

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

**Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet
per le equazioni lineari ellittiche in due variabili**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 26 (1956), p. 223-231

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__223_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__223_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE IN DUE VARIABILI

Nota (*) di BRUNO PINI (a Cagliari)

Consideriamo l'equazione

$$(1) \quad \mathcal{L}[u] = \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y)$$

ellittica in un certo dominio $\mathcal{G}$. Sia $\mathfrak{D}$ un dominio contenuto in $\mathcal{G}$; il problema di Dirichlet per l'equazione (1) relativamente al dominio $\mathfrak{D}$ consiste nella determinazione di una funzione $u(x, y)$ tale che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u] &= f \quad \text{in } \mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D} \\ \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} &= f_k \quad \text{su } \mathfrak{F}\mathfrak{D}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

essendo ν la normale alla $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, rivolta per esempio verso l'interno di $\mathfrak{D}$.

In un lavoro di Viscik¹⁾ e in uno di Browder²⁾ è provato

(*) Pervenuta in Redazione il 9 ottobre 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Cagliari.

1) M. I. VISCİK, *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali*, Mat. Sbornik, 29 (1951) (in russo).

2) F. E. BROWDER, *Strongly elliptic systems of differential equations*, Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton-New Jersey (1954). Notiamo che l'affermazione che ci interessa e che noi intendiamo relativa a una equazione d'ordine $2n$ in due variabili, in questo lavoro di Browder e in quello di Viscik citato in 1) è provata, più in generale, sebbene da un punto di vista solo qualitativo, relativamente ai sistemi fortemente ellittici in un numero arbitrario di variabili.

che, sotto certe ipotesi sui coefficienti, termine noto e dati al contorno (che in entrambi i detti lavori s'intendono assunti dalla soluzione in un certo senso generalizzato) la soluzione è unica se il diam. $\mathfrak{D}$ è sufficientemente piccolo.

In un precedente lavoro di Bremekamp ³⁾ questa affermazione, relativamente al problema ordinario, era stata provata per quella particolare equazione del quarto ordine in cui il gruppo dei termini contenenti le derivate quarte è il laplaciano iterato.

I ragionamenti di Bremekamp, a differenza di quelli di Viscik e di Browder, sono del tutto elementari e hanno il pregio di permettere la determinazione esplicita di un confine superiore per il diam. $\mathfrak{D}$, tale da assicurare il verificarsi di quanto sopra affermato. Con una preventiva osservazione i ragionamenti di Bremekamp si possono facilmente estendere così da conseguire un risultato analogo a quello di questo A. per la più generale equazione ellittica d'ordine $2n$; riteniamo perciò non del tutto inutile mostrare ciò.

1. - Dall'ipotesi di ellitticità per la (1) segue l'esistenza di una costante positiva δ tale che

$$\sum_{i+j=2n} a_{ij}(x, y) \lambda^i \mu^j > \delta (\lambda^2 + \mu^2)^n \quad \text{per } (x, y) \in \mathfrak{C}.$$

Ne segue, indicando con Δ_k l'operatore $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ iterato k volte, che anche l'equazione

$$\sum_{i+j=2n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} - \varepsilon \Delta_n u = 0$$

è ellittica se ε è un numero positivo minore di δ .

D'altra parte la forma binaria

$$\sum_{i+j=2n} a_{ij}(x, y) \lambda^i \mu^j - \varepsilon (\lambda^2 + \mu^2)^n,$$

che è definita positiva, si può esprimere come somma di due

³⁾ H. BREMEKAMP, *On the partial differential equations occurring in the theory of the elastic plate*, Nieuw Arch. Wiskunde, XXII (1947).

quadrati

$$\sum_1^2 \left(\sum_0^n \alpha_{ih}(x, y) \lambda^{n-h} \mu^h \right)^2.$$

Pertanto l'equazione (1), se i coefficienti si suppongono opportunamente regolari, si può sempre presentare nella forma

$$(1') \quad \mathfrak{L}[u] = \varepsilon \Delta_n u + \sum_1^2 \left(\sum_0^n \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right)^{(2)} + \\ + \sum_{0 \leq i+j \leq 2n-1} \beta_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = \varphi(x, y):$$

s'intende che

$$\left(\sum_0^n \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right)^{(2)} = \\ = \sum_0^n \alpha_{ik}(x, y) \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \left(\sum_0^n \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right).$$

2. - Facciamo ora un paio di osservazioni che saranno utili nel seguito.

