

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

VITTORIO E. BONONCINI

Sulle serie di Fourier delle funzioni composte

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 218-227

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__218_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE SERIE DI FOURIER DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Nota () di VITTORIO E. BONONCINI (a Bologna)*

1. - In una nota di Pagni¹⁾ è trattato il problema di esprimere i coefficienti di Fourier di una funzione di funzione $y = f[x(t)]$ per mezzo dei coefficienti di Fourier delle funzioni $y = f(x)$, $x = x(t)$.

Nel presente lavoro viene risolto (nn. 2, 3, 4, 5), sotto condizioni meno restrittive di quelle imposte da Pagni, il problema analogo relativo alle funzioni composte in generale e cioè: noti i coefficienti di Fourier delle funzioni

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_\nu = x_\nu(u_1, u_2, \dots, u_m)$, ($\nu = 1, 2, \dots, n$), determinare, tramite essi, i coefficienti di Fourier della funzione composta $y = f[x_1(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_m)]$.

Per semplicità di esposizione si considera $m = n = 2$, ogni altro caso potendosi trattare nello stesso modo con opportune modificazioni. Il caso considerato da Pagni si riferisce ad $m = n = 1$.

Nel n. 6 viene fatta un'osservazione relativa a un teorema di Žak²⁾.

(*) Pervenuta in Redazione il 9 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

¹⁾ M. PAGNI, *Sui coefficienti di FOURIER di una funzione di funzione*, « Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. », Serie VIII, Vol. 5, (1948), pp. 363-368.

²⁾ I. E. ŽAK, *On a theorem of LÉVY on absolute convergence of FOURIER series*, « Usphel Math. Nauk (N. S.) », 10, n. 1 (63), (1955), (Russian), pp. 107-112.

2. - Sia $f(x, y)$ una funzione continua quasi ovunque nel quadrato $Q \equiv (0 < x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi)$, ivi a variazione doppia finita³⁾ e tale che $f(x, 0)$, $f(0, y)$ risultino a variazione limitata in $0 \leq x \leq 2\pi$ e in $0 \leq y \leq 2\pi$ rispettivamente. Si consideri poi una coppia di funzioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ continue nel quadrato $Q' \equiv (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$ atta a trasformare Q' in Q e tale che l'insieme dei punti di FQ (frontiera di Q) e degli eventuali punti di discontinuità della $f(x, y)$ corrisponda ad un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue) di Q' ⁴⁾, onde in Q' resta definita la funzione composta $F(u, v) = f[x(u, v), y(u, v)]$.

Si dimostra in primo luogo il seguente

LEMMA. *Se $f(x, y)$ è una funzione a variazione doppia finita in Q e tale che $f(x, 0)$, $f(0, y)$ siano a variazione limitata in $0 \leq x \leq 2\pi$ e in $0 \leq y \leq 2\pi$ rispettivamente, allora le ridotte $s_{m, n}(x, y)$, ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), della serie di Fourier di $f(x, y)$ sono equilimitate in Q .*

Si può scrivere

$$f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y),$$

ove $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ sono funzioni limitate e non negative in Q , non decrescenti sia come funzioni della sola x che della sola y e tali inoltre che per ogni coppia di punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) di Q con $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$, sia

$$f_1(x_2, y_2) - f_1(x_1, y_2) - f_1(x_2, y_1) + f_1(x_1, y_1) > 0,$$

$$f_2(x_2, y_2) - f_2(x_1, y_2) - f_2(x_2, y_1) + f_2(x_1, y_1) \geq 0$$
⁵⁾.

Esiste pertanto una costante $M > 0$ tale che per ogni punto (x, y) di Q risulti $|f(x, y)| \leq M$ e quindi anche

³⁾ L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, (1928), p. 470.

⁴⁾ Quest'ultima condizione si può omettere se $f(x, y)$ è continua e periodica, di periodo 2π , rispetto a ciascuna delle variabili. Tali sono fra l'altro, le ipotesi ammesse da PAGNI nel caso da lui trattato, ma è manifesto che i risultati ottenuti dal citato Autore valgono anche sotto ipotesi analoghe a quelle indicate nel presente lavoro.

