BRUNO PINI

Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione parabolica non lineare del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 149-161
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__149_0>

SUL PRIMO PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE PARABOLICA NON LINEARE DEL SECONDO ORDINE

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Modena*)

Recentemente T. Satō ha ottenuto, con mezzi assai semplici, notevoli risultati circa l'esistenza di una soluzione, della sua unicità e, nel caso che questa manchi, della più grande e più piccola soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta^* u &= f(x, y, u, u_x, u_y) && \text{in} \quad D - FD \\ u &= 0 && \text{su} \quad FD, \end{aligned}$$

essendo D un dominio piano opportunamente regolare e Δ^* il laplaciano generalizzato di Blaschke [1]).

Da un punto di vista analogo a quello da cui si è posto Satō possono essere conseguiti dei risultati anche per il primo problema di valori al contorno per l'equazione parabolica non lineare del secondo ordine.

Per il dominio rettangolare $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$, e per l'equazione $u_{xx} - u_y = f(x, y, u, u_x)$ il primo problema di valori al contorno è stato trattato anche recentemente, in parti-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 28 maggio 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

1) T. SATŌ, *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$, Compositio Mathematica, 12 (1954); nello stesso ordine d'idee è da ricordare S. SIMODA, *Sur Théoremes d'Existence dans les Problèmes aux limites pour l'Équation* $\Delta u = F(x, y, \operatorname{grad} u)$, Osaka Math. Journal, 6 (1954).

colare da C. Ciliberto e G. Prodi [2]; sulla funzione $f(x, y, u, p)$ gli A.A. citati fanno, tra l'altro, l'ipotesi della hölderianità rispetto a (x, y, u, p) per $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$, e u, p variabili in un conveniente campo; ciò è naturale se si richiede che l'equazione sia soddisfatta in senso ordinario [3]. Abbandonando tale ipotesi e supponendo la f soltanto continua, si può, seguendo Satō, sostituire l'operatore $\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial y$ con un operatore generalizzato come ad esempio quello da me introdotto in un precedente lavoro [4] e che è l'analogo, per l'equazione del calore o sua aggiunta, dell'operatore di Blaschke.

Le righe seguenti hanno lo scopo di provare come si possano facilmente trasportare al caso parabolico i risultati di Satō. In vista di ciò, ci si è limitati ai più essenziali risultati di questo A. senza preoccuparci di ottenere dei miglioramenti, certamente possibili, delle ipotesi, sotto le quali si provano le proposizioni seguenti, rispetto a quelle del citato A.; per completezza si sono poi accennati i ragionamenti anche nei casi in cui essi si deducono immediatamente da quelli di Satō.

Indichiamo con P e Q i punti (x, y) e (ξ, η); se r è un numero positivo indichiamo con $\mathcal{C}(P, r)$ la curva

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = x + r\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\sqrt{\lg(1/\mathrm{sen}^2\theta)} \\ \eta = y + r\,\mathrm{sen}^2\theta, \qquad\qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

---

[2]) C. CILIBERTO, *Su di un problema al contorno per l'equazione* $u_{xx} - u_y = f(x, y, u, u_x)$, Ricerche di Mat., 1 (1952); G. PRODI, *Teoremi di esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico*, Rend. Ist. Lombardo, 86 (1953).

[3]) Se $f(x, y)$ è una funzione definita ad esempio nel rettangolo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$ e ivi soltanto continua, l'equazione $u_{xx} - u_y = f(x, y)$ può non avere alcuna *soluzione* se come tale s'intende una funzione continua nel rettangolo e dotata in ogni punto dell'insieme $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$ delle derivate seconda rispetto a x e prima rispetto a y, verificanti l'equazione; cfr. J. HADAMARD, *Équations du Type Parabolique Dépourvues de Solutions*, Journal of Rat. Mech. and Analysis, 3 (1954).

[4]) B. PINI, *Su un integrale analogo al potenziale logaritmico*, B.U.M.I., 3, 9 (1954).