Sia $u(x, y)$ una funzione di classe $C^{(2n)}$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}$ tale che

$$\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{D} \quad \text{per} \quad i+j \leq n-1.$$

Indichiamo con $[m]$ il più grande numero naturale contenuto nel numero positivo m , e con

$$F_k \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-1} \partial y}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right)$$

una forma quadratica nelle derivate k -sime della u .

Ebbene, se $a(x, y)$ è una funzione di classe $C^{(i+j)}$ in $\mathfrak{D}$, si ha

$$(2) \quad \iint_{\mathfrak{D}} a u \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} dx dy = \iint_{\mathfrak{D}} \sum_0^{\left[\frac{i+j}{2} \right]} F_k dx dy \quad \text{per} \quad i+j \leq 2n-1.$$

Supponiamo di aver provato ciò per $i+j < m$ e mostriamo

che ciò è vero anche per $i + j = m$. Si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{D}} a u \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} dx dy &= (-1)^{[i/2] + [j/2]} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial^{[i/2] + [j/2]} a u}{\partial x^{[i/2]} \partial y^{[j/2]}} \frac{\partial^{i+j - [i/2] - [j/2]} u}{\partial x^{i - [i/2]} \partial y^{j - [j/2]}} dx dy = \\ &= (-1)^{[i/2] + [j/2]} \left(\iint_{\mathfrak{D}} a v \frac{\partial^{i+j - 2[i/2] - 2[j/2]} v}{\partial x^{i - 2[i/2]} \partial y^{j - 2[j/2]}} dx dy + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{hk} \iint_{\mathfrak{D}} b_{hk} \frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k} \frac{\partial^{i+j - [i/2] - [j/2]} u}{\partial x^{i - [i/2]} \partial y^{j - [j/2]}} dx dy \right) \end{aligned}$$

ove

$$v = \frac{\partial^{[i/2] + [j/2]} u}{\partial x^{[i/2]} \partial y^{[j/2]}}$$

e le b_{hk} sono certe derivate di a moltiplicate per certi fattori numerici. Ora il primo integrale all'ultimo membro è uguale a uno dei seguenti

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{D}} a v^2 dx dy, \quad -\frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial a}{\partial x} v^2 dx dy, \quad -\frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial a}{\partial y} v^2 dx dy, \\ \iint_{\mathfrak{D}} \left(-a \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} v^2 \right) dx dy \end{aligned}$$

(rispettivamente secondochè è: i pari, j pari; i dispari, j pari; i pari, j dispari; i dispari, j dispari). L'integrale che figura sotto la sommatoria si scrive

$$(-1)^{h+k} \iint_{\mathfrak{D}} u \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} \left(b_{hk} \frac{\partial^{i+j - [i/2] - [j/2]} u}{\partial x^{i - [i/2]} \partial y^{j - [j/2]}} \right) dx dy$$

che è eguale a una somma d'integrali del tipo

$$\iint_{\mathfrak{D}} c u \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} dx dy$$

con $r + s < i + j$. Da ciò si deduce subito l'affermazione.

Inoltre se $a(x, y)$ è una funzione di classe $C^{(n+m)}$ in $\mathfrak{D}$,

nelle ipotesi già fatte su u , si ha

$$(3) \quad \iint_{\mathfrak{D}} a \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-i} \partial y^i} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j} dx dy = \iint_{\mathfrak{D}} \left[\sum_k^{\left[\frac{n+m}{2} \right]} F_k \right] dx dy \quad \text{per } m \leq n-1.$$

L'integrale a primo membro è uguale a

$$(-1)^m \iint_{\mathfrak{D}} u \frac{\partial^m}{\partial x^{m-i} \partial y^i} \left(a \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right) dx dy$$

da cui sviluppando e tenendo presente il risultato precedente si ha quanto si è affermato.

È quasi superfluo notare che ogni volta che si applica il teorema di Gauss-Green s'intende che ci riferiamo a un dominio interno a $\mathfrak{D}$, di frontiera opportunamente regolare, che si fa poi tendere a $\mathfrak{D}$.

3. - Torniamo ora all'equazione (1'). Supponiamo che i coefficienti $\alpha_{ij}(x, y)$ siano di classe $C^{(2n)}$ e i coefficienti $\beta_{ij}(x, y)$ di classe $C^{(i+j)}$ in $\mathfrak{T}$.

Supponiamo che la $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ sia costituita da curve regolari.

Vogliamo provare che se diam $\mathfrak{D} < d$, essendo d un certo numero positivo che risulterà determinato da ciò che segue, una funzione $u(x, y)$, di classe $C^{(2n)}$ in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}^*$, tale che

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{L}[u] = 0 & \text{in } \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D} \\ \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0 & \text{su } \mathcal{F}\mathfrak{D} \quad \text{per } i+j \leq n-1, \end{cases}$$

è identicamente nulla.

