RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FABIO MANARESI

Alcuni teoremi sulle serie coniugate della serie di Fourier di una funzione di più variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 181-192

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__181_0>

ALCUNI TEOREMI SULLE SERIE CONIUGATE DELLA SERIE DI FOURIER DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI

Nota (*) *di* FABIO MANARESI (*a Bologna*)

1. - Nella presente nota si estende alle funzioni di più variabili un teorema stabilito da Szász [1]) relativo alle funzioni di una variabile.

Per semplicità di esposizione ci si limita ai casi di funzioni di due variabili (nn. 2, 3) e di tre variabili (n. 4), e nel n. 5 si dà un cenno sul modo di ottenere analoghi risultati per le funzioni di un numero qualunque di variabili.

2. - Sia $f(x, y)$ una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, sommabile nel quadrato $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi)$ e sia

$$(1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(A_{m,n} \cos mx \cos ny + B_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + \\ + C_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + D_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny),$$

ove

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se} \quad m = n = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad m = 0,\ n > 0\,;\ \ m > 0,\ n = 0 \\ 1 & \text{se} \quad m > 0,\ n > 0\,, \end{cases}$$

la serie di Fourier della $f(x, y)$.

(*) Pervenuta in Redazione il 5 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

[1]) O. SZÁSZ, *The jump of a function determined by its Fourier coefficients*, «Duke Math. J.», 4 (1938), pp. 401-407, in particolare § 2.

Denotata con $s_{m,n} \equiv s_{m,n}(x, y)$ la ridotta di indici m, n $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ della (1), si ponga

$$
(2) \qquad \begin{gathered}
s^{(1)}_{m,n} \equiv s^{(1)}_{m,n}(x, y) = \frac{\partial s_{m,n}}{\partial(mx)}, \quad s^{(2)}_{m,n} \equiv s^{(2)}_{m,n}(x, y) = \frac{\partial s_{m,n}}{\partial(ny)}, \\
s^{(1,2)}_{m,n} \equiv s^{(1,2)}_{m,n}(x, y) = \frac{\partial^2 s_{m,n}}{\partial(mx)\partial(ny)}.
\end{gathered}
$$

Le successioni (2) definiscono le tre *serie coniugate* della (1) e verranno chiamate ordinatamente coniugata prima rispetto ad x, coniugata prima rispetto ad y e coniugata seconda rispetto ad x e y.

Se

$$
\sigma^{(1)}_{r,s} \equiv \sigma^{(1)}_{r,s}(x, y), \quad \sigma^{(2)}_{r,s} \equiv \sigma^{(2)}_{r,s}(x, y), \quad \sigma^{(1,2)}_{r,s} \equiv \sigma^{(1,2)}_{r,s}(x, y), \qquad (r, s = 1, 2, 3, \ldots),
$$

rappresentano le medie $(C, 1, 1)$ rispettivamente della prima, seconda e terza delle (2), si dimostra anzitutto il seguente

TEOREMA I. *Se $f(x, y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, sommabile e verificante la condizione (L)*[2] *in Q, allora, in ogni punto (x, y) a cui si possa associare un numero $\varphi(x, y)$ tale che*

$$
(3) \qquad \lim_{\substack{u \\ v}\Big\} \to +0} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v | f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v) - \varphi(x, y) | \, du dv = 0,
$$

risulta

$$
(4) \qquad \lim_{\substack{m \\ n}\Big\} \to \infty} (\sigma^{(1,2)}_{2m,2n} - \sigma^{(1,2)}_{2m,n} - \sigma^{(1,2)}_{m,2n} + \sigma^{(1,2)}_{m,n}) = \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2 \varphi(x, y).
$$

---

[2]) Si dice che la funzione $f(x, y)$ soddisfa in Q *alla condizione* (L), se esiste un numero positivo L tale che le due disuguaglianze

$$
\int_0^{2\pi} | f(x, y) | \, dx \leq L, \qquad \int_0^{2\pi} | f(x, y) | \, dy \leq L,
$$

valgano rispettivamente per quasi tutti gli y e quasi tutti gli x di $(0, 2\pi)$.

Cfr. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna (1928), p. 488.

