RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 84-92

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__84_0>

PUNTI UNITI IN TRASFORMAZIONI A CODOMINIO NON COMPATTO

Nota (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

J. SCHAUDER [1]) ha esteso il teorema di BIRKOFF-KELLOG agli spazi lineari normali completi, dimostrando l'esistenza di un punto unito in ogni trasformazione continua di un insieme convesso e chiuso in un sottinsieme di una sua porzione bicompatta. R. CACCIOPPOLI, in una Nota [2]) pressochè contemporanea a quella dello SCHAUDER, ha dimostrato il teorema per alcuni spazi funzionali particolari, mostrandone la sua utilità con varie interessanti applicazioni. A. TYCHONOFF [3]), successivamente, ha tolto alcune restrizioni circa la natura dello spazio lineare mantenendosi tuttavia nell'ipotesi della bicompattezza.

Ha interesse, per le numerose applicazioni di cui è suscettibile questo teorema, la ricerca di nuove estensioni, particolarmente nell'intento di eliminare ipotesi sulla compattezza dell'insieme trasformato. Un primo interessante risultato in tal senso, è stato raggiunto recentemente da M. VOLPATO [4]), per particolari spazi funzionali.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 novembre 1954.

1) J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, [Studia Math., T. II, (1930)], pp. 171-180.

2) R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, [Rend. Acc. Lincei, s. VI, t. 11. (1930)], pp. 794-799; per ulteriori applicazioni si veda anche: *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti*, [Rend. Acc. Lincei, s. VI, t. 13, (1931)], pp. 498-502.

3) A. TYCHONOFF, *Ein Fixpunktsatz*, [Math. Annalen, T. 111, (1930)], pp. 767-776.

4) M. VOLPATO, *Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali: un problema ai limiti per una classe di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*, [Ann. Univ. Ferrara, Vol. II, N. 8, (1953)] pp. 93-109.

Scopo del presente lavoro è di estendere il teorema nella forma più generale datagli da SCHAUDER, per una categoria di trasformazioni a codominio non compatto.

1. - Al fine propostoci, faremo uso di una notevole generalizzazione del teorema di CANTOR, relativa all'intersezione di una successione d'insiemi di uno spazio metrico completo. Prendiamo perciò le mosse dalla seguente

DEFINIZIONE [5]: *Sia X un insieme limitato di uno spazio metrico completo Σ. Indicheremo con $\alpha(X)$, l'estremo inferiore dei numeri positivi ε per i quali è possibile decomporre l'insieme X nella somma di un numero finito di parti di diametro inferiore ad ε.*

Se X è un generico sottinsieme di Σ, indicheremo con $\overline{X}$ la sua chiusura; con X_ε l'ε-intorno aperto di X, cioè l'insieme dei punti di Σ che distano da qualche punto di X meno di ε; con $\delta(X)$ il diametro di X.

Sono allora conseguenze immediate della precedente definizione le seguenti proprietà:

1) se X e Y sono porzioni limitate di Σ, ed è $X \subset Y$, si ha $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$;

2) per ogni $\varepsilon > 0$ è $\alpha(X_\varepsilon) \leq \alpha(X) + 2\varepsilon$;

3) $\alpha(\overline{X}) = \alpha(X)$;

4) $\alpha(X + Y) = \max \{ \alpha(X), \alpha(Y) \}$.

Tralasciamo la facile dimostrazione delle proprietà 1), 2), 3), 4). Dalla definizione di $\alpha(X)$ segue ancora che la condizione $\alpha(X) = 0$ equivale ad affermare che X è totalmente limitato, ossia compatto relativamente a Σ [6]).

Sussiste la seguente generalizzazione del teorema di CANTOR [7]):

[5]) Cfr.: C. KURATOWSKI, *Topologie*, [Warszawa (1952)], vol. I, pag. 318 e seg.

[6]) Cfr.: P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*, [Berlin, (1935)], vol. I, pag. 104 e seg.