Sia $\mathcal{A}$ un campo del piano x, y ove sia assegnata una funzione continua $u(P)$. Se $P \in \mathcal{A}$ ed r è tale che il dominio limitato di frontiera $\mathcal{C}(P, r)$ appartiene ad $\mathcal{A}$, poniamo

$$(2) \qquad \mu(u, P, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathcal{C}(P,r)} \cos\theta \sqrt{\lg(1/\mathrm{sen}^2\theta)}\, d\theta$$

e

$$(3) \qquad \mathfrak{M}^*[u] = \lim_{r \to 0} \frac{3\sqrt{3}\,[\mu(u, P, r) - u(P)]}{r^2},$$

tutte le volte che il limite a secondo membro di (3) esiste.

Se $u(P)$ ha le derivate u_{xx} e u_y allora

$$(4) \qquad \mathfrak{M}^*[u(P)] = u_{xx}(P) + u_y(P) = \mathfrak{M}[u(P)] \text{ [5]}.$$

Sia $\mathfrak{D}$ il dominio

$$a \leq y \leq b, \qquad \chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$$

con $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ due funzioni continue su $a < y \leq b$ tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $a \leq y \leq b$. È noto [6]) che se $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ sono dotate di derivate prime continue, il cambiamento di variabili

$$x' = \frac{x - \chi_1(y)}{\chi_2(y) - \chi_1(y)} \quad , \quad y' = \int_a^y \frac{dt}{[\chi_2(t) - \chi_1(t)]^2}$$

trasforma $\mathfrak{D}$ nel rettangolo $\mathfrak{R}: \ 0 \leq x' \leq 1, \ \ 0 \leq y' \leq h$ $\left(h = \int_a^b \frac{dt}{(\chi_2(t) - \chi_1(t))^2}\right)$ e l'equazione $\mathfrak{M}[u] = f(P, u, u_x)$ in una equazione del medesimo tipo. Per semplicità ci riferiremo senz'altro al rettangolo $\mathfrak{R}: \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq h$ e, detta $\mathfrak{S}$ la frontiera di $\mathfrak{R}$ privata dei punti $0 < x < 1$, $y = 0$, con-

---

[5]) Cfr. l. c. in [4]).

[6]) Cfr. M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Journal de Math. pures et appl., 6, 9 (1913).

sidereremo il problema

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}^*[u] = f(P,\ u,\ u_x) & \text{per} \quad P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S} \\ u = u_0 & \text{per} \quad P \in \mathfrak{S} \end{cases}$$

essendo u_0 una assegnata funzione continua e $f(P,\ u,\ p)$ una data funzione definita per $P \in \mathfrak{R}$ e $(u,\ p)$ variabile in un certo insieme $\mathfrak{E}$.

Una funzione $u(P)$ si dirà *regolare in* $\mathfrak{R}$ se è continua in $\mathfrak{R}$, dotata di derivata rispetto ad x continua in $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$, e per la quale esiste il limite (3) in ogni punto $P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$.

1. - *Siano $f(P,\ z,\ p)$ e $\bar{f}(P,\ z,\ p)$ due funzioni definite per $P \in \mathfrak{R}$, $(z,\ p) \in \mathfrak{E}$; $z(P)$ e $\bar{z}(P)$ due funzioni regolari in $\mathfrak{R}$ tali che per $P \in \mathfrak{R}$ sia $(z,\ z_x)$, $(\bar{z},\ \bar{z}_x) \in \mathfrak{E}$ e*

$$\mathfrak{M}^*[z] = f(P,\ z,\ z_x), \qquad \mathfrak{M}^*[\bar{z}] = \bar{f}(P,\ \bar{z},\ \bar{z}_x).$$

Se è

$$\bar{f}\ P,\ \bar{z},\ p) < f(P,\ z,\ p)$$

per $P \in \mathfrak{R}$, $(z,\ p)$, $(\bar{z},\ p) \in \mathfrak{E}$ e $\bar{z} < z$, allora se $\bar{z} \geq z$ su $\mathfrak{S}$, è $\bar{z} \geq z$ su $\mathfrak{R}$; se è $\bar{z} > z$ su $\mathfrak{S}$, è $\bar{z} >$ su $\mathfrak{R}$.

