Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Letizia Dal Soglio

Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di n-celle

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 103-121

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__103_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

GRADO TOPOLOGICO E TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI PER TRASFORMAZIONI PLURIVALENTI DI n-CELLE

Memoria (*) *di* LETIZIA DAL SOGLIO (*a Padova*)

In questa Memoria estendo al caso n-dimensionale i risultati conseguiti ed esposti in un mio precedente lavoro per il caso 3-dimensionale [1]). Precisamente introduco la nozione di grado topologico (n. 5) per trasformazioni plurivalenti di un sottoinsieme E dello spazio numerico euclideo $\mathcal{E}^{(n)}$, e deduco poi, dalle proprietà di tale grado, alcuni criteri di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di n-celle.

La nozione attuale di grado topologico si riesce ad introdurre, come avveniva del resto nel caso 3-dimensionale, solo per trasformazioni che soddisfino ad opportune ipotesi (n. 2); è da rilevare tuttavia che tali ipotesi si riducono, quando $n = 3$, a quelle già date nel caso 3-dimensionale.

1. - In questo numero intendo precisare il significato di notazioni e simboli usati nel presente lavoro e dare alcune definizioni utili per il seguito.

Lo spazio ambiente è lo spazio euclideo n-dimensionale $\mathcal{E}^{(n)}$ che suppongo orientato.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 marzo 1957.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1) L. DAL SOGLIO, *Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di 3-celle.* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Univ. di Padova (1956), pp. 386-405].

Inoltre mi riferisco sempre alla teoria dell'omologia singolare di Eilenberg; pertanto considero catene singolari intere del complesso singolare totale $S(\mathcal{E}^{(n)})$ [2]).

Col simbolo $|U|$ indico il supporto della catena U, vale a dire l'insieme dei punti dei simplessi che compaiono in U con coefficiente non nullo.

Il simbolo $\boldsymbol{k}(U)$ rappresenta invece il sostegno simpliciale (o semplicemente sostegno) di U, cioè il complesso chiuso [3]) costituito dai simplessi che compaiono in U con coefficiente non nullo e da tutte le loro faccie.

Con K indico generalmente un sottocomplesso chiuso di $S(\mathcal{E}^{(n)})$, mentre un simplesso singolare j-dimensionale generico viene indicato con σ^j.

Farò uso inoltre dei coefficienti di incidenza $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$, rappresentando $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$, il coefficiente con cui σ^{j-1} compare nel contorno di σ^j.

DEF. I^a - Dato un complesso K ed un punto $x \in \mathcal{E}^{(n)}$, dicesi stella di centro x relativa a K, $St(x, K)$, l'insieme unione dei supporti dei simplessi σ^j di K per cui $x \in |\sigma^j|$ [4]).

DEF. II^a - Un insieme A di $\mathcal{E}^{(n)}$ dicesi pluriconvesso quando è unione di un numero finito di insiemi chiusi, limitati e convessi, a due a due disgiunti.

OSS. I^a - L'intersezione di due insiemi pluriconvessi è ancora un insieme pluriconvesso.

Infatti se $A = \bigcup\limits_i A_i$ e $B = \bigcup\limits_k B_k$ (con A_i, B_k insiemi chiusi limitati e convessi ecc.) $A \cup B = \bigcup\limits_{ik} A_i \cap B_k$ dove gli $A_i \cap B_k$ se non sono vuoti, sono insiemi chiusi limitati e convessi, in numero finito e a due a due disgiunti.

---

2) Cfr. S. EILENBERG, *Singular Homology Theory*. [Annals of Math. 1944, Princeton University].

3) Un complesso K dicesi chiuso se contiene tutte le faccie di ogni suo simplesso.

4) Si noti che, se K è finito, vi è un numero finito di stelle distinte e che inoltre, per ogni punto $x \in \mathcal{E}^{(n)}$, $St(x, K)$ è un continuo.

Oss. II^a - Dal teorema di dualità di Alexander discende che il complementare di un insieme pluriconvesso è un insieme connesso ed aciclico nelle dimensioni 1, 2, ... $n-2$.

Se A è un insieme chiuso e limitato di $\mathcal{E}^{(n)}$ potremo considerare l'*involucro convesso* di A, cioè il più piccolo insieme chiuso e convesso contenente A. *L'involucro convesso* di A sarà indicato con *inv* $\{A\}$.

2. - Nel seguito sarà presa in considerazione una trasformazione $\mathfrak{T}$, definita in un sottoinsieme $E \subset \mathcal{E}^{(n)}$ per cui siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

I. - L'immagine $\mathfrak{T}(P)$ di P sia per ogni $P \in E$ un sottoinsieme compatto di $\mathcal{E}^{(n)}$.

II. - $\mathfrak{T}$ sia superiormente semicontinua in tutto E (vale a dire per ogni $P_0 \in E$, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ sia possibile determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui si abbia $\mathfrak{T}(P) \subset [\mathfrak{T}(P_0)]_\varepsilon$ per ogni $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ [5]). Inoltre indicando con E_0 l'insieme dei punti $P \in E$ per cui $P \in \mathfrak{T}(P)$ si abbia che:

III. - L'immagine $\mathfrak{T}(P)$ di P sia, per ogni $P \in E - E_0$, rinchiudibile in un insieme pluriconvesso non contenente P.

