

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Sugli spazi riemanniani normali ad n dimensioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 26 (1956), p. 328-333

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__328_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUGLI SPAZI RIEMANNIANI NORMALI AD n DIMENSIONI

Nota () di ANGELO TONOLO (a Padova)*

Alcuni anni or sono ¹⁾ ho assegnato delle condizioni necessarie e sufficienti affinché uno spazio riemanniano V_n sia normale, cioè affinché con le linee delle sue tre congruenze principali si possa costruire (almeno) un sistema triplo ortogonale di superficie.

Successivamente lo Schouten ²⁾ ha generalizzato il problema assumendo in uno spazio riemanniano V_n , con $n \geq 3$, un campo qualsiasi di affinori simmetrici, con distinti autovalori, e lo ha risolto con i suoi espressivi ed agili algoritmi. Il Nijenhuis ³⁾ ha risolto la quistione anche per gli spazi X_n senza metrica e senza connessione.

Mi sono ora proposto il problema di caratterizzare gli spazi V_n riemanniani normali con $n > 3$ estendendo il metodo esposto nella mia precedente ricerca. Questa estensione non

(*) Pervenuta in Redazione il 4 dicembre 1956.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ A. TONOLO, *Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni*, Pont. Accad. Sci., Acta, Vol. XIII, (1949); Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Serie VIII, Vol. VI, (1949).

²⁾ J. A. SCHOUTEN, *Sur les tenseurs de V_n aux directions principales V_{n-1} -normales*, Conférence au Colloque de Géométrie différentielle à Louvain, 11-14 Avril, (1951).

³⁾ A. NIJENHUIS, *X_{n-1} -forming sets of eigenvectors*, Proc. Kon. Akad. van Wet. Amsterdam, Serie A, Vol. LIV, (1951).

J. HAANTJES, *On X_m -forming sets of eigenvectors*, Ibidem, Serie A, Vol. LVIII, (1955).

A. FRÖLICHER and A. NIJENHUIS, *Theory of vector-valued differential forms*, Ibidem, Serie A, Vol. LIX, (1956).

porta alle equazioni assegnate dallo Schouten; essa assegna alle condizioni di normalità la forma seguente: certi polinomi $P_{\lambda\mu\sigma}(\rho)$ nella indeterminata ρ , i quali si costruiscono operando sulle componenti del tensore misto di Ricci $K_{\cdot\mu}^{\cdot\nu}$ e loro derivate prime rispetto alle coordinate di V_n , devono essere divisibili per il $\text{Det}(K_{\cdot\mu}^{\cdot\nu} - \rho\delta_{\mu}^{\nu})$. È essenziale supporre che gli zeri di questo determinante (autovalori di $K_{\cdot\mu}^{\cdot\nu}$) siano semplici. In tale ipotesi il risultato è valido per ogni campo di affinori simmetrici di V_n .

1. - Siano: $(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu, \xi, \sigma, \tau, = 1, 2, \dots, n)$ V_n uno spazio riemanniano con le coordinate ξ^λ , $g_{\mu\nu}$ il suo tensore metrico, $K_{\mu\nu}$ il tensore contratto di Ricci, $\rho_h = \rho_h(\xi^\lambda)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) le radici dell'equazione

$$(1) \quad \text{Det}(K_{\cdot\mu}^{\cdot\nu} - \rho\delta_{\mu}^{\nu}) = 0,$$

(autovalori di $K_{\cdot\mu}^{\cdot\nu}$). Noi supporremo che esse siano semplici; allora vi sono in V_n n determinate direzioni principali mutuamente ortogonali e noi indicheremo con i_λ^h ($h = 1, 2, \dots, n$) n vettori unità lungo queste direzioni (sistema covariante di autovettori). Normale è lo spazio V_n quando i campi i_λ^h sono V_{n-1} -normali. È noto che ciò avviene solo e soltanto quando

$$(2) \quad \gamma_{\mu\nu\sigma} = i_\mu^h(\partial_\nu i_\sigma^h - \partial_\sigma i_\nu^h) + \text{termini ciclici} = 0, \quad (\mu \neq \nu \neq \sigma)$$

$$\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda}.$$

Per semplificare in seguito le notazioni, denoteremo con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ una generica delle ρ_h e con i_λ i corrispondenti autovettori; valgono allora le identità

$$(3) \quad (K_{\cdot\mu}^{\cdot\nu} - \rho(\xi^\lambda)\delta_{\mu}^{\nu})i_\nu = 0.$$

Poichè la radice $\rho(\xi^\lambda)$ è supposta semplice per l'equazione (1), la matrice del determinante che figura al primo membro della (1) con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ è di caratteristica $n-1$; perciò i complementi algebrici degli elementi di una sua linea sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una

sua linea parallela. Posto allora

$$(4) \quad h_{\mu}^{\nu} = K_{\cdot\mu}^{\nu} - \rho(\xi^{\lambda})\delta_{\mu}^{\nu},$$

il risultato della risoluzione del sistema (3) può scriversi così:

$$(5) \quad m_{\mu}i_{\nu} = A_{\mu\nu},$$

ove abbiamo indicato con

$$(6) \quad A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(\xi^{\lambda})$$

i complementi algebrici degli elementi (4) della matrice $\|h_{\mu}^{\nu}\|$.