Si ha

$$\sigma_{r,s}^{(1,2)} = \frac{1}{4\pi^2 rs}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\left[\frac{\operatorname{sen} r(x-u)}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(x-u)} - \right.$$

$$\left. - r\frac{\cos\frac{1}{2}(x-u)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-u)}\right]\left[\frac{\operatorname{sen} s(y-v)}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(y-v)} - s\frac{\cos\frac{1}{2}(y-v)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(y-v)}\right] dudv,$$

$$(r,\ s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

e quindi

$$\sigma_{2m,2n}^{(1,2)} - \sigma_{2m,n}^{(1,2)} - \sigma_{m,2n}^{(1,2)} + \sigma_{m,n}^{(1,2)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,v)\operatorname{sen} m(x-u)\operatorname{sen} n(y-v)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}(x-u)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-u)}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}(y-v)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(y-v)}\right)^2 dudv =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u,\ y-v)\operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nv\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}v}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}v}\right)^2 dudv =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u,y+v)-f(x+u,y-v)-f(x-u,y+v)+f(x-u,y-v)]\cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nv\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}v}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}v}\right)^2 dudv.$$

Si osservi ora che

$$I_{m,n} = \frac{1}{\pi^2 mn}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nv\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}v}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}v}\right)^2 dudv$$

si può considerare come il prodotto della media $(C,\ 1)$ relativa alla serie di coseni di $\operatorname{sen} mx$ per $x = 0$ e della media

$(C, 1)$ relativa alla serie di coseni di sen ny per $y = 0$, sicchè, avendosi

$$\operatorname{sen} mx \backsim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_\mu \cos \mu x, \qquad 0 < x < \pi,$$

$$\operatorname{sen} ny \backsim \frac{\beta_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cos \nu y, \qquad 0 < y < \pi,$$

ove

$$\alpha_\mu = \frac{2}{\pi} \frac{m}{m^2 - \mu^2} [1 - (-1)^{m+\mu}], \qquad (\mu = 0, 1, \dots, m-1),$$

$$\beta_\nu = \frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2 - \nu^2} [1 - (-1)^{n+\nu}], \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

risulta

$$I_{m,n} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\pi m} [1 - (-1)^m] + \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1-(-1)^{m+\mu}}{m+\mu} \right\} \left\{ \frac{1}{\pi n} [1-(-1)^n] + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-(-1)^{n+\nu}}{n+\nu} \right\} =$$

$$= \omega_m \cdot \omega_n .$$

Poichè [3])

$$\lim_{m \to \infty} \omega_m = \lim_{n \to \infty} \omega_n = \frac{2}{\pi} \log 2, \tag{5}$$

si trae

$$\lim_{\substack{m \\ n} \} \to \infty} I_{m,n} = \left(\frac{2}{\pi} \log 2 \right)^2 . \tag{6}$$

Si può quindi scrivere

$$\left| \sigma_{2m,2n}^{(1,2)} - \sigma_{2m,n}^{(1,2)} - \sigma_{m,2n}^{(1,2)} + \sigma_{m,n}^{(1,2)} - \frac{1}{4} \omega_m \omega_n \varphi(x, y) \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi [f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - f(x-u, y+v) + \right.$$
$$+ f(x-u, y-v) - \varphi(x, y)] \cdot$$

[3]) Loc. cit. in [1]), pp. 404-405.

$$\cdot \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nv \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}v}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}v}\right)^2 dudv \,\Bigg| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2 mn}\int_0^\pi\int_0^\pi | f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - f(x-u, y+v) +$$

$$+ f(x-u, y-v) - \varphi(x, y) | \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}v}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}v}\right)^2 dudv$$

Per un teorema di Lebesgue [4]) l'ultimo membro tende a zero per $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\Big\} \to \infty$ e pertanto, in virtù della (6), segue l'asserto.

Si noti che, ponendo nella (4) $m = 2^\mu$, $n = 2^\nu$ e considerandone la media $(C, 1, 1)$, si ottiene

$$\lim_{\begin{smallmatrix}\mu \\ \nu\end{smallmatrix}\} \to \infty} \frac{1}{\mu\nu}\sigma^{(1,2)}_{2^\mu 2^\nu} = \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2 \varphi(x, y).$$

3. - Si stabiliscono ora gli analoghi teoremi relativi alle due serie coniugate prime della (1).

