

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

**Sulla possibilità di stabilire, limitazioni inferiori
per le componenti intrinseche del tensore degli
sforzi in coordinate generali**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 26 (1956), p. 139-147

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__139_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__139_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA POSSIBILITÀ DI STABILIRE LIMITAZIONI INFERIORI PER LE COMPONENTI INTRINSECHE DEL TENSORE DEGLI SFORZI IN COORDINATE GENERALI

Nota () di ALDO BRESSAN (a Padova)*

In una pubblicazione¹⁾ G. GRIOLI introduce le coordinate n -iperastatiche nel caso di un corpo libero $\mathcal{C}$ di natura qualunque, in equilibrio sotto data sollecitazione attiva, e mediante esse stabilisce delle limitazioni inferiori per i massimi dei moduli delle componenti cartesiane del tensore degli sforzi generalizzando analoghe limitazioni di A. Signorini.

Mi sono proposto di generalizzare quei risultati estendendoli alle componenti intrinseche X del detto tensore nel più generale sistema di coordinate curvilinee.

Considerando delle coordinate $b_r(\varphi)$ ($r = 1, 2, 3$) relative ad una generica funzione regolare di punto — le quali $b_r(\varphi)$ divengono le coordinate n -iperastatiche qualora si identifichino le φ coi monomi nelle coordinate cartesiane —, scrivo le relative nuove relazioni di media, considerando in particolare il caso delle coordinate ortogonali.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 luglio 1956.

Indirizzo dell'A: Seminario matematico, Università, Padova.

1) G. GRIOLI: *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio*. « Annali di Mat. pura ed appl. », (4), 33, (1952), pp. 239-246.

Riguardo a un generico sistema di coordinate curvilinee, scrivo delle condizioni (differenziali) su tre funzioni scalari $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, sufficienti affinché dalle suddette relazioni di media, relative alle $b_1(\varphi_1), b_2(\varphi_2), b_3(\varphi_3)$, si possano ricavare limitazioni del tipo di quelle cercate.

Applicando tale criterio nel caso delle coordinate cilindriche (ρ, ϑ, z) relative alla terna ortogonale $\mathcal{T} \equiv (O, y_1, y_2, y_3)$ ho potuto scrivere delle limitazioni — dipendenti da una funzione dotata di determinata arbitrarietà — per tutti i $|X|_{rs, max}$ nel caso di un corpo $\mathcal{C}$ contenuto in un diedro avente per spigolo l'asse y_3 , e per tutti i $|X|_{rs, max}$ meno uno per $\mathcal{C}$ in posizione generica rispetto alla $\mathcal{T}$.

1. Relazioni generali di media per le X_{rs} .

Considero un corpo $\mathcal{C}$ (occupante la regione spaziale $\mathcal{C}$) in equilibrio sotto la forza di volume d'intensità $\mathbf{F}$, agente in $\mathcal{C} - F\mathcal{C}$, e sotto quella di superficie d'intensità $\mathbf{f}$ agente sul contorno $\Sigma = F\mathcal{C}$ di normale interna $\mathbf{n}$.

Con $x_i, X_{rs}, F_r, l_r, n_r$, ecc... indico le coordinate del punto variabile P , le componenti del tensore degli sforzi, quelle di $\mathbf{F}, \mathbf{f}, \mathbf{n}$, ecc. in un generico riferimento curvilineo; con $y_i, Y_{rs}, F_r^*, f_r^*, n_r^*$, indico le quantità analoghe relative al sistema cartesiano ortogonale $(\mathcal{T})$.