Sia $\bar{z} - z < 0$ in punti di $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$; sia $P_0 \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ un punto in cui $\bar{z} - z$ raggiunge il minimo. Si ha

$$\bar{z}(P_0) - z(P_0) < 0, \qquad \bar{z}_x(P_0) - z_x(P_0) = 0$$

$$0 \leq \mathfrak{M}^*[\bar{z}(P_0) - z(P_0)] = \mathfrak{M}^*[\bar{z}(P_0)] - \mathfrak{M}^*[z(P_0)] =$$
$$= \bar{f}(P_0,\ \bar{z}(P_0).\ z_x(P_0)) - f(P_0,\ z(P),\ z_x(P_0)) < 0,$$

che è assurdo. Dunque da $\bar{z} \geq z$ su $\mathfrak{S}$ segue $\bar{z} \geq z$ su $\mathfrak{R}$.

Sia $\bar{z} > z$ su $\mathfrak{S}$. Scegliamo un $\varepsilon > 0$ tale che sia anche $\bar{z} - \varepsilon > z$ su $\mathfrak{S}$. Ripetendo il ragionamento precedente con $\bar{z} - \varepsilon$ al posto di $\bar{z}$, si ha $\bar{z} - \varepsilon \geq z$ su $\mathfrak{R}$ e quindi $\bar{z} > z$ su $\mathfrak{R}$.

2. - *Siano $z(P)$, $\bar{z}(P)$ e $\underline{z}(P)$ funzioni regolari in $\mathfrak{R}$ e per $P \in \mathfrak{R}$ sia $(z,\ z_x)$, $(\bar{z},\ \bar{z}_x)$, $(\underline{z},\ \underline{z}_x) \in \mathfrak{E}$. Allora se*

$$\mathfrak{M}^*[\bar{z}] < f(P,\ z,\ \bar{z}_x) \quad \textit{per} \quad \bar{z} < z$$
$$\mathfrak{M}^*[\underline{z}] > f(P,\ z,\ \underline{z}_x) \quad \textit{per} \quad \underline{z} > z$$
$$\mathfrak{M}^*[z] = f(P,\ z,\ z_x),$$

se è $\bar{z} \geq z \geq \underline{z}$ $(\bar{z} > z > \underline{z})$ *su* $\mathfrak{S}$, *è anche* $\bar{z} \geq z \geq \underline{z}$ $(\bar{z} > z > \underline{z})$ *su* $\mathfrak{R}$.

La dimostrazione si consegue con un ragionamento perfettamente analogo al precedente [7]).

3. - *Se* $f(P, z, 0)$ *è funzione crescente di* z *ed è* $f(P, 0, 0) = 0$, *esiste solo lo zero quale soluzione di* $\mathfrak{M}^*[u] = f(P, z, z_x)$ *regolare in* $\mathfrak{R}$ *e nulla su* $\mathfrak{S}$.

Si ha

$$\mathfrak{M}^*[0] = 0 > f(P, z, 0) \quad \text{per} \quad z < 0,$$

$$\mathfrak{M}^*[0] = 0 < f(P, z, 0) \quad \text{per} \quad z > 0,$$

onde l'asserto segue da **2**.

4. - *Se* $f(P, z, p)$ *è definita per* $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < z, p < +\infty$ *ed è*

$$f(P, z, p) \leq f(P, \bar{z}, p) \quad \textit{per} \quad z < \bar{z},$$

allora esiste al più una soluzione del problema (5) *regolare in* $\mathfrak{R}$.