TEOREMA II. *Se $f(x, y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, sommabile e verificante la condizione (L) in Q, allora, in ogni punto (x, y) a cui si possa associare un numero $\varphi(x, y)$ tale che*

$$(7) \qquad \lim_{\begin{smallmatrix}u \\ v\end{smallmatrix}\} \to +0} \frac{1}{uv}\int_0^\pi\int_0^\pi | f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) -$$

$$- f(x-u, y+v) - f(x-u, y-v) - \varphi(x, y) | \, dudv = 0,$$

risulta

$$(8) \qquad \lim_{\begin{smallmatrix}m \\ n\end{smallmatrix}\} \to \infty} (\sigma^{(1)}_{2m, n} - \sigma^{(1)}_{m, n}) = \frac{1}{2}\frac{\log 2}{\pi}\varphi(x, y)$$

---

[4]) Loc. cit. in [2]), p. 495.

e quindi

$$\lim_{\substack{m\\ n}\Big\}\to\infty} (\sigma^{(1)}_{2m,\,2n} - \sigma^{(1)}_{2m,\,n} - \sigma^{(1)}_{m,\,2n} + \sigma^{(1)}_{m,\,n}) = 0. \tag{9}$$

Si ha

$$\sigma^{(1)}_{r,\,s} = \frac{1}{4\pi^2 rs}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(u,\,v)\left[\frac{\operatorname{sen} r(x-u)}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(x-u)} - \right.$$

$$\left. - r\,\frac{\cos\frac{1}{2}(x-u)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-u)}\right]\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{s}{2}(y-v)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(y-v)}\right)^2 du dv, \qquad (r,\,s = 1,\,2,\,3,\,\ldots),$$

e quindi

$$\sigma^{(1)}_{2m,\,n} - \sigma^{(1)}_{m,\,n} =$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 mn}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(u,\,v)\operatorname{sen} m(x-u)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}(x-u)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-u)}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}(y-v)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(y-v)}\right)^2 du dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\pi} [f(x+u,\; y+v) + f(x+u,\; y-v) -$$

$$- f(x-u,\; y+v) - f(x-u,\; y-v)] \operatorname{sen} mu \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}v}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}v}\right)^2 du dv,$$

$$\left|\,\sigma^{(1)}_{2m,\,n} - \sigma^{(1)}_{m,\,n} - \frac{1}{4}\,\omega_m\varphi(x,\,y)\,\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn}\left|\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\pi} [f(x+u,\; y+v) + f(x+u,\; y-v) -\right.$$

$$- f(x-u,\ y+v) - f(x-u,\ y-v) - \varphi(x,\ y)] \operatorname{sen} mu \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv \, \Bigg| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_0^\pi \int_0^\pi | f(x+u,\ y+v) + f(x+u,\ y-v) -$$

$$- f(x-u,\ y+v) - f(x-u,\ y-v) - \varphi(x,\ y) | \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv,$$

sicchè, in virtù della (5) e del citato teorema di Lebesgue, resta provata la (8).

Conseguentemente

$$\lim_{\substack{m \\ n}\Big\} \to \infty} (\sigma^{(1)}_{2m,\,2n} - \sigma^{(1)}_{m,\,2n}) = \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\pi} \varphi(x,\ y),$$

che, insieme con la (8), dimostra la (9).

Con lo stesso ragionamento adottato nella dimostrazione del teorema II, si prova che:

Se $f(x,\ y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, sommabile e verificante la condizione (L) in Q, allora, in ogni punto $(x,\ y)$ a cui si possa associare un numero $\varphi(x,\ y)$ tale che

$$\lim_{\substack{u \\ v}\Big\} \to +0} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v | f(x+u,\ y+v) - f(x+u,\ y-v) +$$

$$+ f(x-u,\ y+v) - f(x-u,\ y-v) - \varphi(x,\ y) | \, dudv = 0,$$

risulta

$$\lim_{\substack{m \\ n}\Big\} \to \infty} (\sigma^{(2)}_{m,\,2n} - \sigma^{(2)}_{m,\,n}) = \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\pi} \varphi(x,\ y)$$

e quindi

$$\lim_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} (\sigma^{(2)}_{2m,n} - \sigma^{(2)}_{2m,n} - \sigma^{(2)}_{m,2n} + \sigma^{(2)}_{m,n}) = 0.$$

4. - In questo n. si accenna alla dimostrazione di teoremi analoghi a I, II e relativi alle funzioni di tre variabili.