[7]) Vedi op. cit. in [5]), pag. 318 e seg.

A) *Ogni successione decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ di sottinsiemi limitati, chiusi e non vuoti di uno spazio metrico completo Σ, per cui si ha* $\lim \alpha(X_n) = 0$, *ha una intersezione $Y_0 = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \cdot \ldots$ non vuota e compatta.*

Nel caso della compattezza degli insiemi X_n si ha per ogni n, $\alpha(X_n) = 0$ e si ricade così nel teorema classico di CANTOR.

2. - DEFINIZIONE DI α-CONTRAZIONE: *chiameremo α-contrazione, ogni trasformazione continua*

$$x' = \xi(x)$$

di uno spazio metrico Σ in se, che soddisfa alle seguenti due proprietà:

I. *Ogni insieme limitato di Σ, venga trasformato dalla ξ in un insieme limitato.*

II. *Qualunque sia l'insieme limitato $X \subset \Sigma$, posto $X' = \xi(X)$, risulti*

$$\alpha(X') \leq k\alpha(X), \tag{1}$$

con k un conveniente numero non negativo, minore di 1, *e indipendente da X.*

Da questa definizione segue che ogni trasformazione *completamente continua* è una α-contrazione, poichè il trasformato di ogni insieme limitato è compatto in Σ, ed è $\alpha(X') = 0$; basterà prendere dunque $k = 0$ perchè le condizioni I e II siano entrambe soddisfatte. Così pure sono α-contrazioni le contrazioni ordinarie degli spazi metrici, cioè le trasformazioni $x' = \xi(x)$ per cui esiste una costante $k < 1$ tale che per ogni coppia x_1, x_2 di punti di Σ si abbia

$$(x_1', x_2') \leq k(x_1, x_2), \qquad x_i' = \xi(x_i)$$

le parentesi stando ad indicare la distanza tra i due punti di Σ.

Ci sarà comodo per il seguito, chiamare *modulo* di una α-contrazione ξ, il più piccolo valore non negativo di k, che indicheremo con k_ξ, per cui sussiste la (1) qualunque sia l'insieme X limitato di Σ.

Si vede allora che la classe delle trasformazioni completamente continue coincide con quella delle α-contrazioni di modulo nullo.

Si noti inoltre che l'insieme X_0 delle soluzioni dell'equazione

$$x = \xi(x),$$

ξ essendo una α-contrazione, è localmente compatto. Infatti, X_0 è chiuso; se H è una porzione limitata di X_0 è $H = \xi(H)$, per cui $\alpha(H) \leq k_\xi \alpha(H)$, ossia $\alpha(H) = 0$, donde la compattezza di H in Σ.

Facciamo osservare infine che ogni porzione limitata e chiusa X_1 di Σ che venga trasformata in sé da una α-contrazione ξ, contiene un insieme compatto (non vuoto) Y_0 coincidente con il proprio trasformato $\xi(Y_0)$. Infatti, posto $X_2 = = \xi(X_1)$, ..., $X_{n+1} = \xi(X_n)$, ..., si ottiene una successione decrescente d'insiemi chiusi limitati e non vuoti. Inoltre essendo $\alpha(X_{n+1}) \leq k_\xi \alpha(X_n)$ con $0 \leq k_\xi < 1$, si ha pure $\lim \alpha(X_n) = 0$ e per il teorema A) sarà $Y_0 = X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n ... ... = \lim X_n$, l'insieme compatto e non vuoto di cui sopra.

L'esistenza di un insieme compatto unito per una α-contrazione, non è in generale sufficiente per poter affermare senz'altre ipotesi, l'esistenza di punti uniti. Fino a questo momento però, non abbiamo fatto alcuna ipotesi sullo spazio metrico Σ oltre alla completezza. Vedremo in seguito come sia possibile giungere a un teorema di esistenza di punti uniti, nel caso che Σ sia uno spazio lineare normale completo.