Le equazioni di Cauchy sono

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{s=1}^3 \frac{\partial Y_{rs}}{\partial y_s} = F_r^* & \text{in } \mathcal{C} - F\mathcal{C} \\ \sum_{s=1}^3 Y_{rs} n_s^* = f_r^* & \text{su } F\mathcal{C}. \end{cases}$$

Con notazioni tensoriali²⁾ pongo per ogni funzione φ del

²⁾ Uso le notazioni trovantesi nel «Calcolo tensoriale ed Applicazioni» del Finzi.

punto P , regolare in $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad b_r(\varphi) &= -\frac{1}{\mathcal{C}} \left\{ \int_{\mathcal{C}} \varphi F_r \frac{\partial x^p}{\partial y^r} d\mathcal{C} + \int_{\Sigma} \varphi f_r \frac{\partial x^p}{\partial y^r} d\Sigma \right\} = \\
 &= -\frac{1}{\mathcal{C}} \left\{ \int_{\mathcal{C}} \varphi F_r^* d\mathcal{C} + \int_{\Sigma} \varphi f_r^* d\Sigma \right\} \quad (r = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

Poichè per la (1)₁ e la formula di Green, indicando col soprassegno il valore medio in $\mathcal{C}$ si ha, come è ben noto,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} \varphi F_r^* d\mathcal{C} &= \sum_{s=1}^3 \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \varphi Y_{r,s}}{\partial y_s} d\mathcal{C} - \sum_{s=1}^3 \int_{\mathcal{C}} Y_{r,s} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s} d\mathcal{C} = \\
 &= - \int_{\Sigma} \varphi \sum_{s=1}^3 Y_{r,s} n_s^* d\Sigma - \mathcal{C} \sum_{s=1}^3 \overline{Y_{r,s}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s}
 \end{aligned}$$

per (2) e (1)₂ è

$$\begin{aligned}
 (3) \quad b_r(\varphi) &= \sum_{s=1}^3 \overline{Y_{r,s}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s} = \sum_{s, \rho, \sigma, v=1}^3 \overline{X_{\rho\sigma}} \frac{\partial x^\rho}{\partial y_s} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y_s} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^v}{\partial y_s} = \\
 &= \sum_{\rho, \sigma, v=1}^3 \overline{X_{\rho\sigma}} \frac{\partial x^\rho}{\partial y_r} a^{\sigma v} \frac{\partial \varphi}{\partial x^v}
 \end{aligned}$$

essendo le $a_{\sigma v} = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial x^\sigma}{\partial y_s} \frac{\partial x^v}{\partial y_s}$ le componenti controvarianti del tensore fondamentale.

Introdotte le componenti covarianti a_{ik} del detto tensore, il versore $\mathbf{u}$ dell' r^{ma} linea coordinata ha componenti controva-

rianti u^i nel riferimento cartesiano ($\mathcal{C}$) e $\frac{a_r^i}{\sqrt{a_{r,r}}}$ in quello generale, onde, detto $\Phi_{\mathbf{u}}(P)$ lo sforzo specifico in P relativo alla direzione orientata di $\mathbf{u}$, le

$$(4) \quad \dot{X}_{rs} = \Phi_{\mathbf{u}} \times_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_s = Y_{ik} u^i u^k = X_{ik} \frac{a_r^i a_s^k}{\sqrt{a_{r,r} a_{s,s}}} = \frac{X_{rs}}{\sqrt{a_{r,r} a_{s,s}}}$$

sono le componenti intrinseche del tensore degli sforzi, e, dato il loro significato meccanico, conviene introdurle nelle (3) che

muto in

$$(5) \quad b_r(\varphi) = \sum_{\rho, \sigma, s=1}^3 \overline{\sqrt{a_{\rho\rho} a_{\sigma\sigma}}} X \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r} a^{\sigma s} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} = \sum_{\rho, \sigma=1}^3 \overline{X v_r^{\rho\sigma}} = \sum_{i=1}^6 \overline{X v_r^i}$$

ove è

$$(6) \quad v_r^{\rho\sigma} = \frac{\sqrt{a_{\rho\rho} a_{\sigma\sigma}}}{2} \sum_{s=1}^3 \left(a^{\sigma s} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r} + a^{rs} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} = v_r^{\sigma\rho} \quad (r, \rho, \sigma = 1, 2, 3)$$

e

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_i = X_{ii} & v_{r,i} = v_r^{i,i} \\ X_{i+3} = X_{i+1, i+2} & v_{r,i+3} = 2 v_r^{i+1, i+2} \end{array} \right. \quad (r, i = 1, 2, 3).$$