Si ha

$$(5) \quad \iint_{\mathfrak{D}} u \Delta_p u dx dy = \iint_{\mathfrak{D}} (\Delta_p u)^2 dx dy \quad \text{per } n = 2p,$$

⁴) L'ipotesi che la $u(x, y)$ sia di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}$ è riducibile; cfr. B. PINI, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXV (1956).

$$(5') \iint_{\mathfrak{D}} u \Delta_{2p+1} u dx dy = - \iint_{\mathfrak{D}} \left[\left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \text{ per } n = 2p + 1$$

$$(6) \quad \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{ij} u \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^j} \left(\alpha_{hk} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \right) dx dy =$$

$$= (-1)^n \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{ij} \alpha_{hk} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-i} \partial y^j} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx dy +$$

$$+ (-1)^n \Sigma_{mr} \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{hk} \gamma_{ijmr} \frac{\partial^n u}{\partial x^{m-r} \partial y^r} \frac{\partial^n u}{\partial y^{n-k} \partial y^k} dx dy,$$

essendo le γ_{ijrm} certe derivate di α_{ij} moltiplicate per certi fattori numerici ed $m < n$. Allora, in base alle (2), (3), (5), (5') e (6), integrando $u \mathcal{L}[u] = 0$ su $\mathfrak{D}$ e tenendo presente che $\left| \frac{2n-1}{2} \right| = n-1$, si ha

$$(7) \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left[\varepsilon (\Delta_p u)^2 + \sum_i^2 \left(\sum_i^n \alpha_{ih} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right)^2 + \sum_k^{n-1} F_k \right] dx dy = 0 \text{ per } n = 2p$$

$$(7') \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial y} \right)^2 \right] + \sum_i^2 \left(\sum_i^n \alpha_{ih} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_k^{n-1} F_k \right\} dx dy = 0 \text{ per } n = 2p + 1.$$

Osserviamo poi che se $n = 2p$ si ha

$$\iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p-2j} \partial y^{2j}} dx dy = - \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial^{2p-1} u}{\partial x^{2p-1-(i+j)} \partial y^{i+j}} \right)^2 dx dy;$$

se $n = 2p + 1$ si hanno formole analoghe ponendo $\partial u / \partial x$ oppure $\partial u / \partial y$ al posto di u . Pertanto se $n = 2p$

$$(8) \quad \iint_{\mathfrak{D}} \Delta_p u \sum_i^{p-1} \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} dx dy = - \iint_{\mathfrak{D}} \Phi_{n-1} dx dy$$

essendo Φ_{n-1} una combinazione a coefficienti costanti positivi dei quadrati delle derivate $(n-1)$ -sime della u .

Analogamente se $n = 2p + 1$

$$(8') \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x} \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} + \frac{\partial \Delta_p u}{\partial y} \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} \right) dx dy = - \iint_{\mathfrak{D}} \Phi_{n-1} dx dy$$

ove Φ_{n-1} ha il significato già specificato.

Infine se le $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ sono funzioni continue su $\mathfrak{D}$ insieme alle derivate $\partial M / \partial x$ e $\partial N / \partial y$, si ha

$$(9) \quad 0 = \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[M_{ik} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[N_{ik} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \right)^2 \right] \right\} dx dy =$$

$$= \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \frac{[k/2]}{\sum_i} \left[\left(M_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \left(N_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{[k/2]}{\sum_i} \left[\left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial x} - M_{ik}^2 \right) \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_{ik}}{\partial y} - N_{ik}^2 \right) \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \right)^2 \right] -$$

$$- \frac{[k/2]}{\sum_i} \left[\left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] \Big\} dx dy$$

per $k = 0, 1, \dots, n-2$. Poniamoci nel caso di $n = 2p$ (in modo del tutto analogo si procede se $n = 2p + 1$). Sommiamo alla (7) la (8) moltiplicata per $2\varepsilon\lambda$ e le (9) per $k = 0, 1, \dots, n-2$; si ha

$$(10) \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \varepsilon \left(\Delta_p u + \lambda \sum_i^{p-1} \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} \right)^2 + \sum_i^2 \left(\sum_h^n \alpha_{ih} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right)^2 + \right.$$

$$+ \sum_k^{n-2} \frac{[k/2]}{\sum_i} \left[\left(M_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(N_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] + \sum_k^{n-1} \Psi_k \Big\} dx dy = 0$$