Supponiamo dapprima che sia

$$f(P, z, p) < f(P, \bar{z}, p) \quad \text{per} \quad z < \bar{z}. \tag{6}$$

Supponiamo che il problema (5) abbia due soluzioni $u^{(1)}(P)$ e $u^{(2)}(P)$ regolari in $\mathfrak{R}$; $u^{(1)}(P) - u^{(2)}(P)$ avrà o un massimo positivo o un minimo negativo in $\mathfrak{R}$; sia ad esempio P_0 un punto di $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ ove $u^{(1)}(P) - u^{(2)}(P)$ raggiunge il suo massimo positivo. Si ha allora

$$u^{(1)}(P_0) > u^{(2)}(P_0), \qquad u_x^{(1)}(P_0) = u_x^{(2)}(P_0)$$

onde per la (6)

$$0 \geq \mathfrak{M}^*[u^{(1)}(P_0) - u^{(2)}(P_0)] = f(P_0, u^{(1)}(P_0), u_x^{(1)}(P_0)) - \\ - f(P_0, u^{(2)}(P_0), u_x^{(2)}(P_0)) > 0,$$

da cui l'assurdo.

---

[7]) Per le proposizioni 1 e 2 cfr. anche H. WESTPHAL, *Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen*, Math. Zeit., 51 (1949).

Analogo ragionamento per il minimo.

Supponiamo in secondo luogo che sia

$$f(P, z, p) \leq f(P, \bar{z}, p) \quad \text{per} \quad z < \bar{z}. \tag{7}$$

Sia $\varphi(y)$ una funzione positiva e continua con la derivata prima in $0 \leq y \leq h$. Poniamo

$$u(P) = \varphi(y) w(P);$$

si ha in $\mathcal{R} - \mathcal{S}$

$$\mathcal{M}^*[\varphi w] = \varphi \mathcal{M}^*[w] + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\varphi(y + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) -$$

$$- \varphi(y)](w)_{\mathcal{C}(P, r)} \cos\theta \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta.$$

Ora è

$$\varphi(y + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) - \varphi(y) = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, \varphi'(\bar{y}),$$

essendo $\bar{y}$ un opportuno valore compreso tra y e $y + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$; tenendo conto della continuità di $\varphi'(y)$ e di $w(P)$ il limite precedente è

$$2\sqrt{2}\, \varphi'(y) w(P) \int_0^1 t^2 \sqrt{\lg \frac{1}{t}}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \varphi'(y) w(P);$$

perciò

$$\mathcal{M}^*[w] = \frac{1}{\varphi} (\mathcal{M}^*[w] - \varphi' w) = \frac{1}{\varphi} [f(P, \varphi w, \varphi w_x) - \varphi' w] =$$

$$= g(P, w, w_x).$$

Se è $\varphi > 0$ e $\varphi' < 0$ (al che basta prendere $\varphi = \exp(-y)$), si ha

$$g(P, w, w_x) - g(P, \bar{w}, w_x) =$$

$$= \frac{\varphi'}{\varphi} (\bar{w} - w) + \frac{1}{\varphi} [f(P, \varphi w, \varphi w_x) - f(P, \varphi \bar{w}, \varphi w_x)] < 0$$

per $w < \bar{w}$, essendo per ipotesi $f(P, \varphi w, \varphi w_x) \leq f(P, \varphi \bar{w}, \varphi w_x)$, onde si è ricondotti al caso precedente relativamente al problema

$$\mathfrak{M}^*[w] = g(P,\ w,\ w_x) \quad \text{per} \quad P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$$
$$w = \frac{u_0}{\varphi} \qquad\qquad \text{per} \quad P \in \mathfrak{S}.$$

5. - *Se esiste un numero positivo M tale che per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < z,\ \bar{z},\ p < +\infty$, è*

$$(8) \qquad | f(P,\ z,\ p) - f(P,\ \bar{z},\ p) | \leq M\, | z - \bar{z} |,$$

allora il problema (6) *ha al più una soluzione regolare in $\mathfrak{R}$.*

Posto

$$\varphi = \exp\,(-Ny) \quad \text{con} \quad N > M$$

e

$$u = \varphi w$$

si ha

$$\mathfrak{M}^*[w] = \frac{1}{\varphi}\,[f(P,\ \varphi w,\ \varphi w_x) - \varphi' w] = g(P,\ w,\ w_x)$$

ed è

$$g(P,\ w,\ w_x) - g(P,\ \bar{w},\ w_x) = N(w - \bar{w}) +$$
$$+ \frac{1}{\varphi}\,[f(P,\ \varphi w,\ \varphi w_x) - f(P,\ \varphi\bar{w},\ \varphi w_x)] <$$
$$< N(w - \bar{w}) + M\,| w - \bar{w} | < 0 \quad \text{per} \quad w < \bar{w} \text{ }^{8)}.$$

---

[8]) Cfr. anche il lavoro citato in [7]).