In coordinate ortogonali ($a_{rs} = a^{rs} = 0 \quad r \neq s$) posto

$$(8) \quad H^\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}} = 1/\sqrt{a^{\rho\rho}}$$

le (6) divengono

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_r^i = v_r^{\rho\rho} = \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} & (i = \rho = 1, 2, 3) \\ v_r^{i+3} = 2 v_r^{\rho\sigma} = \frac{H_\rho}{H_\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \frac{H_\sigma}{H_\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} & \text{(per } i, \rho, \sigma \text{ diversi} \\ & \text{e scelti fra } 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Per (2) e (6) le $b_r(\varphi)$ e $v_r^{\rho\sigma} = v_r^{\sigma\rho}(\varphi)$ sono operatori lineari omogenei rispettivamente integrali e differenziali nella $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Posto per ogni terna $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ di funzioni regolari in $\mathcal{C}$

$$(10) \quad A^q(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \sum_{r=1}^3 v_r^q(\varphi_r) \quad (q = 1, \dots, 6)$$

per (5) è

$$(11) \quad \sum_{r=1}^3 b_r(\varphi_r) = \sum_{q=1}^6 \overline{X A^q(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}$$

Fissato l fra i numeri $(1, \dots, 6)$ si potrà stabilire una limitazione inferiore pel massimo di $|X_l|$ in $\mathcal{C}$ quando si siano scelte le φ_r in modo che nella (11) figuri come effettivamente incognito il solo valor medio relativo a X_l . Ma essendo le X in

cognite, si potrà esser certi di avere ottenuto ciò qualora risulti

$$(12) \quad A^q(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv 0 \quad (q \neq l; q = 1, \dots, 6).$$

Le (12) costituiscono un sistema di cinque equazioni differenziali lineari omogenee alle derivate parziali rispetto a x_1, x_2, x_3 in tre funzioni incognite.

Per ogni sua soluzione che non annulli identicamente $A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la (11) dà

$$\left| \sum_{r=1}^3 b_r(\varphi_r) \right| \leq \frac{1}{C} \int_C |X| \cdot A^l(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) dC$$

ossia

$$|X|_{\max} \geq \frac{C \left| \sum_{r=1}^3 b_r(\varphi_r) \right|}{\int_C A^l(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) dC}$$

che costituisce una generalizzazione della disuguaglianza dell'op. cit. del Grioli.

2. Caso delle coordinate cilindriche.

Si riconosce che nel caso delle coordinate cilindriche si riesce a trovare soluzioni del sistema (12) comunque si sia fissato l fra 1, ..., 6 per ogni corpo contenuto in un diedro avente per spigolo l'asse $\varphi = 0$. Ma è più rapido il seguente metodo diretto.

Assumo, in particolare, per coordinate curvilinee x_i quelle cilindriche (ρ, ϑ, z) associate al sistema cartesiano $(\mathcal{C})$. Essendo

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + dz^2 = a_{ik} dx^i dx^k,$$

per (9) è

$$H_1 = H_3 = 1, \quad H_2 = \rho.$$

Mediante la matrice

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ \rho & \rho & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

reciproca della trasposta della $\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$, calcolo le $v_r^{\rho\sigma}$ secondo (8), quindi in base alle (5) ottengo per le $b_r(\varphi)$ le espressioni