Sia $f(x, y, z)$ una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle variabili, e sommabile nel dominio rettangolare $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2\pi)$ e sia

$$\begin{aligned}(10)\qquad & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \lambda_{m,n,p}(A_{m,n,p} \cos mx \cos ny \cos pz + \\ & + B_{m,n,p} \cos mx \cos ny \,\mathrm{sen}\, pz + C_{m,n,p} \cos mx \,\mathrm{sen}\, ny \cos pz + \\ & + D_{m,n,p} \,\mathrm{sen}\, mx \cos ny \cos pz + E_{m,n,p} \cos mx \,\mathrm{sen}\, ny \,\mathrm{sen}\, pz + \\ & + F_{m,n,p} \,\mathrm{sen}\, mx \cos ny \,\mathrm{sen}\, pz + G_{m,n,p} \,\mathrm{sen}\, mx \,\mathrm{sen}\, ny \cos pz + \\ & + H_{m,n,p} \,\mathrm{sen}\, mx \,\mathrm{sen}\, ny \,\mathrm{sen}\, pz),\end{aligned}$$

ove

$$\lambda_{m,n,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & \text{se} \quad m = n = p = 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{se} \quad m = 0,\ n > 0,\ p > 0;\ m > 0,\ n = 0,\ p > 0; \\ & \qquad\qquad m > 0,\ n > 0,\ p = 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad m = 0,\ n = 0,\ p > 0;\ m = 0,\ n > 0,\ p = 0; \\ & \qquad\qquad m > 0,\ n = 0,\ p = 0 \\ 1 & \text{se} \quad m > 0,\ n > 0,\ p > 0, \end{cases}$$

la sua serie di Fourier.

Indicata con $s_{m,n,p} \equiv s_{m,n,p}(x, y, z)$ la ridotta di indici m, n, p $(m, n, p = 0, 1, 2, \ldots)$ della (10), si ponga

$$(11)\quad \begin{cases} s^{(1)}_{m,n,p} = \dfrac{\partial s_{m,n,p}}{\partial(mx)}, \quad s^{(2)}_{m,n,p} = \dfrac{\partial s_{m,n,p}}{\partial(ny)}, \quad s^{(3)}_{m,n,p} = \dfrac{\partial s_{m,n,p}}{\partial(pz)}, \\ s^{(1,2)}_{m,n,p} = \dfrac{\partial^2 s_{m,n,p}}{\partial(mx)\partial(ny)}, \quad s^{(1,3)}_{m,n,p} = \dfrac{\partial^2 s_{m,n,p}}{\partial(mx)\partial(pz)}, \quad s^{(2,3)}_{m,n,p} = \dfrac{\partial^2 s_{m,n,p}}{\partial(ny)\partial(pz)}, \\ s^{(1,2,3)}_{m,n,p} = \dfrac{\partial^3 s_{m,n,p}}{\partial(mx)\partial(ny)\partial(pz)}. \end{cases}$$

Le successioni (11) definiscono le *serie coniugate* della (10) e precisamente le tre serie coniugate *prime*, le tre serie coniugate *seconde* e la serie coniugata *terza*. Se con $\sigma^{(1)}_{r,s,t} \equiv \sigma^{(1)}_{r,s,t}(x, y, z)$, $\sigma^{(2)}_{r,s,t} \equiv \sigma^{(2)}_{r,s,t}(x, y, z)$, $\sigma^{(3)}_{r,s,t} \equiv \sigma^{(3)}_{r,s,t}(x, y, z)$, $\sigma^{(1,2)}_{r,s,t} = \sigma^{(1,2)}_{r,s,t}(x, y, z)$, $\sigma^{(1,3)}_{r,s,t} \equiv \sigma^{(1,3)}_{r,s,t}(x, y, z)$, $\sigma^{(2,3)}_{r,s,t} \equiv \sigma^{(2,3)}_{r,s,t}(x, y, z)$, $\sigma^{(1,2,3)}_{r,s,t} \equiv \sigma^{(1,2,3)}_{r,s,t}(x, y, z)$ si indicano le medie $(C, 1, 1, 1)$ delle (11) ordinatamente, ragionando come nei nn. 2 e 3, si riconosce che, ove $f(x, y, z)$ soddisfi alla condizione (L) in Q,

$$\lim_{u,v,w\to+0} \frac{1}{uvw} \int_0^u \int_0^v \int_0^w | f(x+u, y+v, z+w) -$$
$$- f(x+u, y+v, z-w) - f(x+u, y-v, z+w) +$$
$$+ f(x+u, y-v, z-w) - f(x-u, y+v, z+w) +$$
$$+ f(x-u, y+v, z-w) + f(x-u, y-v, z+w) -$$
$$- f(x-u, y-v, z-w) - \varphi(x, y, z) | \, dudvdw = 0$$