Se $P \in E$ chiameremo *pezzo* di $\mathfrak{T}(P)$ un sottoinsieme τ di $\mathfrak{T}(P)$ che risulti contemporaneamente aperto e chiuso rispetto a $\mathfrak{T}(P)$ potendo τ in particolare coincidere con l'insieme vuoto o con $\mathfrak{T}(P)$. Si fa allora l'ulteriore ipotesi:

IV. - Per ogni $P \in E$ sia assegnata una funzione $F_P(\tau)$ dei *pezzi* τ di $\mathfrak{T}(P)$, a valori in un gruppo additivo $\mathfrak{G}$, additiva, tale cioè che se τ' e τ'' sono due *pezzi* disgiunti di $\mathfrak{T}(P)$ risulti $F_P(\tau' + \tau'') = F_P(\tau') + F_P(\tau'')$.

Si osservi che, se A è un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(n)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathfrak{T}(P_0)$ $(P_0 \in E)$ l'insieme $A \cdot \mathfrak{T}(P_0)$ è un *pezzo* τ di $\mathfrak{T}(P_0)$. Inoltre, se ε è un numero positivo minore della distanza tra $\mathfrak{T}(P_0)$ e la frontiera di A, esiste, per

---

[5]) Se A è un insieme di punti di $\mathcal{E}^{(n)}$, col simbolo $[A]_\varepsilon$ (ε essendo un numero positivo) si indica l'ε-intorno aperto di A, ossia l'insieme dei punti di $\mathcal{E}^{(n)}$ che distano da A per meno di ε.

l'ipotesi II, un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ $\mathcal{T}(P) \subset [\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon$.
Quindi, se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$, $A \cdot \mathcal{T}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$ ed ha senso considerare la funzione $F_P[A \cdot \mathcal{T}(P)]$.

Si supporrà allora che:

V. - Se $P_0 \in E$ ed A è un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(n)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{T}(P_0)$, si possa determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ sia:

$$F_P[A \cdot \mathcal{T}(P)] = F_{P_0}[A \cdot \mathcal{T}(P_0)].$$

Oss. III^a - Una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$ di E che faccia corrispondere ad ogni punto $P \in E$ un numero finito di punti soddisfa alle ipotesi I e III.

3. - Consideriamo un punto $P \in E$ ed un ciclo n-1-dimensionale Γ il cui supporto appartenga ad $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(P)$.

L'insieme $\mathcal{E}^{(n)} - |\Gamma|$ è costituito da un numero finito od al più da una infinità numerabile di insiemi aperti connessi, a due a due disgiunti, A_k. Per ogni k l'insieme $\tau_k = A_k \cdot \mathcal{T}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$. I *pezzi* τ_k non vuoti sono in numero finito: infatti gli insiemi τ_k costituiscono un ricoprimento aperto (relativamente a $\mathcal{T}(P)$) di $\mathcal{T}(P)$; poichè $\mathcal{T}(P)$ è un compatto tale ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito $\{\tau_{k_1}\ \tau_{k_2}\ \ldots\ \tau_{k_n}\}$; ma allora, essendo i *pezzi* τ_k a due a due disgiunti, debbono essere necessariamente vuoti tutti i rimanenti τ_k.

Inoltre l'ordine [6]) di un punto $Q \in \tau_k$ rispetto al ciclo Γ non varia al variare di Q in τ_k, in quanto $\tau_k \subset A_k$ ed A_k è un componente connesso di $\mathcal{E}^{(n)} - |\Gamma|$. Indicando questo ordine con ν_k si pone:

$$\omega(P, \Gamma) = \Sigma \nu_k F_P(\tau_k) \tag{1}$$

la somma essendo estesa a tutti i *pezzi* τ_k non vuoti.

---

[6]) Cfr. P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*. Berlin, 1935, pp. 419-423, 458 e segg.

LEMMA I. - *Il numero $\omega(P, \Gamma)$ non varia al variare di P in un continuo $I \subset E$ la cui immagine $\mathcal{T}(I)$ non abbia punti comuni con $|\Gamma|$.*

Infatti se $P_0 \in I$ e se $\tau_k^0 = A_k \cdot \mathcal{T}(P_0)$, è possibile per la proprietà V del n. 2 determinare un numero $\rho > 0$, per cui risulti:

$$F_P[A_k \cdot \mathcal{T}(P)] = F_{P_0}[A_k \cdot \mathcal{T}(P_0)] \qquad \text{se} \qquad P \in [P_0]_\rho \cdot I.$$

Pertanto se $P \in [P_0]_\rho \cdot I$ si ha:

$$\omega(P, \Gamma) = \sum_k \nu_k F_P(\tau_k) = \sum_k \nu_k F_{P_0}(\tau_k^0)$$

dove ν_k è l'ordine di un qualsiasi punto $Q \in A_k$ rispetto al ciclo Γ. Ad ogni punto $P_0 \in I$ è possibile quindi associare un ρ-intorno $[P_0]_\rho$ tale che, variando P in $[P_0]_\rho \cdot I$, il numero $\omega(P, \Gamma)$ rimane costante. Ma essendo I un continuo $\omega(P, \Gamma)$ risulterà costante in tutto I come risulta dal teorema di ricoprimento di Pincherle - Borel.