Nel seguito giocano un ufficio essenziale le seguenti espressioni:

$$(7) \quad A_{\mu\nu\sigma} = A_{\tau\mu}\partial_{\nu}A_{\tau\sigma} - A_{\tau\sigma}\partial_{\nu}A_{\tau\mu} + \text{termini ciclici.}$$

$$\mu \neq \nu \neq \sigma.$$

Esse sono funzioni delle coordinate ξ^{λ} e si costruiscono operando soltanto sulle componenti $K_{\cdot\mu}^{\nu}$ e loro derivate prime rispetto a queste variabili.

2. - Poniamo:

$$(8) \quad h_{\mu}^{\nu} = K_{\cdot\mu}^{\nu} - \rho\delta_{\mu}^{\nu},$$

$$(9) \quad E = E(\xi^{\lambda}, \rho) = \text{Det}(h_{\mu}^{\nu}) = 0,$$

ove ρ va pensata ora come una indeterminata, e denotiamo con

$$(10) \quad B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(\xi^{\lambda}, \rho)$$

i complementi algebrici degli elementi (8) della matrice $\|h_{\mu}^{\nu}\|$. Essi sono funzioni intere nella ρ i cui coefficienti dipendono dalle ξ^{λ} e si identificano con i complementi algebrici (6) quando al posto della indeterminata ρ poniamo la radice $\rho = \rho(\xi^{\lambda})$ dell'equazione (1), cioè della (9); abbiamo pertanto

$$(11) \quad A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}[\xi^{\lambda}, \rho(\xi^{\lambda})].$$

Premettiamo la notazione seguente: data una generica funzione delle ξ^λ e della ρ

$$F = F(\xi^\lambda, \rho),$$

con il simbolo $[F]$ intendiamo la funzione delle sole ξ^λ che si ricava dalla F quando al posto della ρ poniamo la radice $\rho(\xi^\lambda)$; cioè

$$(12) \quad [F] = F(\xi^\lambda, \rho(\xi^\lambda)).$$

Dalla (11) si ricava allora

$$(13) \quad \partial_\alpha A_{\mu\nu} = [\partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \partial_\alpha \rho].$$

Poichè $\rho(\xi^\lambda)$ è radice semplice dell'equazione (9), sarà

$$[E] = 0, \quad [\partial_\rho E] \neq 0,$$

e quindi

$$\partial_\alpha \rho = - \left[\frac{\partial_\alpha E}{\partial_\rho E} \right].$$

Sostituendo nella (13) ricaviamo

$$(15) \quad [\partial_\rho E] \partial_\alpha A_{\mu\nu} = [\partial_\rho E \partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E \partial_\rho B_{\mu\nu}].$$

Moltiplichiamo la (15) per un generico complemento algebrico $A_{\beta\omega}$; per la (11) e la convenzione (12), otteniamo

$$(16) \quad [\partial_\rho E] A_{\beta\omega} \partial_\alpha A_{\mu\nu} = [B_{\beta\omega} \{ \partial_\rho E \partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E \partial_\rho B_{\mu\nu} \}].$$

Consideriamo l'espressione che figura dentro la parentesi quadra del secondo membro della (16), cioè

$$(17) \quad B_{\beta\omega} \{ \partial_\rho E \partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E \partial_\rho B_{\mu\nu} \}.$$

Essa è manifestamente una funzione intera nella indeterminata ρ i cui coefficienti sono funzioni delle sole ξ^λ la quale si identifica col primo membro della (16) quando al posto della ρ poniamo la radice $\rho(\xi^\lambda)$. Fissiamo ora nella (7) un valore per τ , che denotiamo ancora con questa lettera, e

poniamo:

$$(18) \quad A_{\mu\nu\sigma/\tau}^* = A_{\tau\mu}\partial_\nu A_{\tau\sigma} - A_{\tau\sigma}\partial_\nu A_{\tau\mu}.$$