implica

$$\lim_{m,n,p\to\infty} (\sigma^{(1,2,3)}_{2m,2n,2p} - \sigma^{(1,2,3)}_{m,2n,2p} - \sigma^{(1,2,3)}_{2m,n,2p} + \sigma^{(1,2,3)}_{m,n,2p} - \sigma^{(1,2,3)}_{2m,2n,p} +$$
$$+ \sigma^{(1,2,3)}_{m,2n,p} + \sigma^{(1,2,3)}_{2m,n,p} - \sigma^{(1,2,3)}_{m,n,p} = \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^3 \varphi(x, y, z);$$

$$\lim_{u,v,w\to+0} \int_0^u \int_0^v \int_0^w | f(x+u, y+v, z+w) +$$
$$+ f(x+u, y+v, z-w) - f(x+u, y-v, z+w) -$$
$$- f(x+u, y-v, z-w) - f(x-u, y+v, z+w) -$$
$$- f(x-u, y+v, z-w) + f(x-u, y-v, z+w) +$$
$$+ f(x-u, y-v, z-w) - \varphi(x, y, z) | \, dudvdw = 0$$

implica

$$\lim_{m,n,p\to\infty} (\sigma^{(1,2)}_{2m,2n,p} - \sigma^{(1,2)}_{2m,n,p} - \sigma^{(1,2)}_{m,2n,p} + \sigma^{(1,2)}_{m,n,p} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2 \varphi(x, y, z)$$

e quindi

$$\lim_{m,n,p\to\infty}\left(\sigma^{(1,2)}_{2m,2n,2p}-\sigma^{(1,2)}_{m,2n,2p}-\sigma^{(1,2)}_{2m,n,2p}+\sigma^{(1,2)}_{m,n,2p}-\sigma^{(1,2)}_{2m,2n,p}+\right.$$
$$\left.+\sigma^{(1,2)}_{m,2n,p}+\sigma^{(1,2)}_{2m,n,p}-\sigma^{(1,2)}_{m,n,p}\right)=0\,;$$

$$\lim_{u,v,w\to+0}\frac{1}{uvw}\int_0^u\int_0^v\int_0^w\left|f(x+u,\ y+v,\ z+w)+\right.$$
$$+f(x+u,\ y+v,\ z-w)+f(x+u,\ y-v,\ z+w)+$$
$$+f(x+u,\ y-v,\ z-w)-f(x-u,\ y+v,\ z+w)-$$
$$-f(x-u,\ y+v,\ z-w)-f(x-u,\ y-v,\ z+w)-$$
$$\left.-f(x-u,\ y-v,\ z-w)-\varphi(x,\ y,\ z)\right|dudvdw=0$$

implica

$$\lim_{m,n,p\to\infty}\left(\sigma^{(1)}_{2m,n,p}-\sigma^{(1)}_{m,n,p}\right)=\frac{1}{2^2}\,\frac{\log 2}{\pi}\,\varphi(x,\ y,\ z)$$

e quindi

$$\lim_{m,n,p\to\infty}\left(\sigma^{(1)}_{2m,2n,2p}-\sigma^{(1)}_{m,2n,2p}-\sigma^{(1)}_{2m,n,2p}+\sigma^{(1)}_{m,n,2p}-\sigma^{(1)}_{2m,2n,p}+\right.$$
$$\left.+\sigma^{(1)}_{m,2n,p}+\sigma^{(1)}_{2m,n,p}-\sigma^{(1)}_{m,n,p}\right)=0\,;$$

$$\lim_{u,v,w\to+0}\frac{1}{uvw}\int_0^u\int_0^v\int_0^w\left|f(x+u,\ y+v,\ z+w)-\right.$$
$$-f(x+u,\ y+v,\ z-w)+f(x+u,\ y-v,\ z+w)-$$
$$-f(x+u,\ y-v,\ z-w)-f(x-u,\ y+v,\ z+w)+$$
$$+f(x-u,\ y+v,\ z-w)-f(x-u,\ y-v,\ z+w)+$$
$$\left.+f(x-u,\ y-v,\ z-w)-\varphi(x,\ y,\ z)\right|dudvdw=0$$

implica

$$\lim_{m,n,p\to\infty}\left(\sigma^{(1,3)}_{2m,n,2p}-\sigma^{(1,3)}_{2m,n,p}-\sigma^{(1,3)}_{m,n,2p}=\sigma^{(1,3)}_{m,n,p}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2\varphi(x,\ y,\ z)$$

