

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE BENTSIK

**Su di un problema del tipo di quello della bussola
giroscopica nel caso di un corpo rigido asimmetrico**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 176-180

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__176_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU DI UN PROBLEMA DEL TIPO DI
QUELLO DELLA BUSSOLA GIROSCOPICA
NEL CASO DI UN CORPO RIGIDO
ASIMMETRICO

Nota () di ETTORE BENTSIK (a Padova)*

In questo lavoro mi propongo di studiare il moto rispetto alla Terra di un corpo rigido qualunque, \mathcal{C} , soggetto alle forze centrifughe composte dovute alla rotazione terrestre, nell'ipotesi che una retta baricentrale, f , di \mathcal{C} sia vincolata senza attrito a rimanere in un piano π solidale alla Terra e che il baricentro, G , di \mathcal{C} sia fisso in π .

In generale non è possibile ridurre il problema alle quadrature, tuttavia ciò accade — come mostrerò — almeno quando il piano di vincolo è ortogonale all'asse terrestre. Comunque sia, in analogia a quanto accade nel caso giroscopico, mostrerò che — se \mathcal{C} non è in quiete — f è in posizione di equilibrio solo se disposta secondo la parallela per G alla proiezione dell'asse terrestre su π .

Ma — se π ha giacitura generica — f deve coincidere con una delle due rette per G ortogonali ai piani ciclici dell'elissoide centrale e la velocità angolare di \mathcal{C} uguale in modulo al doppio di quella della rotazione terrestre.

Se invece π è parallelo all'asse terrestre, la f può essere una qualunque retta del corpo ma la velocità di rotazione rimane arbitraria solo se f coincide con un asse centrale.

(*) Pervenuta in Redazione il 4 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1. Premesse di carattere generale.

Per un qualunque corpo rigido \mathcal{C} il momento rispetto ad un punto O delle forze centrifughe composte dovute alla rotazione terrestre è esprimibile nella forma ¹⁾

$$(1) \quad \mathbf{M}_O^{(C)} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\mathbf{H}$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ denota la velocità angolare di \mathcal{C} , σ l'omografia d'inerzia, rappresentata dalla matrice ²⁾

$$(2) \quad \sigma \equiv \begin{vmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{vmatrix},$$

\mathbf{H} la velocità della rotazione terrestre e si è posto

$$(3) \quad \lambda = A + B + C.$$

Nel moto di \mathcal{C} relativo al baricentro il teorema del momento della quantità di moto si esprime nella forma

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\mathbf{H} + \mathbf{M}_G^{(V)}$$

ove $\mathbf{M}_G^{(V)}$ denota il momento risultante rispetto al baricentro delle reazioni vincolari ed evidentemente è

$$(5) \quad \mathbf{K}_G = \sigma\boldsymbol{\omega}.$$

Riferirò il solido a due terne con origine in G , una solidale [a cui è riferita la (2)] di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, con il terzo asse coincidente con la f e una fissa, di versori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$

¹⁾ GIUSEPPE GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*. Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Volume XXVII, 1957, pag. 90.

²⁾ Il significato dei simboli A, B , ecc., è abituale e si può sempre assumere la presupposta terna solidale in modo che uno dei tre momenti di deviazione, ad esempio C' , risulti nullo.

con \mathbf{c}_1 ortogonale a π e \mathbf{c}_3 tale che il piano $G\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3$ sia parallelo ad \mathbf{H} .

Con tale scelta dei sistemi di riferimento, in assenza di attrito, $\mathbf{M}_G^{(V)}$ risulta ortogonale a \mathbf{c}_1 e \mathbf{k} e vale l'integrale dell'energia

$$(6) \quad \mathbf{K}_G \times \boldsymbol{\omega} = 2E_0 = \text{cost},$$

mentre le equazioni differenziali del moto di \mathcal{C} , se espresse mediante gli angoli di Eulero φ , ψ , ϑ degli assi solidali rispetto a quelli fissi, si riducono in base a (4), a

$$(7) \quad \begin{cases} \left[\frac{d\sigma\boldsymbol{\omega}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\mathbf{H} \right] \times \mathbf{c}_1 = 0, \\ \left[\frac{d\sigma\boldsymbol{\omega}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\mathbf{H} \right] \times \mathbf{k} = 0, \end{cases}$$

ove si tenga presente che il vincolo è espresso dall'uguaglianza

$$(8) \quad \psi \equiv 0.$$

2. Un caso di riducibilità alle quadrature.

Il problema posto nel numero precedente non è in generale riducibile alle quadrature. Mostrerò tuttavia come ciò invece accada almeno quando π è ortogonale ad \mathbf{H} , qualunque sia la retta f .