Oss. IV. - Nelle ipotesi del lemma precedente si può attribuire significato al simbolo $\omega(I, \Gamma)$ mediante la posizione:

$$\omega(I, \Gamma) = \omega(P, \Gamma) \qquad \text{con} \qquad P \in I.$$

Possiamo inoltre affermare, e la dimostrazione è identica a quella data per $n = 3$ [7]), che:

Se Γ, Γ' e Γ'' sono tre cicli n-1-dimensionali di $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(P_0)$ e se $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ allora

(2) $$\omega(P_0, \Gamma) = \omega(P_0, \Gamma') + \omega(P_0 \Gamma'').$$

Più in generale se $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ sono cicli n-1-dimensionali di $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(P_0)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ interi relativi si ha:

(3) $$\omega(P_0, \lambda_1\Gamma_1 + \ldots + \lambda_r\Gamma_r) = \lambda_1\omega(P_0, \Gamma_1) + \ldots + \lambda_r\omega(P_0, \Gamma_r).$$

---

7) V. loc. cit. in (1) pag. 391.

4. DEF. III. - Sia K un sottocomplesso del complesso singolare totale $S(E)$; una *stella* di K, $St(x, K)$, dicesi *normale* quando la sua immagine $\mathcal{T}(St(x, K))$ è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso disgiunto da $St(x, K)$.

DEF. IV. - Un complesso $K \subset S(E)$ dicesi *normale* se è finito e se ogni sua stella è *normale*.

LEMMA II. - *Se K è un sottocomplesso finito del complesso singolare totale $S(E - E_0)$, esiste una suddivisione baricentrica di K che è un complesso normale.*

Siano $K = {}^0K, {}^1K, {}^2K, \dots, {}^rK, \dots$ i complessi che si ottengono mediante successive suddivisioni baricentriche di K. Indichiamo con $\mathcal{G}_r$ l'insieme somma delle stelle *non normali* di ${}^rK$; $\mathcal{G}_r$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathcal{E}^{(n)}$ (cfr. (4) pag. 104).

Supponiamo che per ogni r sia $\mathcal{G}_r \neq 0$, possiamo allora considerare la successione di insiemi chiusi, limitati e non vuoti di $\mathcal{E}^{(n)}$:

$$\mathcal{G}_0 , \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 , \dots$$

Tale successione risulta monotona decrescente, vale a dire $\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \dots$, poichè se $St(x, {}^{r+1}K)$ non è *normale* non lo è neppure $St(x, {}^rK)$ essendo $St(x, {}^{r+1}K) \subset St(x, {}^rK)$. Pertanto, in base al teorema di Cantor, esiste almeno un punto P_0 comune a tutti gli insiemi $\mathcal{G}_r$. Per l'ipotesi III del n. 2 $\mathcal{T}(P_0)$ è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso R non contenente P_0. Sia ε un numero positivo minore della distanza di P_0 da R e della più piccola fra le mutue distanze degli insiemi convessi costituenti R. Per l'ipotesi II del n. 2 si può determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$ $(\rho < \frac{\varepsilon}{3})$, tale che $\mathcal{T}([P_0]_\rho \cdot E)$ sia contenuto in $[\mathcal{T}(P_0)]_{\frac{\varepsilon}{3}}$ e quindi, a maggior ragione in $[R]_{\frac{\varepsilon}{3}}$.

La chiusura dell'insieme $[R]_{\frac{\varepsilon}{3}}$ risulta pertanto, in base alla particolare scelta di ε e di ρ, un insieme pluriconvesso che rinchiude $\mathcal{T}([P_0]_\rho \cdot E)$ e che non ha punti comuni con $[P_0]_\rho$. Si osservi ora che, se δ_r è il massimo diametro delle stelle di ${}^rK$ si ha $\lim_{r \to \infty} \delta_r = 0$, quindi per r abbastanza grande le stelle di ${}^rK$ non *normali* contenenti P_0 sono interamente contenute in $[P_0]_\rho \cdot E$. Ma allora tali stelle risulterebbero normali. Dovrà essere dunque $\mathcal{G}_r = 0$ per r abbastanza grande, e per tali r, ${}^rK$ sarà *normale.*

5. - Consideriamo un n-1-ciclo Ξ *normale*, vale a dire un n-1-ciclo di un complesso normale K. Il ciclo Ξ ammette una rappresentazione del tipo:

$$\Xi = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})\sigma^{n-1}$$

dove i numeri $\lambda(\sigma^{n-1})$, $(\sigma^{n-1} \in K)$ sono interi relativi soddisfacenti alla:

$$\sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})[\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] = 0. \tag{4}$$

Sia x^0 un punto $(= 0$ — simplesso) appartenente al complementare di *inv.* $\{\mathcal{T}(|K|\}$, (*inv.* $=$ *involucro convesso*). Si fissi, per ogni stella di K del tipo $St(\sigma^0, K)$, un sottoinsieme pluriconvesso di *inv.* $\{\mathcal{T}(|K|\}$, $R(\sigma^0)$, che contenga $\mathcal{T}(St(\sigma^0, K))$ e che sia disgiunto da $St(\sigma^0, K)$.