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} b_1(\varphi) &= \overline{X_{11} \cos \vartheta \varphi'_\rho} + \overline{X_{12} \left[-\sin \vartheta \varphi'_\rho + \frac{\cos \vartheta}{\rho} \varphi'_\theta \right]} - \\ &\quad - \overline{X_{22} \frac{\sin \vartheta}{\rho} \varphi'_\theta} + \overline{X_{13} \cos \vartheta \varphi'_z} - \overline{X_{23} \sin \vartheta \varphi'_z} \\ b_2(\varphi) &= \overline{X_{11} \sin \vartheta \varphi'_\rho} + \overline{X_{12} \left[\cos \vartheta \varphi'_\rho + \frac{\sin \vartheta}{\rho} \varphi'_\theta \right]} + \\ &\quad + \overline{X_{22} \frac{\cos \vartheta}{\rho} \varphi'_\theta} + \overline{X_{13} \sin \vartheta \varphi'_z} + \overline{X_{23} \cos \vartheta \varphi'_z} \\ b_3(\varphi) &= \overline{X_{13} \varphi'_\rho} + \overline{X_{23} \frac{1}{\rho} \varphi'_\theta} + \overline{X_{33} \varphi'_z} . \end{aligned} \right.$$

* * *

Considero una qualunque funzione $\psi(\vartheta)$ regolare (continua) se il corpo è tale che in esso si possa scegliere una determinazione univoca e continua per l'anomalia $\vartheta = \vartheta(P)$ [per es. in quanto $\mathcal{C}$ sia contenuto in un diedro avente per spigolo l'asse y_3];

considero invece una $\psi(\vartheta)$ regolare e verificante le

$$(16) \quad \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0$$

se per il corpo $\mathcal{C}$ non è soddisfatta la precedente condizione.

Le (16) assicurano anche in questo secondo caso l'univocità delle funzioni $\int_0^{\vartheta} \psi(t) \cos t dt$ e $\int_0^{\vartheta} \psi(t) \sin t dt$ cosicchè in ogni caso è lecito identificare nelle (15) la φ con una qualunque di esse.

Le (15)_{1,2} danno

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} b_1 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \cos t dt \right] &= - \overline{X_{22} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)} + \overline{X_{12} \frac{\cos^2 \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)} \\ b_2 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \sin t dt \right] &= \overline{X_{22} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)} + \overline{X_{12} \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)} \end{aligned} \right.$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} -b_1 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \sin t dt \right] &= \overline{X_{22} \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)} - \overline{X_{12} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)} \\ b_2 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \cos t dt \right] &= \overline{X_{22} \frac{\cos^2 \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)} + \overline{X_{12} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho} \psi(\vartheta)}. \end{aligned} \right.$$

Sommando membro a membro le (17) e (18) si ottengono le

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{X_{12} \frac{\psi(\vartheta)}{\rho}} &= b_1 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \cos t dt \right] + b_2 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \sin t dt \right] \\ \overline{X_{22} \frac{\psi(\vartheta)}{\rho}} &= -b_1 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \sin t dt \right] + b_2 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \cos t dt \right] \end{aligned} \right.$$

onde per (13)

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} |X_{12}|_{\max} &\geq \frac{\mathcal{C} \left| b_1 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \cos t dt \right] + b_2 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \sin t dt \right] \right|}{\int_{\mathcal{C}} \frac{|\psi(\vartheta)|}{\rho} d\mathcal{C}} \\ |X_{22}|_{\max} &\geq \frac{\mathcal{C} \left| -b_1 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \sin t dt \right] + b_2 \left[\int_0^{\vartheta} \psi(t) \cos t dt \right] \right|}{\int_{\mathcal{C}} \frac{|\psi(\vartheta)|}{\rho} d\mathcal{C}}. \end{aligned} \right.$$

Indicando con $u(\rho)$ e $v(z)$ due funzioni continue dalle (15) si trae poi facilmente

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} |X_{23}|_{\max} &\geq \frac{\mathcal{C} \left| b_s \left[\int_0^\rho u(\bar{\rho}) d\bar{\rho} \right] \right|}{\int_{\mathcal{C}} |u(\rho)| d\mathcal{C}} \\ |X_{23}|_{\max} &\geq \frac{\mathcal{C} \left| b_s \left[\int_0^\vartheta \psi(t) dt \right] \right|}{\int_{\mathcal{C}} \frac{|\psi(\vartheta)|}{\rho} d\mathcal{C}} \\ |X_{33}|_{\max} &\geq \frac{\mathcal{C} \left| b_s \left[\int_0^z v(\zeta) d\zeta \right] \right|}{\int_{\mathcal{C}} |v(z)| d\mathcal{C}} \end{aligned} \right.$$