3. - ALCUNI LEMMI SUGLI SPAZI LINEARI NORMALI. — Supporremo d'ora in avanti, che Σ sia uno *spazio lineare normale*, in cui, cioè è definita una *norma* per ogni elemento $x \in \Sigma$, che indicheremo con $||x||$, con le seguenti proprietà:

a) $||x|| \geq 0$, l'uguaglianza valendo solo per l'elemento nullo di Σ;

b) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

c) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

x e y essendo elementi di Σ e λ un numero reale.

Se X è un generico insieme di un tale spazio Σ, indicheremo con X^* l'involucro convesso di X, l'intersezione, cioè, di tutti gli insiemi convessi contenenti X.

Negli spazi lineari normali, vale il seguente

LEMMA I. - *Un insieme limitato X e il suo involucro convesso X^* hanno ugual diametro.*

Infatti, da $X \subset X^*$ segue $\delta(X) \leq \delta(X^*)$. Supponiamo allora, per assurdo, $\delta(X) < \delta(X^*)$: potremo trovare due punti x_1 e x_2 in X^* la cui distanza $\| x_1 - x_2 \|$ è maggiore di $\delta(X)$. Consideriamo la sfera S_1, di centro x_1 e raggio $\delta(X)$: se S_1 contiene X, allora $S_1 \cdot X^*$ è convesso, contiene X, ed è una parte propria di X^* poichè esclude il punto $x_2 \in X^*$, il che è assurdo. Se S_1 non contiene X, vi sarà un punto $\bar{x} \in X$ fuori di S_1. Allora la sfera $\bar{S}$ di centro $\bar{x}$ e raggio $\delta(X)$ contiene X ed esclude il punto $x_1 \in X^*$; si giunge così ugualmente ad un assurdo. Possiamo ora dimostrare, sempre nell'ipotesi che Σ sia uno spazio lineare normale il seguente

LEMMA II. - *Per ogni insieme limitato $X \subset \Sigma$ si ha $\alpha(X) = \alpha(X^*)$.*

Supponiamo X decomposto in parti $\{X_r\}$, $(r = 1, 2, \dots, n)$ di diametro $\delta(X_r) < \varepsilon$ essendo $\varepsilon > \alpha(X)$. Sarà anche $\delta(X_r) \leq \varepsilon' < \varepsilon$ per una scelta conveniente di ε' e quindi in virtù del lemma I, $\delta(X_r^*) \leq \varepsilon'$. Fissata una n-upla di numeri $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ e $\sum_1^n{}_i \lambda_i = 1$, che potremo considerare come un punto di un simplesso euclideo T, indichiamo con $Y(\lambda)$ l'insieme descritto dal punto

$$x = \Sigma_i \lambda_i x_i$$

al variare comunque dei punti x_i nei corrispondenti insiemi convessi X_i^*.

L'insieme $Y(\lambda)$, per ogni $\lambda \in T$ è di diametro non superiore a ε'; infatti se

$$x' = \Sigma_i \lambda_i x_i' \quad , \quad x_i' \in X_i^*,$$

$$x'' = \Sigma_i \lambda_i x_i'' \quad , \quad x_i'' \in X_i^*$$

sono punti di $Y(\lambda)$ si ha

$$\|x'-x''\| = \|\Sigma_i \lambda_i(x_i'-x_i'')\| \leq \Sigma_i \lambda_i \|x_i'-x_i''\| \leq \Sigma_i \lambda_i \delta(X_i^*) \leq \varepsilon' \Sigma_i \lambda_i = \varepsilon',$$

da cui segue $\delta[Y(\lambda)] \leq \varepsilon'$.

Ogni punto di X appartiene a un insieme $Y(\lambda)$ con λ convenientemente scelto in T. Invero, se è $\lambda_i = 0$ per $i \neq r$ e $\lambda_r = 1$, si ha $Y(\lambda) = X_r^* \supset X_r$, ed è $\sum_1^n {}_r X_r = X$.