L'oss. II del n. 1 ci assicura che, se σ^0 è un simplesso di K ed $R(\sigma^0)$ l'insieme pluriconvesso ad esso associato, esiste una 1-catena $C^1(\sigma^0)$ appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - R(\sigma^0)$ e tale che:

$$\dot{C}^1(\sigma^0) = \sigma^0 - x^0. \tag{5}$$

Fissato un sistema di 1-catene siffatte, $\{C^1(\sigma^0)\}$, da associarsi agli 0-simplessi di K, si potrà associare ad ogni $\sigma^r \in K$ (per $r = 1, 2, \dots, n-2$) una $r+1$-catena $C^{r+1}(\sigma^r)$, appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0)$ e tale che soddisfi alla relazione ricorrente:

$$\dot{C}^{r+1}(\sigma^r) = \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1}) \text{ [8]}. \tag{5_1}$$

---

[8]) Qui e nel seguito, ove non vi sia pericolo di ambiguità la somma $\sum_{\sigma^i}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ si intende estesa a tutti i $\sigma^i \varepsilon K$.

Infatti, ammesso che $C^r(\sigma^{r-1})$ appartenga ad $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^{r-1})} R(\sigma^0)$, si ha:

$$|\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^r).$$

Inoltre $\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})$ è, come discende facilmente dalle 5), 5_1) [9]), un r — ciclo di $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0)$, omologo quindi a zero in $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0)$ per $r = 1, \ldots, n-2$ (Cfr. Oss. Iª e IIª del n. 1).

Si consideri ora per ogni $\sigma^{n-1} \in K$ l'n-1-ciclo:

$$\Gamma(\sigma^{n-1}) = \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2}) \text{ [10]}).$$

---

[9]) Infatti la frontiera di $\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})$, per $r > 1$, è data da:

$$\sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sigma^{r-1} - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sigma^{r-1} +$$

$$+ \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sum_{\sigma^{r-2}} [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] C^{r-1}(\sigma^{r-2}) =$$

$$= \sum_{\sigma^{r-2}} C^{r-1}(\sigma^{r-2}) \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] = 0$$

per note proprietà dei coefficienti di incidenza.

Per $r = 1$ si ha:

$$\dot{\sigma}^1 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \dot{C}^1(\sigma^0) = \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \sigma^0 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \sigma^0 + x^0 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] =$$

$$= x^0 \sum [\sigma^1 : \sigma^0] = 0.$$

[10]) $\Gamma(\sigma^{n-1})$ è un ciclo, si ha infatti:

$$\dot{\Gamma}(\sigma^{n-1}) = \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sigma^{n-2} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sigma^{n-2} +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C^{n-2}(\sigma^{n-3}) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-3}} C^{n-2}(\sigma^{n-3}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] = 0.$$

Si osservi che $|\Gamma(\sigma^{n-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^{n-1})} R(\sigma^0)$ e che $\bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^{n-1})} R(\sigma^0) \supset \mathcal{T}(|\sigma^{n-1}|)$; pertanto è lecito considerare per ogni $\sigma^{n-1} \in K$, $\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1}))$.

Oss. V. - Se $[\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \neq 0$ allora

$$\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) = \omega(|\sigma^{n-2}|, \Gamma(\sigma^{n-1}))$$

essendo

$$|\sigma^{n-2}| \subset |\sigma^{n-1}|.$$

Prendiamo ora in esame la seguente somma:

$$\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) = \tag{6}$$

$$= \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})).$$

Si dimostra che $\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\})$ dipende esclusivamente dal ciclo Ξ. Si potrà scrivere pertanto:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})\,\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1}))$$

e chiamare $\Omega(\Xi)$, *grado della trasformazione* $\mathcal{T}$ *relativo al ciclo normale* Ξ.

Per giungere alla conclusione voluta proviamo intanto che $\Omega(\Xi)$ non dipende dal punto x^0, dal sistema di insiemi $\{R(\sigma^0)\}$, nè dai particolari sistemi di catene $\{C^{r+1}(\sigma^r)\}$ associate ai simplessi $\sigma^r \in K$, $(r = 0, 1, \ldots, n-2)$.