Moltiplichiamo per $[\partial_\rho E]$; si trae, applicando la (16),

$$(19) \quad [\partial_\rho E]A_{\mu\nu\sigma/\tau}^* = [\partial_\rho E\{B_{\tau\mu}\partial_\nu B_{\tau\sigma} - B_{\tau\sigma}\partial_\nu B_{\tau\mu}\} + \\ + \partial_\nu E\{B_{\tau\sigma}\partial_\rho B_{\tau\mu} - B_{\tau\mu}\partial_\rho B_{\tau\sigma}\}].$$

Per quanto abbiamo detto in precedenza l'espressione fra parentesi quadre nel secondo membro della (19), è un polinomio nella ρ con coefficienti dipendenti dalle coordinate ξ^λ ; esso è uguale al primo membro della (19) quando ρ viene sostituita con la radice $\rho(\xi^\lambda)$.

Nella (19) pensiamo effettuata la sommatoria rispetto a τ e facciamo circolare gli indici μ, ν, σ ; otteniamo

$$(20) \quad [\partial_\rho E]A_{\mu\nu\sigma} = [\partial_\rho E\{B_{\tau\mu}\partial_\nu B_{\tau\sigma} - B_{\tau\sigma}\partial_\nu B_{\tau\mu}\} + \\ + \partial_\nu E\{B_{\tau\sigma}\partial_\rho B_{\tau\mu} - B_{\tau\mu}\partial_\rho B_{\tau\sigma}\} + \text{termini ciclici}].$$

Il secondo membro della (20), prima di effettuarvi la sostituzione $\rho = \rho(\xi^\lambda)$, è una funzione intera nella ρ :

$$(21) \quad P_{\mu\nu\sigma}(\rho) = p_{\mu\nu\sigma}^{(s)}\rho^s + p_{\mu\nu\sigma}^{(s-1)}\rho^{s-1} + \dots p_{\mu\nu\sigma},$$

e si ha identicamente

$$(22) \quad [\partial_\rho E]A_{\mu\nu\sigma} = [P_{\mu\nu\sigma}(\rho)].$$

Va osservato che i coefficienti $p_{\mu\nu\sigma}$, $p_{\mu\nu\sigma}^{(t)}$ ($t=1, \dots, s$) si costruiscono a mezzo delle componenti del tensore misto di Ricci e delle loro derivate parziali prime rispetto alle ξ^λ .

3. - Possiamo scrivere la (7) nella forma seguente:

$$(23) \quad A_{\mu\nu\sigma} = A_{\tau\mu}(\partial_\nu A_{\tau\sigma} - \partial_\sigma A_{\tau\nu}) + \text{termini ciclici}.$$

Poniamo al posto dei complementi algebrici $A_{\mu\nu}$ i primi

membri della (5); si ottiene

$$(24) \quad A_{\mu\nu\sigma} = m_\tau i_\mu \{ \partial_\nu m_\tau i_\sigma - \partial_\sigma m_\tau i_\nu \} + \text{termini ciclici}.$$

Eseguendo le derivazioni e tenendo conto delle (2) si ricava

$$(25) \quad A_{\mu\nu\sigma} = M \gamma_{\mu\nu\sigma}, \quad M = \Sigma_\tau m_\tau^2 \neq 0.$$

Supponiamo che il campo i_λ^h sia V_{n-1} -normale; allora sono nulle le $\gamma_{\mu\nu\sigma}$ e quindi anche le $A_{\mu\nu\sigma}$ per le (25); per le (22) ogni $\rho_h(\xi^\lambda)$ è anche radice del polinomio (21) $P_{\mu\nu\sigma}(\rho)$ qualunque sia la terna $\mu\nu\sigma$, con $\mu \neq \nu \neq \sigma$. Questi polinomi sono perciò divisibili per il determinante $E(\rho)$:

$$(26) \quad P_{\mu\nu\sigma}(\rho) = E(\rho) Q_{\mu\nu\sigma}(\rho).$$

Inversamente, se valgono le (26) per ogni terna $\mu\nu\sigma$, e se $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ sono le radici dell'equazione $E(\rho) = 0$, supposte semplici, allora si annullano anche i polinomi $P_{\mu\nu\sigma}(\rho)$ con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$; per le (22) sono allora nulle le $A_{\mu\nu\sigma}$ e quindi le $\gamma_{\mu\nu\sigma}$ per le (25); il campo dei vettori i_λ^h è perciò V_{n-1} -normale.

OSSERVAZIONE. - È manifesto che la precedente teoria è senz'altro applicabile ad ogni campo di affinori simmetrici di V_n , nell'ipotesi che siano semplici le radici della corrispondente equazione secolare.