}{C^2} - \right. \\ &\quad \left. - (u_1\xi + \bar{u})^2\right\} = (u_1^3 - u_1)\xi^3 + \left[\frac{A'}{C}\left(u_3 - \frac{A'}{C} u_2\right) - \bar{u} + \right. \\ &\quad \left. + 3u_1^2\bar{u}\right]\xi^2 + \left[3u_1\bar{u}^2 - u_1\left(1 + \frac{A'^2}{C^2}\right)\right]\xi + \frac{A'}{C}\left(u_3 - \frac{A'}{C} u_2\right) - \\ &\quad - \bar{u}\left(1 + \frac{A'^2}{C^2}\right) + \bar{u}^3 = \alpha_3\xi^3 + \alpha_2\xi^2 + \alpha_1\xi + \alpha_0 \\ \delta(\xi) &= \xi^2 + 1 + \frac{A'^2}{C^2} - (u_2\xi + \bar{u})^2 \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Supposta la (25) un'identità, faccio dapprima il caso

$$\widehat{pf} = \frac{\pi}{2} \tag{27}$$

onde $\gamma = 0$.

La conseguente $N(\xi) \equiv 0$ implica

$$u_1 = \pm 1 \tag*{(28)$_1$}$$

oppure

$$u_1 = 0. \tag*{(28)$_2$}$$

Valga $(28)_1$. Allora è $u_2 = u_3 = 0$ e per $(22)_2$ $\bar{u} = u_2 + \frac{A'}{C} u_3 = 0$ quindi, per $(26)_1$ $\alpha_1 = \mp\left(1 + \frac{A'^2}{C^2}\right) = 0$ assurdo.

Nel caso (27), deve quindi essere $u_1 = 0$, quindi per (26) e $(22)_2$

$$0 = \alpha_2 = \frac{A'}{C}\left(u_3 - \frac{A'}{C} u_2\right) - \left(u_2 + \frac{A'}{C} u_3\right) = -\left(\frac{A'^2}{C^2} + 1\right) u_2$$

onde è anche $u_2 = 0$, cioè f contiene G.

Viceversa per $\widehat{pf} = \frac{\pi}{2}$, $u_1 = u_2 = 0$ la (25) è un'identità.

Si ricade così nelle precessioni con $\bar{p}$ orizzontale, considerate nel § 1.

Considero ora il caso rimanente

$$\gamma = \pm \operatorname{ctg} \widehat{pf} \neq 0. \tag{29}$$

La (25) può essere un'identità solo se $\delta(\xi)$ è un quadrato perfetto, $(a\xi + b)^2$ onde, per $(26)_2$

$$\begin{aligned} \xi^2 + \left(1 + \frac{A'^2}{C^2}\right) &\equiv (u_1\xi + \bar{u})^2 + (a\xi + b)^2 = \\ &= (u_1^2 + a^2)\xi^2 + 2(u_1\bar{u} + ab)\xi + \bar{u}^2 + b^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Ne segue

$$a = \pm\sqrt{1 - u_1^2} \qquad b = -\frac{u_1}{a}\bar{u} = \mp\frac{u_1}{\sqrt{1 - u_1^2}}\bar{u} \tag{31}$$

e infine

$$1 + \frac{A'^2}{C^2} = \bar{u}^2\left(1 + \frac{u_1^2}{1 - u_1^2}\right) = \frac{u_2^2 + \frac{A'^2}{C^2}u_3^2 + 2u_2u_3\frac{A'}{C}}{u_2^2 + u_3^2}$$

cioè

$$u_3^2 + \frac{A'^2}{C^2}u_2^2 - 2u_2u_3\frac{A'}{C} = \left(u_3 - \frac{A'}{C}u_2\right)^2 = 0.$$

Questa mostra che f appartiene a β onde la precessione degenera in rotazione.

Si può aggiungere che poichè in tal caso f coincide con $\bar{p}$ e $\gamma = \infty$, deve essere $\delta(\xi) \equiv 0$ ossia

$$a = b = 0. \tag{32}$$

Per la $\bar{u} = u_2 + \frac{A'}{C}u_3$ e le (31), le (32) equivalgono alla sola

$$u_1 = \pm 1$$

ossia alla coincidenza di f con x che per (2) è principale d'inerzia.

Si ricade così in un moto di Mlodzjejowsky, caso particolare delle precessioni con $\bar{p}$ orizzontale.

Concludo:

Le ∞_3 considerate precessioni con $\bar{p}$ orizzontale, sono le uniche precessioni costituenti i moti di Hess con momento K_0 delle quantità di moto inizialmente orizzontale, possibili per il considerato solido pesante $\mathcal{C}$ fissato senza attrito in O.