Siano $\{R'(\sigma^0)\}$, $\{C'^1(\sigma^0)\}$, ..., $\{C'^{n-1}(\sigma^{n-2})\}$, degli altri sistemi di insiemi e di catene associati ai simplessi di K e sia:

$$R'(\sigma^0) \subset \mathit{inv.}\ \{\mathcal{T}(|K|)\}$$

$$|C'^1(\sigma^0)| \subset \mathcal{E}^{(n)} - R'(\sigma^0)$$

$$\dot{C}'^1(\sigma^0) = \sigma^0 - x'^0 \qquad (x'^0 \in \mathcal{E}^{(n)} - \mathit{inv.}\ \{\mathcal{T}(|K|)\})$$

$$|\, C'^{r+1}(\sigma^r) \,| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^r)} R'(\sigma^0)$$

$$\dot{C}'^{r+1}(\sigma^r) = \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, C'^r(\sigma^{r-1}) \qquad (r = 1, 2, \dots, n-2).$$

Poichè x^0 ed x'^0 appartengono entrambi ad $\mathcal{E}^{(n)} - inv. \{\mathfrak{T}(|K|)\}$, e questo insieme è connesso, (Oss. II, n. 1)), potremo trovare una 1-catena C^1 di $\mathcal{E}^{(n)} - inv. \{\mathfrak{T}(|K|)\}$ la cui frontiera sia:

$$\dot{C}^1 = x'^0 - x^0.$$

La catena $C'^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0) + C^1$, $(\sigma^0 \in K)$, è allora un 1-ciclo di $\mathcal{E}^{(n)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, quindi, sempre per l'Oss. II del n. 1, è possibile determinare, per ogni $\sigma^0 \in K$, una 2-catena di $\mathcal{E}^{(n)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, $U^2(\sigma^0)$, tale che:

$$\dot{U}^2(\sigma^0) = C'^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0) + C^1. \tag{7}$$

Fissato un sistema di 2-catene siffatte, $\{U^2(\sigma^0)\}$, potremo trovare per ogni $\sigma^r \in K$, (e per $r = 1, 2, \dots, n-3$) una $r+2$-catena $U^{r+2}(\sigma^r)$, appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ e che soddisfi alla relazione ricorrente:

$$\dot{U}^{r+2}(\sigma^r) = C'^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, U^{r+1}(\sigma^{r-1}). \tag{7$_1$}$$

Infatti se $|\, U^{r+1}(\sigma^{r-1}) \,| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^{r-1})} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ allora è anche:

$$|\, C'^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, U^{r+1}(\sigma^{r-1}) \,| \subset$$

$$\subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0).$$

Inoltre si riconosce facilmente in base alle (7), (7$_1$) che:

$$C'^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, U^{r+1}(\sigma^{r-1})$$

è un $r+1$-ciclo [11]) di $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, omologo quindi a zero in $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ per $r = 1, 2, \dots, n-3$ (cfr. Oss. II del n. 1).

Ora se $\Gamma'(\sigma^{n-1})$ è l'$n-1$-ciclo associato al simplesso $\sigma^{n-1} \in K$, in relazione ai sistemi di catene $\{C'^{r+1}(\sigma^r)\}$ $(r = 0, \dots, n-2)$ si ha:

$$\Gamma'(\sigma^{n-1}) = \Gamma(\sigma^{n-1}) - \tag{8}$$
$$- \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2})).$$

Osservando che, per note proprietà dei coefficienti di incidenza,

$$\sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})$$

è la $n-1$-catena nulla dalla (8) si ottiene la:

$$\Gamma'(\sigma^{n-1}) = \Gamma(\sigma^{n-1}) - \tag{9}$$

---

11) Infatti per $r > 1$ si ha:

$$\dot{C}'^{r+1}(\sigma^r) - \dot{C}^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \dot{U}^{r+1}(\sigma^{r-1}) =$$
$$= \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C'^r(\sigma^{r-1}) - \sigma^r + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1}) +$$
$$+ \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] (C'^r(\sigma^{r-1}) - C^r(\sigma^{r-1})) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sum_{\sigma^{r-2}} [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] U^r(\sigma^{r-2}) =$$
$$= \sum_{\sigma^{r-2}} U^r(\sigma^{r-2}) \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}][\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] = 0.$$

Per $r = 1$ si ha:

$$\dot{C}'^2(\sigma^1) - \dot{C}^2(\sigma^1) + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \dot{U}^2(\sigma^0) =$$
$$= \sigma^1 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C'^1(\sigma^0) - \sigma^1 + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C^1(\sigma^0) + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] (C'^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0)) +$$
$$+ \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C^1 = C^1 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] = 0.$$

$$- \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})).$$

Di qui per la (3) del n. 4 si ha:

$$\omega(|\sigma^{n-1}|,\ \Gamma'(\sigma^{n-1})) = \omega(|\sigma^{n-1}|,\ \Gamma(\sigma^{n-1})) -$$

$$- \omega(|\sigma^{n-1}|,\ \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3}))).$$

e quindi:

$$\Omega(\Xi,\ K,\ x'^0,\ \{R'(\sigma^0)\},\ \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \tag{10}$$

$$= \Omega(\Xi,\ K,\ x^0,\ \{R(\sigma^0)\},\ \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) -$$

$$- \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|,\ \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) -$$

$$- C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3}))).$$

Si noti che

$$C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})$$

è un ciclo [12]), pertanto, sempre per la (3) del n. 4 e per l'Oss. V

---

[12]) La frontiera di questa $n-1$-catena è data da:

$$\dot{C}'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \dot{C}^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] \dot{U}^{n-1}(\sigma^{n-3}) =$$