Osserviamo che la condizione (8) di Lipschitz non può essere sostituita con una di Hölder. Ad esempio se

$$f(P,\ z,\ p) = -\pi^2 z - \frac{1}{1-\gamma}\,| z |^{\gamma}\,(\operatorname{sen} \pi x)^{1-\gamma}$$

ove $0 < \gamma < 1$, è soddisfatta una condizione di Hölder d'ordine γ mentre esistono le due soluzioni

$$u^{(1)}(P) = 0, \qquad u^{(2)}(P) = (h - y)^{\frac{1}{1-\gamma}}\, \operatorname{sen} \pi x$$

nulle su $\mathfrak{S}$.

Nell'esempio ora indicato esistono addirittura infinite soluzioni nulle

Consideriamo ora il problema

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}^*[z] = f(P,\ z,\ z_x) & \text{per}\quad P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S} \\ z = 0 & \text{per}\quad P \in \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Poniamo

$$U(Q,\ P) = \begin{cases} (\eta - y)^{-1/2} \exp\left[-\dfrac{(\xi - x)^2}{4(\eta - y)}\right] & \text{per}\quad \eta > y \\ 0 & \text{per}\quad \eta \leq y. \end{cases}$$

Indichiamo con $\mathfrak{R}_y$ la porzione di $\mathfrak{R}$ appartenente al semipiano $\eta \geq y$.

Se $\varphi(P)$ è una funzione definita in $\mathfrak{R}$ e sommabile insieme a $|\varphi(P)|^\alpha$, essendo α una costante $> 3/2$, la funzione

$$u(P) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_y} U(Q,\ P)\varphi(Q)dQ$$

verifica in ogni punto P di continuità della $\varphi(Q)$ la relazione

$$(10)\qquad \mathfrak{M}^*[u(P)] = \varphi(P)\ ^{9)}.$$

Sia $G(Q,\ P)$ la funzione di Green, data com'è ben noto, da

$$(11)\qquad G(Q,\ P) = \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left(\exp\left[-\frac{(\xi - x + 2n)^2}{4(\eta - y)}\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-\frac{(\xi + x + 2n)^2}{4(\eta - y)}\right]\right).$$

---

su $\mathfrak{S}$. Tali sono infatti le funzioni

$$u(P) = \begin{cases} (c - y)^{\frac{1}{1-\gamma}} \operatorname{sen} \pi x & \text{per}\quad 0 \leq y \leq c \\ 0 & \text{per}\quad c \leq y \leq h, \end{cases}$$

con c un arbitrario numero compreso tra 0 ed h. Questo fatto si verifica, com'è ovvio, certamente tutte le volte che l'equazione $\mathfrak{M}^*[u] = f(P,\ u,\ u_x)$ ha una soluzione non identicamente nulla regolare in $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ e nulla su $\mathfrak{S}$ ed è $f(P,\ 0,\ 0) = 0$.

Osserviamo anche che la proposizione **5** non ha un corrispondente nel caso ellittico se non si fà alcuna restrizione sulla costante M; cfr. l. c. in [1]), p. 163 e p. 174.

[9]) Cfr. l. c. in [4]).