⁵⁾ Loc. cit. in ³⁾, p. 471.

$|\sigma_{m,n}(x,y)| \leq M$. ($m, n = 1, 2, 3, \dots$), ove $\sigma_{m,n}(x,y)$ indica la successione delle medie (C. 1, 1) della successione $\{s_{m,n}(x,y)\}$. Invero si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n}(x,y) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2 mn} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+u, y+v) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 du dv \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{4\pi^2 mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv = M. \end{aligned}$$

Denotati con $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}$, ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), i coefficienti di Fourier della $f(x,y)$, risulta poi ⁶⁾

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= O\left(\frac{1}{mn}\right), \quad b_{m,n} = O\left(\frac{1}{mn}\right), \quad c_{m,n} = O\left(\frac{1}{mn}\right), \quad d_{m,n} = O\left(\frac{1}{mn}\right), \\ \sum_{s=0}^n a_{m,s} &= O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \sum_{s=0}^n b_{m,s} = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \sum_{s=0}^n c_{m,s} = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \sum_{s=0}^n d_{m,s} = O\left(\frac{1}{m}\right), \\ \sum_{r=0}^m a_{r,n} &= O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{r=0}^m b_{r,n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{r=0}^m c_{r,n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{r=0}^m d_{r,n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

sicchè, posto

$$\begin{aligned} A_{r,s}(x,y) &= \lambda_{r,s}(a_{r,s} \cos rx \cos sy + b_{r,s} \operatorname{sen} rx \cos sy + \\ &+ c_{r,s} \cos rx \operatorname{sen} sy + d_{r,s} \operatorname{sen} rx \operatorname{sen} sy). \quad (r, s = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\lambda_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s = 0 \\ 4 & \\ 1 & \text{» } r > 0, s = 0; r = 0, s > 0 \\ 2 & \\ 1 & \text{» } r > 0, s > 0, \end{cases}$$

⁶⁾ H. GEIRINGER, *Trigonometrische Doppelreihen*, « Monatshefte für Math. p. Physik », XXIX Jahrgang. (1918), pp. 65-142, in particolare p. 121.

si trae

$$|A_{m,n}(x, y)| < |a_{m,n}| + |b_{m,n}| + |c_{m,n}| + |d_{m,n}| = O\left(\frac{1}{mn}\right),$$

$$\sum_{s=0}^n |A_{m,s}(x, y)| < \sum_{s=0}^n (|a_{m,s}| + |b_{m,s}| + |c_{m,s}| + |d_{m,s}|) = O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$\sum_{r=0}^m |A_{r,n}(x, y)| < \sum_{r=0}^m (|a_{r,n}| + |b_{r,n}| + |c_{r,n}| + |d_{r,n}|) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Da queste limitazioni e dall'identità

$$s_{m,n}(x, y) = \sigma_{m-1, n+1}(x, y) + \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n [(m+1)r + (n+1)s - rs] A_{r,s}(x, y),$$

segue, come volevasi,

$$|s_{m,n}(x, y)| < M + \frac{1}{m+1} \sum_{r=1}^m r \sum_{s=0}^n |A_{r,s}(x, y)| + \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^n s \sum_{r=0}^m |A_{r,s}(x, y)| + \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n rs |A_{r,s}(x, y)| < L,$$

con L costante positiva.

3. - Si proverà ora che

$$(1) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u, v) du dv = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{r,s}[x(u, v), y(u, v)] du dv.$$

Invero si ha, quasi ovunque in $Q = FQ$,

$$(2) f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{r,s}(x, y),$$

mentre, nei punti di FQ e negli eventuali punti di discontinuità della $f(x, y)$, la serie a secondo membro della (2) con-

verge verso

$$\frac{1}{4} [f(x+0, y+0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y+0) + f(x-0, y-0)] \text{)}.$$

Pertanto, quasi ovunque in Q' , risulta

$$(3) \quad F(u, v) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{r,s} [x(u, v), y(u, v)],$$

e inoltre la serie a secondo membro converge in tutti i punti di Q' ed ha le ridotte equilimitate in Q' , tali essendo per il lemma del n. 2, le ridotte della serie (2). In virtù di un noto teorema di Lebesgue, la (1) si deduce quindi dalla (3) mediante integrazione termine a termine.