$$= \sigma^{n-2} - \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C'^{n-2}(\sigma^{n-3}) - \sigma^{n-2} + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C^{n-2}(\sigma^{n-3}) +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] (C'^{n-2}(\sigma^{n-3}) - C^{n-2}(\sigma^{n-3}) + \sum_{\sigma^{n-4}} [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] U^{n-2}(\sigma^{n-4})) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] \sum_{\sigma^{n-4}} [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] U^{n-2}(\sigma^{n-4}) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-4}} U^{n-2}(\sigma^{n-4}) \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] = 0.$$

di questo numero potremo scrivere

$$(11) \qquad \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1})\omega(|\sigma^{n-1}|, \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1}:\sigma^{n-2}](C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) -$$

$$- C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2}:\sigma^{n-3}]U^{n-1}(\sigma^{n-3}))) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1}:\sigma^{n-2}]\omega(|\sigma^{n-2}|, C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) -$$

$$- C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2}:\sigma^{n-3}]U^{n-1}(\sigma^{n-3})) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-2}} \omega(|\sigma^{n-2}|, C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2} +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2}:\sigma^{n-3}]U^{n-1}(\sigma^{n-3})) \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1})[\sigma^{n-1}:\sigma^{n-2}].$$

Dalla (10) e dalla (11), tenendo conto della (4) si deduce

$$(12) \qquad \Omega(\Xi, K, x'^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) =$$

$$= \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}).$$

Resta ora da provare che $\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\})$ non dipende da K. Si osservi che se $\boldsymbol{k}(\Xi)$ è il sostegno di Ξ, noi possiamo associare ad ogni $\sigma^0 \in \boldsymbol{k}(\Xi)$ l'insieme $R(\sigma^0) \cap \mathcal{C}(|\boldsymbol{k}(\Xi)|)$, e ad ogni $\sigma^r \in |\boldsymbol{k}(\Xi)|$, $(r = 0, 1, \ldots, n-2)$, la $r+1$-catena $C^{r+1}(\sigma^r)$ già associata allo stesso simplesso in quanto appartenente a K. Indicando con $\{R(\sigma^0)\}^*$ e $\{C^{r+1}(\sigma^r)\}^*$, i sistemi di insiemi e di catene associati ai simplessi $\boldsymbol{k}(\Xi)$, così ottenuti, si ha evidentemente

$$(13) \qquad \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) =$$

$$= \Omega(\Xi, \boldsymbol{k}(\Xi), x^0, \{R(\sigma^0)\}^*, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}^*).$$

Ora se Ξ è ciclo di un altro complesso normale K' ed $\{R'(\sigma^0)\}$, $\{C'^{r+1}(\sigma^r)\}$, sono i sistemi associati ai simplessi di K', potremo scrivere anche

$$(14) \qquad \Omega(\Xi, K', x'^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) =$$

$$= \Omega(\Xi, \boldsymbol{k}(\Xi), x'^0, \{R'(\sigma^0)\}^*, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}^*).$$

Confrontando la (13) e la (14) con la (12) si ottiene

$$\Omega(\Xi, K', x'^0, \{ R'(\sigma^0) \}, \{ C'^{r+1}(\sigma^r) \}) =$$
$$= \Omega(\Xi, K, x^0, \{ R(\sigma^0) \}, \{ C^{r+1}(\sigma^r) \}$$

che è appunto ciò che si voleva provare.

6. - a) *Se* $\Xi_1, \dots, \Xi_r$, *sono* $n-1$*-cicli di un complesso* normale K e se è:

$$\Xi = \sum_1^r {}_i \, \mu_i \Xi_i \qquad (\mu_i \text{ interi relativi})$$

allora è anche:

$$\Omega(\Xi) = \sum_1^n {}_i \, \mu_i \Omega(\Xi_i).$$

Nelle nostre ipotesi sarà:

$$\Xi_i = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda_i(\sigma^{n-1}) \sigma^{n-1} \quad (\lambda_i(\sigma^{n-1}) \text{ interi relativi, } i = 1, \dots, r).$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1}) \sigma^{n-1} \quad \text{dove} \quad \lambda(\sigma^{n-1}) = \sum_1^r {}_i \, \mu_i \lambda_i (\sigma^{n-1}).$$

Se ad ogni $\sigma^{n-1} \in K$ associamo un ciclo n — 1-dimensionale $\Gamma(\sigma^{n-1})$ nel modo indicato nel n. precedente, avremo:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(| \sigma^{n-1} |, \Gamma(\sigma^{n-1})) =$$
$$= \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \sum_1^r {}_i \, \mu_i \lambda_i(\sigma^{n-1}) \omega(| \sigma^{n-1} |, \Gamma(\sigma^{n-1})) =$$
$$= \sum_1^r {}_i \, \mu_i \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda_i(\sigma^{n-1}) \omega(| \sigma^{n-1} , \Gamma(\sigma^{n-1})) =$$
$$= \sum_1^r {}_i \, \mu_i \Omega(\Xi_i).$$

b) *Se* Ξ *è un* $n-1$*-ciclo normale il cui supporto* $|\Xi|$ *sia un continuo e se* $\mathcal{C}(|\Xi|)$ *è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso* R *disgiunto da* Ξ, *allora*:

$$\Omega(\Xi) = \omega(| \Xi |, \Xi).$$

In tal caso infatti si può prendere come sistema di insiemi pluriconvessi, $\{R(\sigma^0)\}$, associati agli 0-simplessi di $\boldsymbol{k}(\Xi)$ e soddisfacenti alle condizioni specificate nel n. 5, quello costituito dall'unico insieme R. Di conseguenza, per le catene $C^{r+1}(\sigma^r)$ associate ai simplessi σ^r di $\boldsymbol{k}(\Xi)$, $(r = 0, \dots, n-2)$, si avrà:

$$|C^{r+1}(\sigma^r)| \subset \mathcal{E}^{(n)} - R \qquad (r = 0, \dots, n-2).$$

Pertanto, essendo

$$\Gamma(\sigma^{n-1}) = \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2}),$$

risulta anche:

$$|\Gamma(\sigma^{n-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - R.$$

Poichè $R \supset \mathcal{T}(|\Xi|)$ e $|\Xi|$ è un continuo, $\omega(P, \Gamma(\sigma^{n-1}))$, (per ogni $\sigma^{n-1} \in \boldsymbol{k}(\Xi)$) non varia al variare di P in $|\Xi|$ e si può scrivere pertanto:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1})\omega(|\Xi|, \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2})) =$$

$$= \sum \omega(|\Xi|, \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1})\sigma^{n-1} -$$

$$- \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2})) =$$

$$= \omega(|\Xi|, \Xi - \sum_{\sigma^{n-2}} C^{n-1}(\sigma^{n-2}) \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1})[\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}]) =$$

$$= \omega(|\Xi|, \Xi).$$

b$_1$) *Se per l'$n-1$-ciclo Ξ è soddisfatta l'ipotesi* b) *e se inoltre Ξ è omologo a zero* ($\Xi \sim 0$) *in $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(|\Xi|)$ allora*:

$$\Omega(\Xi) = 0.$$

Infatti l'aver supposto $\Xi \sim 0$ in $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(|\Xi|)$, porta come conseguenza che nella sommatoria esprimente $\omega(P, \Xi)$, $(P \in |\Xi|)$, tutti i ν_k siano nulli.

Oss. VI[a] - Se $\dot{\sigma}^n$ è il ciclo frontiera di un simplesso *normale* σ^n, allora per σ^n è verificata l'ipotesi b$_1$) e si ha: $\Omega(\dot{\sigma}^n) = 0$.

c) *Se* Ξ *è un* $n-1$*-ciclo di un complesso normale* K, *omologo a zero in* K, *allora*: $\Omega(\Xi) = 0$.

In tal caso infatti si ha:

$$\Xi = \dot{V} \quad \text{dove} \quad V = \sum_{\sigma^n \varepsilon K} \lambda(\sigma^n)\sigma^n \qquad \text{cioè}$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^n \varepsilon K} \lambda(\sigma^n)\dot{\sigma}^n.$$

Ora i cicli $\dot{\sigma}^n$ appartengono tutti al complesso normale K, quindi per la a) risulta:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^n \varepsilon K} \lambda(\sigma^n)\Omega(\dot{\sigma}^n).$$

Da qui, per l'Oss. VI si trae la conclusione voluta.

d) *Se* Ξ *è un* $n-1$*-ciclo di un complesso normale* K, ${}^p\Xi$ *è un ciclo del complesso* ${}^pK$, *che risulta pure normale in quanto, per ogni* x, $St(x, {}^pK) \subset St(x, K)$, *quindi ha senso considerare* $\Omega({}^p\Xi)$. *Si dimostra che*:

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi).$$

Basterà dimostrare la d) per $p = 1$. Si indichi con $\mathfrak{D}K$ il complesso di deformazione per la prima suddivisione baricentrica di K; $\mathfrak{D}K$ è un complesso normale poichè $St(x, \mathfrak{D}K) = St(x, K)$, inoltre si ha:

$$K \subset \mathfrak{D}K, \quad {}^1K \subset \mathfrak{D}K, \quad \Xi - {}^1\Xi \sim 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}K \text{ [13]}.$$

In base alla a) ed alla c) abbiamo allora:

$$\Omega(\Xi) - \Omega({}^1\Xi) = \Omega(\Xi - {}^1\Xi) = 0,$$

cioè

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^1\Xi)$$

[13]) V. loc. cit. in [2]) pag. 428-429.

Quest'ultima proprietà ci permette di estendere la definizione di *grado di $\mathcal{T}$ rispetto ad un $n-1$-ciclo non normale Ξ di $E - E_0$ ponendo*:

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi)$$

dove ${}^p\Xi$ è una suddivisione baricentrica di rango p tale che ${}^p\Xi$ sia normale. E la definizione è legittima in quanto $\Omega({}^p\Xi)$ non dipende da p.