Al variare di λ in T, $Y(\lambda)$ descrive un insieme convesso $Y(T)$ coincidente con X^*. Di fatto, siano x e y punti di $Y(T)$; allora si potrà scrivere $x = \Sigma_i \lambda_i x_i$, $y = \Sigma_i \mu_i y_i$ con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ punti di T e x_i, y_i scelti in X_i^*. Un punto z del segmento di estremi x, y è della forma

$$z = hx + ky \quad , \quad \text{con } h \geq 0,\ k \geq 0,\ h + k = 1$$

ed esprimibile mediante

$$z = \Sigma_i \, \theta_i z_i$$

con gli $z_i \in X_i^*$, scelti in modo che

$$\theta_i z_i = h\lambda_i x_i + k\mu_i y_i,$$

avendo posto $\theta_i = h\lambda_i + k\mu_i$. Sarà quindi $z \in Y(\theta)$ essendo $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in T$. L'insieme $Y(T)$ è convesso dunque. ed essendo $X \subset Y(T) \subset X^*$, dovrà coincidere con X^*.

D'altronde $Y(\lambda)$, come risulta da semplici considerazioni, è funzione di λ semicontinua superiormente, vale a dire, per ogni $\bar{\lambda} \in T$ e per ogni $\eta > 0$, si può trovare un intorno σ di $\bar{\lambda}$ tale che al variare di λ in σ risulti sempre

$$Y(\lambda) \subset [Y(\bar{\lambda})]_\eta .$$

Per il lemma di PINCHERLE-BOREL, sarà poi possibile ricoprire T con un numero finito di intorni $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots, \sigma^{(v)}$, di certi punti $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(v)}$ di T, tali che nel generico di essi si abbia

$$Y(\lambda) \subset [Y(\lambda^{(j)})]_\eta \quad \text{per } \lambda \in \sigma^{(j)}, \qquad (j = 1, 2, \dots, v)$$

Supponiamo di aver fissato $\eta = (\varepsilon - \varepsilon')/3$;

avremo

$$Y(\sigma^{(j)}) \subset [Y(\lambda^{(j)})]_\eta ,$$

da cui per le proprietà 1) e 2)

$$\delta\{Y(\sigma^{(j)})\} \leq \delta\{[Y(\lambda^{(j)})]_\eta\} \leq \delta\{Y(\lambda^{(j)})\} + 2\eta \leq \varepsilon' + 2\eta < \varepsilon.$$

Ma è

$$\sum_{1}^{v}{}_j\, Y(\sigma^{(j)}) = Y(T) = X^*,$$

quindi possiamo affermare che: *data una decomposizione di X in un numero finito di parti di diametro minore di ε, è possibile decomporre anche X^* in un numero finito di parti di diametro minore di ε.* Da ciò segue

$$\alpha(X^*) \leq \alpha(X) ,$$

e dovendo essere anche

$$\alpha(X) \leq \alpha(X^*) ,$$

si è dimostrato l'asserto.

4. - L'ESISTENZA DI PUNTI UNITI. — Ci sarà facile dimostrare ora il seguente

TEOREMA. - *Sia ξ una α-contrazione, definita in un insieme convesso e chiuso X di uno spazio lineare normale e completo Σ. Sia inoltre l'immagine $\xi(X)$ limitata e contenuta in X. In tali ipotesi esiste in X almeno un punto unito per la ξ.*

Indichiamo con X_1 la chiusura dell'involucro convesso dell'immagine di X; poniamo cioè

$$X_1 = \overline{\{\xi(X)\}^*}.$$

Per le ipotesi fatte sarà $X_1 \subset X$. In modo ricorrente costruiamo la successione decrescente d'insiemi convessi chiusi e limitati.