Con ragionamento analogo si riconosce che sussistono le quattro uguaglianze

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u, v) \left\{ \begin{array}{l} \cos mu \cos nv \\ \text{sen } mu \cos nv \\ \cos mu \text{ sen } nv \\ \text{sen } mu \text{ sen } nv \end{array} \right. dudv =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_{r,s} [a_{r,s} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) +$$

$$+ b_{r,s} \text{sen } rx(u, v) \cos sy(u, v) + c_{r,s} \cos rx(u, v) \text{sen } sy(u, v) +$$

$$+ d_{r,s} \text{sen } rx(u, v) \text{sen } sy(u, v)] \left\{ \begin{array}{l} \cos mu \cos nv \\ \text{sen } mu \cos nv \\ \cos mu \text{ sen } nv \\ \text{sen } mu \text{ sen } nv \end{array} \right. dudv,$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

7) Loc. cit. in 3), p. 472. Si osservi peraltro che se la $f(x, y)$ è continua e periodica, di periodo 2π , rispetto ad x e ad y , la sua serie di FOURIER converge verso $f(x, y)$ uniformemente in Q .

4. - Se con $\alpha_{m,n}$, $\beta_{m,n}$, $\gamma_{m,n}$, $\delta_{m,n}$, ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), si indicano i coefficienti di Fourier della $F(u, v)$, posto

$$\mu_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \cos mu \cos nvdudv,$$

$$\nu_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \sin mu \cos nvdudv,$$

$$\omega_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \cos mu \sin nvdudv,$$

$$\rho_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \sin mu \sin nvdudv,$$

$$\mu_{(r,s)}^{*m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin rx(u, v) \cos sy(u, v) \cos mu \cos nvdudv,$$

.....

$$\mu_{(r,s)}^{**m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \sin sy(u, v) \cos mu \cos nvdudv,$$

.....

$$\mu_{(r,s)}^{***m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin rx(u, v) \sin sy(u, v) \cos mu \cos nvdudv,$$

.....

($m, n, r, s = 0, 1, 2, \dots$), dalle (1) e (4) si trae

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \alpha_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s} (a_{r,s} \mu_{(r,s)}^{m,n} + b_{r,s} \mu_{(r,s)}^{*m,n} + c_{r,s} \mu_{(r,s)}^{**m,n} + d_{r,s} \mu_{(r,s)}^{***m,n}) \\ \beta_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s} (a_{r,s} \nu_{(r,s)}^{m,n} + b_{r,s} \nu_{(r,s)}^{*m,n} + c_{r,s} \nu_{(r,s)}^{**m,n} + d_{r,s} \nu_{(r,s)}^{***m,n}) \\ \gamma_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s} (a_{r,s} \omega_{(r,s)}^{m,n} + b_{r,s} \omega_{(r,s)}^{*m,n} + c_{r,s} \omega_{(r,s)}^{**m,n} + d_{r,s} \omega_{(r,s)}^{***m,n}) \\ \delta_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s} (a_{r,s} \rho_{(r,s)}^{m,n} + b_{r,s} \rho_{(r,s)}^{*m,n} + c_{r,s} \rho_{(r,s)}^{**m,n} + d_{r,s} \rho_{(r,s)}^{***m,n}). \end{aligned} \right.$$

Le (5) esprimono i coefficienti di Fourier della $F(u, v)$ mediante quelli delle funzioni

$$f(x, y), \cos rx(u, v) \cos sy(u, v), \operatorname{sen} rx(u, v) \cos sy(u, v), \\ \cos rx(u, v) \operatorname{sen} sy(u, v), \operatorname{sen} rx(u, v) \operatorname{sen} sy(u, v).$$

Per risolvere il problema proposto non rimane che esprimere i coefficienti di Fourier delle ultime quattro funzioni sopra indicate per mezzo dei coefficienti di Fourier delle funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$.