7. - Abbiamo definito il grado della trasformazione $\mathcal{T}$ per un qualunque $n-1$-ciclo Ξ del complesso singolare totale $S(E - E_0)$. Il grado così definito resta invariato per le successive suddivisioni baricentriche di Ξ, ed è evidente che se $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$ sono $n-1$-cicli di $E - E_0$ e $\Xi = \sum_1^n{}_i \mu_i \Xi^i$ allora $\Omega(\Xi) = \sum_1^n{}_i \mu_i \Omega(\Xi_n)$.

Infatti basta considerare $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$, come cicli di un sottocomplesso finito K di $S(E - E_0)$. Allora se p è abbastanza grande ${}^pK$ è normale e per la a) del n. 6

$$\Omega({}^p\Xi) = \sum_1^n{}_i \mu_i \Omega({}^p\Xi^i),$$

cioè:

$$\Omega(\Xi) = \sum_1^n{}_i \mu_i \Omega(\Xi^i).$$

In modo analogo si verifica che:

Se Ξ è un $n-1$-ciclo di $E - E_0$ omologo a zero in $E - E_0$, $\Omega(\Xi) = 0$.

Da qui segue:

Se Ξ_1 e Ξ_2 sono due cicli di $E - E_0$ e $\Xi_1 \sim \Xi_2$ in $E - E_0$ $\Omega(\Xi_1) = \Omega(\Xi_2)$.

8. - Siamo ora in grado di dare un criterio di esistenza di punti uniti per una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$ dei punti di una n-cella E, per cui siano soddisfatte le condizioni I, II, III, IV e V del n. 2.

In tal caso E è supporto di un simplesso topologico X. Se sulla frontiera di E non ci sono punti uniti $\dot{X}$ è un $n-1$-ciclo di $E - E_0$ e possiamo pertanto valutare $\Omega(\dot{X})$. Ora se $\Omega(\dot{X}) \neq 0$ *esiste almeno un punto* $P \in E$ *tale che* $P \in \mathcal{T}(P)$.

Infatti se l'insieme E_0 fosse vuoto $\dot{X}$ sarebbe omologo a zero in $E - E_0$ e pertanto sarebbe $\Omega(\dot{X}) = 0$ contro l'ipotesi.

Mediante una semplice applicazione della teoria svolta nei numeri precedenti è possibile valutare il grado topologico $\Omega(\dot{X})$ nel caso che X sia un n-simplesso lineare di $\mathcal{E}^{(n)}$ e che $\mathcal{T}(|\dot{X}|) \subset |X|$.

Precisamente si trova (e per la dimostrazione si veda il lavoro citato in (1) pag. 401):

$$\Omega(\dot{X}) = \pm F_P(\mathcal{T}(P)) \qquad P \in E.$$

Quest'ultimo risultato ci consente di stabilire il teorema:

Sia E una n-cella, sostegno di un simplesso topologico X di $\mathcal{E}^{(n)}$, per cui sia possibile porre un omeomorfismo Φ tra lo spazio euclideo n-dimensionale $\Sigma^{(n)}$ ed $\mathcal{E}^{(n)}$, tale che X risulti il trasformato mediante Φ di un simplesso lineare H di $\Sigma^{(n)}$.

Se $\mathcal{T}$ è una trasformazione plurivalente di E, che faccia corrispondere ad ogni punto $P \in E$ un numero finito di punti e che soddisfi alle ipotesi II, IV, *e* V *del n.* 2, *e se inoltre*:

α) Per $P \in |\dot{X}| \quad \mathcal{T}(P) \subset E$

β) $F_P[\mathcal{T}(P)] \neq 0$

allora esiste in E almeno un punto $P \in \mathcal{T}(P)$ [14]).

Oss. - Se il dominio della trasformazione $\mathcal{T}$ è una n-cella E, supporto di un simplesso topologico X di $\mathcal{E}^{(n)}$, per cui non esista un omeomorfismo Φ tra $\Sigma^{(n)}$ ed $\mathcal{E}^{(n)}$, che muti un simplesso lineare H di $\Sigma^{(n)}$ in X, il teorema sussiste ancora se si sostituisce alla α l'ipotesi che $\mathcal{T}(E) \subset E$

---

[14]) Per la dimostrazione si veda loc. cit. in [1]), pag. 402.

Il precedente teorema ci permette infine di pervenire al seguente risultato:

Se $\mathcal{T}$ è una trasformazione di una n-cella in sè per cui siano soddisfatte le condizioni:

α_1) *Per ogni $P \in E$, $\mathcal{T}(P)$ sia costituito da al più due punti.*

α_2) *Se P_0 è un punto qualunque di E e se τ_0 è un pezzo di $\mathcal{T}(P_0)$, l'insieme $\mathcal{T}(P) \cdot [\tau_0]_\varepsilon$, per $\varepsilon > 0$, sia definitivamente non vuoto al tendere di P a P_0 in E* [15]),

allora esiste almeno un punto $P \in \mathcal{T}(P)$ [16]).

---

[15]) Cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esista un intorno di P_0 $[P_0]_\rho$, tale che, per $P \in [P_0]_\rho \cdot E$, sia $\mathcal{T}(P)[\tau_0]_\varepsilon \neq 0$.

[16]) Per la dimostrazione cfr. loc. cit. in [1]) n. 9.