È $G > 0$ per $0 < \xi < 1$, $y < \eta \leq h$, e. in $\mathfrak{R}_y$,

$$G(Q, P) \leq U(Q, P). \tag{12}$$

Tenendo poi presente che i termini della serie in (11) corrispondenti a $n \neq 0$ sono continui in $\mathfrak{R}_y$ e convergenti esponenzialmente a zero per $\eta \to y + 0$ insieme alle loro derivate e che, detta t una variabile positiva, esistono due costanti positive C e c, di cui la seconda $< 1/4$, tali che

$$t \exp\left(-\frac{t}{4}\right) < C \exp(-ct^2),$$

si ha, per due opportune costanti positive C e c $(C > 1,\ c < 1/4)$

$$| G_x(Q, P) | \leq \frac{C}{\eta - y} \exp\left[- c \frac{(\xi - x)^2}{\eta - y}\right]. \tag{13}$$

Ora, per la (10), si è indotti a tradurre il problema (9) nell'equazione integro-differenziale

$$z(P) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_y} G(Q, P) f(Q, z(Q), z_x(Q)) dQ. \tag{14}$$

Posto

$$V_s(Q, P) = \frac{1}{(\eta - y)^s} \exp\left[- c \frac{(\xi - x)^2}{\eta - y}\right]$$

e indicando con β una costante tale che $1 < \beta < 3/2$, poniamo

$$\varphi(P) = \left(\iint_{\mathfrak{R}_y} [V_{1/2}(Q, P)]^\beta dQ \right)^{1/\beta} \tag{15}$$

$$\psi(P) = \left(\iint_{\mathfrak{R}_y} [V_1(Q, P)]^\beta dQ \right)^{1/\beta}. \tag{16}$$

$\varphi(P)$ e $\psi(P)$ sono continue in $\mathfrak{R}$.

Sia $\mathfrak{E}_0$ l'insieme delle coppie (z, z_x) per cui

$$| z | \leq K\varphi, \qquad | z_x | \leq K\psi, \tag{17}$$

essendo K una costante positiva. Supponiamo che sia $\mathfrak{E}_0 \subseteq \mathfrak{E}$. Se $f(P, z, p)$ è continua in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{E}$, poichè $\mathfrak{R} \times \mathfrak{E}_0$ è chiuso, esiste una costante positiva M tale che

$$|f(P,\ z,\ z_x)| \leq M \quad \text{in} \quad \mathfrak{R} \times \mathfrak{E}_0 .$$

Diremo che la funzione $f(P, z, p)$ continua in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{E}$ verifica la condizione (A) in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{E}$ se è $\mathfrak{E}_0 \subseteq \mathfrak{E}$ e

$$\frac{CMh^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{2\sqrt{\pi}} \leq K.$$

6. - *Se $f(P, z, p)$ è continua e verifica la condizione (A) in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{E}$, allora il problema* (9) *ha almeno una soluzione $z(P)$ regolare in $\mathfrak{R}$ verificante le* (17).

La trasformazione

$$z'(P) = \mathfrak{T}[z(P)] = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{R}_y} G(Q,\ P) f(Q,\ z(Q),\ z_x(Q)) dQ$$

trasforma l'insieme $\mathfrak{E}_0$ in un insieme $\mathfrak{E}_0'$ contenuto in $\mathfrak{E}_0$ perchè, come subito si verifica,

$$|z'| \leq \frac{CMh^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{2\sqrt{\pi}} \varphi \leq K\varphi, \qquad |z_x'| \leq \frac{CMh^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{2\sqrt{\pi}} \psi \leq K\psi .$$

Essendo le $\varphi(P)$ e $\psi(P)$ limitate, le z' e z_x' sono funzioni egualmente limitate in $\mathfrak{R}$; esse sono inoltre egualmente continue. Proviamo quest'ultima affermazione relativamente alle z_x'. Si ha, per un $\delta > 0$ tale che $y < y_0 + \delta \leq h$,

$$|z_x'(P) - z_x'(P_0)| \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{R}_{y_0+\delta}} |G_x(Q,\ P) - G_x(Q,\ P_0)|\, dQ +$$
$$+ \frac{CM}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{R}_y - \mathfrak{R}_{y_0+\delta}} V_1(Q,\ P) dQ + \frac{CM}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{R}_{y_0} - \mathfrak{R}_{y_0+\delta}} V_1(Q,\ P_0) dQ.$$