dove

$$\begin{aligned}\Psi_{n-1} &= 2\varepsilon\lambda \Phi_{n-1} + F_{n-1} - \sum_i^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1-i}\partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^i\partial y^{n-1-i}} \right)^2 \right]; \\ \Psi_{n-2} &= -\varepsilon\lambda^2 \left(\sum_i^{p-1} \frac{\partial^{2p-2}u}{\partial x^{2p-2-2i}\partial y^{2i}} \right)^2 + F_{n-2} + \\ &+ \sum_i^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \left[\left(\frac{\partial M_{i,n-2}}{\partial x} - M_{i,n-2}^2 \right) \left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2-i}\partial y^i} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial N_{i,n-2}}{\partial y} - N_{i,n-2}^2 \right) \left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^i\partial y^{n-2-i}} \right)^2 \right] - \\ &- \sum_i^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \left[\left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2-i}\partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^i\partial y^{n-2-i}} \right)^2 \right];\end{aligned}$$

Ψ_{n-j} per $j=3, \dots, n-1$, si ottiene da Ψ_{n-2} sopprimendo il primo termine e ponendo $n-j$ al posto di $n-2$;

$$\Psi_0 = F_0 + \left(\frac{\partial M_{00}}{\partial x} - M_{00}^2 + \frac{\partial N_{00}}{\partial y} - N_{00}^2 \right) u^2.$$

Indichiamo ora con $\bar{\Psi}_k$ la forma binaria di grado $2k$ che si ottiene dalla Ψ_k ponendo $\alpha^i\beta^j$ al posto di $\partial^{i+j}u/\partial x^i\partial y^j$.

Intanto si può scegliere λ in modo che $\bar{\Psi}_{n-1}$ sia semidefinita positiva. Fissato λ , poniamo

$$(11) \quad \frac{\partial M_{i,n-2}}{\partial x} - M_{i,n-2}^2 - \mu_{i,n-2}^2 = 0, \quad \frac{\partial N_{i,n-2}}{\partial y} - N_{i,n-2}^2 - \nu_{i,n-2}^2 = 0$$

essendo $\mu_{i,n-2}$ e $\nu_{i,n-2}$ delle costanti positive scelte in modo che

$$\begin{aligned}& -\varepsilon\lambda^2 \left(\sum_i^{p-1} \alpha^{2p-2-2i} \beta^{2i} \right)^2 + \bar{F}_{n-2} + \\ & + \sum_i^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (\mu_{i,n-2}^2 \alpha^{2n-4-2i} \beta^{2i} + \nu_{i,n-2}^2 \alpha^{2i} \beta^{2n-4-2i}) - \\ & - \sum_i^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} [\alpha^{2n-4-2i} \beta^{2i} + \alpha^{2i} \beta^{2n-4-2i}]\end{aligned}$$

sia semidefinita positiva. Per soddisfare le (11) basta prendere

$$M_{i, n-2} = \mu_{i, n-2} \operatorname{tg} \mu_{i, n-2} (x - x_0) \quad , \quad N_{i, n-2} = \nu_{i, n-2} \operatorname{tg} \nu_{i, n-2} (y - y_0)$$

$$-\frac{\pi}{2\mu_{i, n-2}} < x - x_0 < \frac{\pi}{2\mu_{i, n-2}} \quad , \quad -\frac{\pi}{2\nu_{i, n-2}} < y - y_0 < \frac{\pi}{2\nu_{i, n-2}}$$

(x_0, y_0 costanti)

In particolare si può prendere $\mu_{i, n-2} = \nu_{i, n-2}$.

In modo analogo si determinano successivamente le $M_{i, n-3}, \dots, M_{00}$ ed $N_{i, n-3}, \dots, N_{00}$; le μ_{00} ed ν_{00} si determinano in modo che $F_0/u^2 + \mu_{00}^2 + \nu_{00}^2$ sia sempre positiva.

Pertanto se $\mathfrak{D}$ è interno al rettangolo $-\pi/2\mu \leq x - x_0 \leq \pi/2\mu$, $-\pi/2\nu \leq y - y_0 < \pi/2\nu$ dove $\mu = \max \mu_{ik}$ per $i = 0, 1, \dots, \left[\frac{k}{2}\right]$ e $k = 0, 1, \dots, n-2$ e $\nu = \max \nu_{ik}$ per $i = 0, 1, \dots, \left[\frac{k}{2}\right]$ e $k = 0, 1, \dots, n-2$ la (10) sussisterà solo se $u \equiv 0$.

Scegliendo $\mu_{ij} = \nu_{ij}$ si ha dunque che:

Se diam $\mathfrak{D} < \pi/\mu$ il problema di Dirichlet per la (1') ha al più una soluzione.