5. - Dalle formule di prostaferesi e dagli sviluppi in serie di Mac-Laurin delle funzioni $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$, segue, uniformemente in Q' ,

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} & \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[rx(u, v) + sy(u, v)]^{2k} + [rx(u, v) - sy(u, v)]^{2k}}{(2k)!} \\ & \operatorname{sen} rx(u, v) \cos sy(u, v) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[rx(u, v) + sy(u, v)]^{2k+1} + [rx(u, v) - sy(u, v)]^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ & \cos rx(u, v) \operatorname{sen} sy(u, v) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[rx(u, v) + sy(u, v)]^{2k+1} - [rx(u, v) - sy(u, v)]^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ & \operatorname{sen} rx(u, v) \operatorname{sen} sy(u, v) = \\ & = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[rx(u, v) + sy(u, v)]^{2k} - [rx(u, v) - sy(u, v)]^{2k}}{(2k)!}, \end{aligned} \right\} \\ (r, s = 0, 1, 2, \dots).$$

Integrando termine a termine le (6) e ponendo

$$A_{(h)}^{m, n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ [rx(u, v) + sy(u, v)]^h + \\ + [rx(u, v) - sy(u, v)]^h \} \cos mu \cos nvdudv, \\ B_{(h)}^{m, n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ [rx(u, v) + sy(u, v)]^h + \\ + [rx(u, v) - sy(u, v)]^h \} \operatorname{sen} mu \cos nvdudv,$$

$$C_{(h)}^{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ [rx(u, v) + sy(u, v)]^h + [rx(u, v) - sy(u, v)]^h \} \cos mu \sin nvdudv,$$

$$D_{(h)}^{m,n} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ [rx(u, v) + sy(u, v)]^h + [rx(u, v) - sy(u, v)]^h \} \sin mu \sin nvdudv,$$

$$A_{(h)}^{*m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ [rx(u, v) + sy(u, v)]^h - [rx(u, v) - sy(u, v)]^h \} \cos mu \cos nvdudv,$$

.....

(m, n, r, s, h = 0, 1, 2, ...), si ottiene

$$\mu_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A_{(2k)}^{m,n}, \quad \nu_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} B_{(2k)}^{m,n},$$

$$\omega_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} C_{(2k)}^{m,n}, \quad \rho_{(r,s)}^{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} D_{(2k)}^{m,n};$$

$$\mu_{(r,s)}^{*m,n} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A_{(2k+1)}^{m,n}, \quad \dots \dots \dots$$

.....

$$\mu_{(r,s)}^{**m,n} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A_{(2k+1)}^{*m,n} \dots \dots \dots$$

.....

$$\mu_{(r,s)}^{***m,n} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A_{(2k)}^{*m,n} \dots \dots \dots$$

..... ,

(m, n, r, s = 0, 1, 2, ...).

Le (5). unitamente a queste ultime formule, permettono di calcolare i coefficienti di Fourier della $F(u, v)$ noti i coefficienti di Fourier della $f(x, y)$ e quelli delle potenze e prodotti di potenze delle funzioni $x(u, v), y(u, v)$.

La completa risoluzione del problema discende ora dalla seguente proposizione:

se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono funzioni di quadrato sommabile in Q , denotati con $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}$ i coefficienti di Fourier della $f(x, y)$ e con $\bar{a}_{m,n}, \bar{b}_{m,n}, \bar{c}_{m,n}, \bar{d}_{m,n}$ quelli della $g(x, y)$ e infine con $A_{m,n}, B_{m,n}, C_{m,n}, D_{m,n}$ quelli del prodotto $f(x, y)g(x, y)$, si ha

$$A_{m,n} = \frac{1}{4} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s} [a_{r,s} (\bar{a}_{m+r, n+s} + \bar{a}_{m+r, n-s} + \bar{a}_{m-r, n+s} + \bar{a}_{m-r, n-s}) + \\ + b_{r,s} (\bar{b}_{m+r, n+s} + \bar{b}_{m+r, n-s} - \bar{b}_{m-r, n+s} - \bar{b}_{m-r, n-s}) + \\ + c_{r,s} (\bar{c}_{m+r, n+s} - \bar{c}_{m+r, n-s} + \bar{c}_{m-r, n+s} - \bar{c}_{m-r, n-s}) + \\ + d_{r,s} (\bar{d}_{m+r, n+s} - \bar{d}_{m+r, n-s} - \bar{d}_{m-r, n+s} + \bar{d}_{m-r, n-s})],$$