Fissato δ il primo integrale converge a zero per $P \to P_0$; il secondo e il terzo sono maggiorati rispettivamente da

$$2\left[\frac{\pi(y_0 + \delta - y)}{c}\right]^{1/2}, \qquad 2\left(\frac{\pi\delta}{c}\right)^{1/2}.$$

Ora $\mathcal{E}_0$ non è vuoto (infatti $(0, 0) \in \mathcal{E}_0$); se λ e μ sono due costanti non negative tali che $\lambda + \mu = 1$ e (u, u_x), $(v, v_x) \in \mathcal{E}_0$ anche $(\lambda u + \mu v, \lambda u_x + \mu v_x) \in \mathcal{E}_0$; da $\mathcal{E}_0$ si può estrarre una successione $\{z^{(n)}, z_x^{(n)}\}$ convergente uniformemente in $\mathfrak{R}$; se $z = \lim_{n \to \infty} z^{(n)}$, si ha $z_x = \lim_{n \to \infty} z_x^{(n)}$ e $(z, z_x) \in \mathcal{E}_0$; le funzioni z' e z_x', $(z', z_x') \in \mathcal{E}_0'$, costituiscono famiglie di funzioni egualmente continue ed egualmente limitate; se $z^{(n)'}$, z' sono i trasformati mediante $\mathfrak{T}$ di $z^{(n)}$, z, allora z' e z_x' sono i limiti di $\{z^{(n)'}\}$ e $\{z_x^{(n)'}\}$. Quindi per un teorema di Satō[10]) la (14) ha almeno una soluzione, che è poi soluzione di (9).

Siano ora $\underline{\omega}(P)$ e $\bar{\omega}(P)$ due funzioni regolari in $\mathfrak{R}$ e tali che

$$\underline{\omega}(P) \leq 0 \leq \bar{\omega}(P) \quad \text{per} \quad P \in \mathfrak{S}$$
$$\underline{\omega}(P) < \bar{\omega}(P) \quad \text{per} \quad P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}.$$

Indichiamo con $\mathcal{T}$ l'insieme (P, z, p) tale che $P \in \mathfrak{R}$, $\underline{\omega} \leq z \leq \bar{\omega}$, $-\infty < p < +\infty$.

7. - *Sia $f(P, z, p)$ una funzione continua verificante la condizione (A) in $\mathcal{T}$; se è*

$$\mathfrak{M}^*[\underline{\omega}] > f(P, \underline{\omega}, \underline{\omega}_x) \tag{18}$$

$$\mathfrak{M}^*[\bar{\omega}] < f(P, \bar{\omega}, \bar{\omega}_x) \tag{19}$$

in $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$, allora il problema (9) *ha almeno una soluzione $z(P)$ regolare in $\mathfrak{R}$ tale che*

$$\underline{\omega} \leq z \leq \bar{\omega} \quad \text{in} \quad R. \tag{20}$$

Poniamo

$$F(P, z, p) = f(P, z', p)$$

ove

$$z' = \begin{cases} \underline{\omega} & \text{se} \quad z < \underline{\omega} \\ z & \text{se} \quad \underline{\omega} \leq z \leq \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & \text{se} \quad \bar{\omega} < z. \end{cases}$$

---

10) T. SATŌ, *Fikspunkta teoremo en funkciala spaco*, Mem. Fac. Sci. Kyusyu, Ser. A., 5 (1950).

Si ha allora

$$\mathfrak{M}^*[\underline{\omega}] > F(P, z, \underline{\omega}_x) \quad \text{per} \quad z < \underline{\omega} \tag{21}$$

$$\mathfrak{M}^*[\bar{\omega}] < F(P, z, \bar{\omega}_x) \quad \text{per} \quad z > \bar{\omega}. \tag{22}$$

La funzione $F(P, z, p)$ verifica la condizione (A) per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < z,\ p < +\infty$, onde l'equazione

$$\mathfrak{M}^*[z] = F(P, z, z_x)$$

ha almeno una soluzione regolare in $\mathfrak{R}$ e nulla su $\mathfrak{S}$. Per **2** si ha poi, in base a (21) e (22), la (20). Perciò $z(P)$ è soluzione regolare in $\mathfrak{R}$ di (9) verificante la (20).