Comincio con l'osservazione che, in base alla condizione (di invariabilità di \mathbf{c}_1)

$$(9) \quad \dot{\mathbf{c}}_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{c}_1 = 0$$

risulta (tenendo conto che l'omografia σ è una dilatazione)

$$(10) \quad \frac{d\mathbf{c}_1 \times \sigma\mathbf{c}_1}{dt} = \mathbf{c}_1 \times (\sigma\dot{\mathbf{c}}_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\mathbf{c}_1) = 2\dot{\mathbf{c}}_1 \times \sigma\mathbf{c}_1.$$

Supposto

$$(11) \quad \mathbf{H} = H\mathbf{c}_1$$

si ha

$$(12) \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\mathbf{H} \times \mathbf{c}_1 = H\mathbf{c}_1 \wedge \boldsymbol{\omega} \times (\lambda - 2\sigma)\mathbf{c}_1$$

che, in base a (9) (10) si riduce a

$$(13) \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\mathbf{H} \times \mathbf{c}_1 = -2H\dot{\mathbf{c}}_1 \times \sigma\mathbf{c}_1 = -H \frac{d\mathbf{c}_1 \times \sigma\mathbf{c}_1}{dt},$$

Basta allora moltiplicare scalarmente la (4) per \mathbf{c}_1 per ottenere, in base a (5), (13) e all'ortogonalità di $\mathbf{M}_G^{(V)}$ con \mathbf{c}_1 , l'integrale primo

$$(14) \quad \sigma\mathbf{c}_1 \times (\boldsymbol{\omega} + H\mathbf{c}_1) = \mathbf{h} = \text{cost.}$$

I due integrali primi (6), (14) permettono di ridurre il problema alle quadrature.

Essi, tenuto conto di (8), si esplicitano in

$$(15) \quad A\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + B\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + C\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}(A' \sin \varphi - B' \cos \varphi) = 2E,$$

$$(16) \quad (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(\dot{\varphi} + H) + (A' \sin \varphi - B' \cos \varphi)\dot{\varphi} = h$$

Basta ricavare $\dot{\varphi}$ da (16) e introdurlo nella (15) per raggiungere lo scopo.

3. Un tipo di movimento analogo a quello della bussola giroscopica.

Determinerò tutte le soluzioni per le quali la retta f rimane invariabile in π .

In esse $\boldsymbol{\omega}$ risulta parallelo a \mathbf{k} e dalla invariabilità della forza viva di \mathcal{C} segue la costanza del modulo di $\boldsymbol{\omega}$. Trattasi quindi di rotazioni uniformi e si può porre

$$(17) \quad \boldsymbol{\omega} = r_0\mathbf{k}.$$

Ne segue

$$(18) \quad \frac{d\sigma\boldsymbol{\omega}}{dt} = r_0 \frac{d\sigma\mathbf{k}}{dt} = r_0^2\dot{\mathbf{k}} \wedge \sigma\mathbf{k}$$

e si constata che le (7) si riducono all'unica equazione

$$(19) \quad \mathbf{c}_1 \times \mathbf{k} \wedge [r_0\sigma\mathbf{k} + (2\sigma - \lambda)\mathbf{H}] = 0$$

che può scriversi

$$(20) \quad (r_0 \mathbf{k} + 2\mathbf{H}) \times \sigma(\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{k}) - \lambda \mathbf{H} \times \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{k} = 0.$$

In base a (8) risulta

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j}; \\ \mathbf{c}_3 &= \sin \vartheta (\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) + \cos \vartheta \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Tenuto conto di

$$(22) \quad \mathbf{H} = H' \mathbf{c}_1 + H''' \mathbf{c}_3$$

e di (2), (3), (8), (21), la (20) si esplicita nell'uguaglianza

$$(23) \quad \begin{aligned} &2(B - A)(H' \sin \varphi \cos \varphi - H''' \sin \vartheta \cos^2 \varphi) + \\ &+ (r_0 + 2H''' \cos \vartheta)(A' \cos \varphi + B' \sin \varphi) + \\ &+ (B + C - A)H''' \sin \vartheta = 0 \end{aligned}$$

che deve essere identicamente verificata rispetto a φ .

Si presentano quindi i seguenti casi possibili:

- a) $B - A = 0$, $A' = B' = 0$, $H''' = 0$,
- b) $B - A = 0$, $A' = B' = 0$, $\sin \vartheta = 0$,
- c) $B - A = 0$, $\sin \vartheta = 0$, $r_0 = \mp 2H'''$,
- d) $A' = B' = 0$, $\sin \vartheta = 0$, $H' = 0$,
- e) $\sin \vartheta = 0$, $r_0 = \mp 2H'''$, $H' = 0$,

dei quali i primi due corrispondono al ben noto caso della bussola giroscopica.

Negli altri casi si riconosce che la retta f deve essere — come nel caso giroscopico — parallela alla proiezione dell'asse terrestre su π .

In particolare [caso c)], se π ha giacitura qualsiasi occorre che f coincida con una delle due rette per G ortogonali ai piani ciclici e che la velocità angolare abbia modulo uguale al doppio di quella della rotazione terrestre. Invece se π è parallelo all'asse terrestre, r_0 può avere qualsiasi valore allora e soltanto allora che la f coincide con uno degli assi centrali d'inerzia [caso d)].