($m, n = 0, 1, 2, \dots$), ove si intende che sia

$$\bar{a}_{-h, k} = \bar{a}_{h, -k} = \bar{a}_{-h, -k} = \bar{a}_{h, k}; \quad \bar{b}_{-h, k} = \bar{b}_{-h, -k} = -\bar{b}_{h, k}, \quad \bar{b}_{h, -k} = \bar{b}_{h, k}; \\ \bar{c}_{h, -k} = \bar{c}_{-h, -k} = -\bar{c}_{h, k}, \quad \bar{c}_{-h, k} = \bar{c}_{h, k}; \\ \bar{d}_{-h, k} = \bar{d}_{h, -k} = -\bar{d}_{h, k}, \quad \bar{d}_{-h, -k} = \bar{d}_{h, k}.$$

Analoghe formule sussistono per $B_{m,n}, C_{m,n}, D_{m,n}$ e le serie a secondo membro sono assolutamente convergenti. Per la dimostrazione si può seguire un ragionamento del tutto simile a quello relativo alle funzioni di una variabile⁸⁾, tenendo presente la generalizzazione della formula di Parseval per le funzioni di più variabili⁹⁾.

6. - In un recente lavoro, Žak ha ottenuto il seguente risultato, che costituisce una estensione alle funzioni di due variabili di un teorema di Lévy¹⁰⁾:

La serie di Fourier di una funzione $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π , rispetto ad x e ad y sia in Q totalmente conver-

⁸⁾ Loc. cit. in ³⁾, p. 335.

⁹⁾ Loc. cit., in ⁶⁾, p. 141.

¹⁰⁾ P. LÉVY, *Sur la convergence absolue des séries de FOURIER*, « Compositio Math. », 1, (1934), pp. 1-14.

gente e inoltre si abbia $\alpha \leq f(x, y) \leq \beta$, (α e β costanti). Se $\varphi(z)$ è una funzione analitica in (α, β) , la serie di Fourier di $\varphi[f(x, y)]$ è pure totalmente convergente in Q ¹¹⁾.

Questa proposizione non è più valida se nell'enunciato la parola « totalmente » viene sostituita con la parola « uniformemente ».

Si dimostrerà infatti che:

esistono delle funzioni $f(x, y)$ periodiche di periodo 2π , rispetto ad x e ad y , aventi la serie di Fourier uniformemente convergente in Q ma tali che la serie di Fourier di $f^2(x, y)$ non converge in almeno un punto di Q .

Questa affermazione è stata provata da Salem¹²⁾ per le funzioni di una variabile. Pertanto se $f_1(x)$ e $f_2(y)$ sono due funzioni cosiffatte, il prodotto $f_1(x) f_2(y)$ costituisce un esempio atto a provare l'asserto. Si osservi peraltro che, con un procedimento simile a quello adottato da Salem¹²⁾, è possibile trovare anche degli esempi di funzioni $f(x, y)$ non a variabili separate. Non si ritiene tuttavia opportuno esporre il suddetto procedimento, giacchè lo scopo proposto è già stato raggiunto.

Ciò che si è detto per le funzioni di due variabili si estende in modo ovvio alle funzioni di un numero qualunque di variabili.

¹¹⁾ Nell'enunciato originale si parla di assoluta convergenza della serie doppia complessa equivalente alla serie di FOURIER, ma si vede facilmente che dall'assoluta convergenza della prima segue la totale convergenza della seconda e inversamente.

¹²⁾ R. SALEM, *A singularity of the FOURIER series of continuous functions*, « Duke, Math. J. », 10, (1943), p. 711-716.