Per la determinazione di relazioni di media per la X si può raggiungere lo scopo sfruttando l'arbitrarietà della $\psi(\vartheta)$ nelle singole (19) e precisamente applicando per es. la $(15)_1$ ad una $\varphi(\rho, \vartheta)$ per cui esistano due funzioni regolari $\psi(\vartheta)$, $\psi_1(\vartheta)$ verificanti le

$$(22) \quad -\sin \vartheta \varphi'_\rho + \frac{\cos \vartheta}{\rho} \varphi'_\vartheta = \frac{\psi(\vartheta)}{\rho} \quad \frac{\sin \vartheta}{\rho} \varphi'_\vartheta = \frac{\psi_1(\vartheta)}{\rho}.$$

Da $(22)_2$ segue che $\varphi(\rho, \vartheta)$ ha la forma $\alpha(\rho) + \beta(\vartheta)$ onde per $(22)_1$

$$(23) \quad \varphi(\rho, \vartheta) = \lambda \log \rho + \beta(\vartheta)$$

con λ costante. Per (22) è poi

$$\psi(\vartheta) = -\lambda \sin \vartheta + \beta'(\vartheta) \cos \vartheta$$

$$\psi_1(\vartheta) = \beta'(\vartheta) \sin \vartheta.$$

Applicando la (15)₁ a tale $\varphi(\rho, \vartheta)$ per (22) si ha

$$(24) \quad \overline{X \cos \vartheta \varphi'_\rho} = b_1[\varphi(\rho, \vartheta)] - \overline{X \frac{\psi(\vartheta)}{\rho}} + \overline{X \frac{\psi_1(\vartheta)}{\rho}}$$

Poichè sul valore medio $\overline{X \cos \vartheta \varphi'_\rho}$ che si cerca non influisce la scelta dell'addendo $\beta(\vartheta)$ possiamo porre, senza ledere la generalità

$$\beta(\vartheta) \equiv 0 \quad \text{onde} \quad \psi_1(\vartheta) \equiv 0$$

ragionando analogamente sulla (15)₂ si arriva alla

$$(24') \quad \overline{X \sin \vartheta \varphi'_\rho} = b_2[\bar{\varphi}(\rho)] - \overline{X \frac{\bar{\psi}(\vartheta)}{\rho}}$$

con

$$\bar{\varphi}(\vartheta) = \bar{\lambda} \log \rho \quad \bar{\psi}(\vartheta) = \bar{\lambda} \cos \vartheta.$$

Poichè ciascuna delle $\psi(\vartheta) = -\lambda \sin \vartheta$ e $\bar{\psi}(\vartheta) = \bar{\lambda} \cos \vartheta$ non verifica le (16) cosicchè la (19) in generale non è applicabile, suppongo il corpo contenuto, in un diedro avente per spigolo l'asse y_3 .

Allora per (23) (24') (19) si ha

$$\begin{aligned} \overline{X \frac{\lambda \cos \vartheta + \bar{\lambda} \sin \vartheta}{\rho}} &= \lambda \left[b_1(\log \rho) - b_1\left(-\frac{\sin^2 \vartheta}{2}\right) - b_2\left(\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{4}\right) \right] + \\ &+ \bar{\lambda} \left[b_2(\log \rho) - b_1\left(\frac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{4}\right) - b_2\left(\frac{\sin^2 \vartheta}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

onde

$$(25) \quad | \overline{X} |_{\max} \geq$$

$$\geq \frac{\mathcal{C} \left| b_1 \left[\lambda \left(\log \rho + \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right) - \bar{\lambda} \frac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{4} \right] + b_2 \left[\bar{\lambda} \left(\log \rho - \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right) - \lambda \frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{4} \right] \right|}{\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho} |\lambda \cos \vartheta + \bar{\lambda} \sin \vartheta| d\mathcal{C}}$$

che dà la richiesta limitazione inferiore.