8. - *Se $f(P, z, p)$ è continua e limitata in $\mathfrak{T}$ e valgono le* (18) *e* (19), *allora sussiste la tesi del teorema precedente.*

Infatti $F(P, z, p)$ verifica ovviamente la condizione (A).

9. - *Se $f(P, z, p)$ è continua per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < z,\ p < +\infty$, se $f(P, 0, p)$ è limitata per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < p < +\infty$, e se $f(P, z, p)$ verifica una condizione di Hölder rispetto a z*

$$| f(P, z, p) - f(P, z', p) | < H \, | z - z' |^{\lambda} \tag{23}$$

con H e λ due costanti positive di cui la seconda < 1, allora il problema (9) *ha almeno una soluzione regolare in $\mathfrak{R}$.*

Dalla (23) e dall'ipotesi che $f(P, 0, p)$ sia limitata, segue

$$| f(P, z, p) | < N + H \, | z |^{\lambda} \tag{24}$$

per una certa costante positiva N. Poniamo

$$-\underline{\omega}(P) = A \cos \alpha x = \bar{\omega}(P)$$

con A e α due costanti positive tali che

$$\frac{1}{2} \alpha^2 A > N + H A^{\lambda}. \qquad 0 < \alpha \leq \pi/3.$$

Ne segue che

$$\underline{\omega} < 0 < \bar{\omega}$$

$$\mathfrak{M}^*[\underline{\omega}] = \alpha^2 A \cos \alpha x \geq \frac{1}{2} \alpha^2 A > N + H A^{\lambda} \geq f(P, \underline{\omega}, \underline{\omega}_x)$$

$$\mathfrak{M}^*[\bar{\omega}] = -\alpha^2 A \cos \alpha x \leq -\frac{1}{2} \alpha^2 A < -N - H A^{\lambda} \leq f(P, \bar{\omega}, \bar{\omega}_x).$$

Sono perciò soddisfatte le (18) e (19) e, a causa della (24), $f(P, z, p)$ è limitata in $\mathcal{T}$. Pertanto la proposizione **9** è conseguenza della **8**.

10. - *Se $f(P, z, p)$ verifica le ipotesi del teorema* **9** *e, di più, è funzione non decrescente di z, allora il problema* (9) *ammette la più grande e la più piccola soluzione regolari in $\mathfrak{R}$.*

Proviamo l'esistenza della più grande soluzione (in modo analogo si procede per la più piccola soluzione).

Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione decrescente a zero. L'equazione

$$\mathcal{M}^*[z] = f(P, z, z_x) - \varepsilon_n$$

ammette almeno una soluzione regolare in $\mathfrak{R}$ e nulla su $\mathfrak{S}$, sia $z^{(n)}(P)$. Sia $z(P)$ una soluzione di (9). Per l'ipotesi è

$$f(P, z', p) - \varepsilon_n < f(P, z, p) \quad \text{per} \quad z' < z;$$

ne segue per **1** che

$$z^{(n)} \geq z \quad \text{in} \quad \mathfrak{R}.$$

In modo analogo si prova che

$$z^{(n)} \geq z^{(n+1)} \quad \text{in} \quad \mathfrak{R}.$$

Sia $\lim\limits_{n \to \infty} z^{(n)}(P) = \bar{z}(P)$. Le funzioni $z^{(n)}(P)$ e $z_x^{(n)}(P)$ sono egualmente limitate ed egualmente continue in $\mathfrak{R}$; da $\{z^{(n)}(P)\}$ si può estrarre una successione, che per semplicità supponiamo sia quella stessa da cui si parte, uniformemente convergente insieme a $\{z_x^{(n)}(P)\}$; il suo limite, cioè $\bar{z}(P)$, è soluzione regolare in $\mathfrak{R}$ del problema (9) ed è

$$\bar{z} \geq z.$$

Dunque $\bar{z}(P)$ è la più grande soluzione di (9).