e anche

$$\lim_{m,n,p\to\infty}(\sigma^{(1,3)}_{2m,2n,2p}-\sigma^{(1,3)}_{m,2n,2p}-\sigma^{(1,3)}_{2m,n,2p}+\sigma^{(1,3)}_{m,n,2p}-\sigma^{(1,3)}_{2m,2n,p}+$$
$$+\sigma^{(1,3)}_{m,2n,p}+\sigma^{(1,3)}_{2m,n,p}-\sigma^{(1,3)}_{m,n,p})=0\,;$$

$$\lim_{u,v,w\to+0}\frac{1}{uvw}\int_0^u\int_0^v\int_0^w|f(x+u,\ y+v,\ z+w)+$$
$$+f(x+u,\ y+v,\ z-w)-f(x+u,\ y-v,\ z+w)-$$
$$-f(x+u,\ y-v,\ z-w)+f(x-u,\ y+v,\ z+w)+$$
$$+f(x-u,\ y+v,\ z-w)-f(x-u,\ y-v,\ z+w)-$$
$$-f(x-u,\ y-v,\ z-w)-\varphi(x,\ y,\ z)|\,dudvdw=0$$

implica

$$\lim_{m,n,p\to\infty}(\sigma^{(2)}_{m,2n,p}-\sigma^{(2)}_{m,n,p})=\frac{1}{2^2}\frac{\log 2}{\pi}\varphi(x,\ y,\ z)$$

e quindi

$$\lim_{m,n,p\to\infty}(\sigma^{(2)}_{2m,2n,2p}-\sigma^{(2)}_{m,2n,2p}-\sigma^{(2)}_{2m,n,2p}+\sigma^{(2)}_{m,n,2p}-\sigma^{(2)}_{2m,2n,p}+$$
$$+\sigma^{(2)}_{m,2n,p}+\sigma^{(2)}_{2m,n,p}-\sigma^{(2)}_{m,n,p})=0.$$

Analoghi risultati sussistono per le altre serie coniugate (11).

5. - Le considerazioni dei nn. precedenti si possono estendere alle funzioni di un numero qualunque r di variabili.

Considerata la funzione $f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_r)$ periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle variabili e sommabile nel dominio rettangolare $Q\equiv(0\leq x_1\leq 2\pi,\ 0<x_2<2\pi,\ \dots,\ 0<x_r<\leq 2\pi)$, si hanno 2^r-1 *serie coniugate* della sua serie di Fourier e precisamente $\binom{r}{1}$ coniugate *prime*, $\binom{r}{2}$ coniugate *seconde*, ..., $\binom{r}{r-1}$ coniugate $(r-1)$-*esime*, $\binom{r}{r}=1$ coniugata r-*esima*.

Per ogni serie coniugata k-esima $(k=1,\ 2,\ \dots,\ r)$ di indici

$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, la somma algebrica delle 2^k medie $(C, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r})$ aventi k degli indici $m_1, m_2, \ldots, m_r$ e i segni corrispondenti rispettivamente agli argomenti e ai segni della somma dei termini a cui dà origine il calcolo dell'integrale

$$\int_{m_{\nu_1}}^{2m_{\nu_1}} \int_{m_{\nu_2}}^{2m_{\nu_2}} \int_{m_{\nu_k}}^{2m_{\nu_k}} \frac{\partial^k \Psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)}{\partial\xi_1 \partial\xi_2 \ldots \partial\xi_k} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_k,$$

ha per limite

$$\frac{1}{2^{r-k}} \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^k \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

per $m_1, m_2, \ldots, m_r \to \infty$, se: a) $f(x_1\ x_2, \ldots, x_r)$ soddisfa alla condizione (L) in Q, b) per $u_1, u_2, \ldots, u_r \to +0$, tende a zero il prodotto di $\dfrac{1}{u_1 u_2 \ldots u_r}$. per l'integrale r-plo da 0 ad u_1, da 0 ad $u_2, \ldots$, da 0 ad u_r, del valore assoluto della differenza tra la somma algebrica di 2^k termini del tipo $f(x_1 \pm u_1, x_2 \pm u_2, \ldots, x_r \pm u_r)$, corrispondenti alle 2^k disposizioni con ripetizione dei segni $+$, $-$ a k a k, termini presi ciascuno col proprio segno o col segno cambiato secondochè è pari o dispari il numero dei segni $-$ che figurano negli argomenti di indici $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, e il numero $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$.