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots \tag{2}$$

ponendo, per ogni intero positivo n

$$X_{n+1} = \overline{\{\xi(X_n)]\}^*}.$$

Se k_ξ è il modulo dell'α-contrazione ξ, si avrà per la proprietà 3) e in virtù del lemma II

$$\alpha(X_{n+1}) = \alpha[\xi(X_n)] \leq k_\xi \alpha(X_n).$$

Di qui si ricava

$$\alpha(X_n) \leq k_\xi^{n-1}\, \alpha(X_1),$$

e infine

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(X_n) = 0.$$

La successione (2), per il teorema A), avrà dunque una intersezione $Y_0 = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_n \ \ldots$, non vuota e compatta. Sarà pure Y_0 convesso, tali essendo gli X_n. Inoltre dalla relazione $\xi(X_n) \subset X_n$, segue

$$\xi(Y_0) \subset Y_0 .$$

Per il citato teorema dello SCHAUDER esisterà in Y_0, e perciò in X, un punto unito $x_0 = \xi(x_0)$.

5. - In vista di applicazioni del precedente teorema potrà esser utile il seguente

TEOREMA DI CONFRONTO. - *Se ξ è una α-contrazione definita in uno spazio metrico Σ, e η una trasformazione nello stesso spazio, tale che per ogni coppia x_1, x_2 di punti di Σ si abbia*

$$(\eta(x_1),\ \eta(x_2)) \leq (\xi(x_1),\ \xi(x_2))\,, \tag{3}$$

anche η è una contrazione, di modulo $k_\eta \leq k_\xi$

Osserviamo intanto che dalla (3) segue che η è continua e trasforma insiemi limitati in insiemi limitati.

Sia X un qualunque insieme limitato di Σ ed ε un numero positivo. Posto $X' = \xi(X)$ e $X'' = \eta(X)$, decomponiamo X' in un sistema finito di parti X'_r di diametro $\delta(X'_r) \leq \leq \alpha(X') + \varepsilon \leq k_\xi\, \alpha(X) + \varepsilon$. Detto X_r l'insieme dei punti x di X tali che $\xi(x) \in X'_r$, sarà $X = \Sigma_r X_r$ e per la (3)

$$\delta[\eta(X_r)] \leq \delta[\xi(X_r)] \leq k_\xi \alpha(X) + \varepsilon.$$

Avremo così decomposto X'' in un numero finito di parti $\eta(X_r)$, di diametro non superiore a $k_\xi\, \alpha(X) + \varepsilon$, per cui dovrà aversi

$$\alpha(X'') \leq k_\xi \alpha(X) + \varepsilon,$$

donde, per l'arbitrarietà di ε

$$\alpha(X'') \leq k_\xi \alpha(X),$$

e di qui il teorema enunciato.

PRODOTTI FUNZIONALI DI α-CONTRAZIONI. - Sussiste il seguente teorema, di cui tralasciamo la ovvia dimostrazione:

Siano ξ e η due α-contrazioni in uno spazio metrico Σ, allora il prodotto funzionale $\theta = \xi\eta$ (definito ponendo $\theta(x) = \xi[\eta(x)]$ è pure una α-contrazione ed è $k_\theta \leq k_\xi \cdot k_\eta$.

COMBINAZIONI LINEARI DI α-CONTRAZIONI NEGLI SPAZI LINEARI NORMALI. - Dimostriamo infine il teorema seguente:

Se $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sono α-contrazioni in uno spazio lineare normale Σ, la trasformazione

$$\xi(x) = \Sigma_i \lambda_i \xi_i(x), \qquad (\lambda_i \text{ costanti reali})$$

è una α-contrazione qualora sia $\sum_1^n {}_i |\lambda_i| k_{\xi_i} < 1$, ed è $k_\xi \leq \sum_1^n {}_i |\lambda_i| k_{\xi_i}$.

Sia X un insieme limitato di Σ, ε positivo arbitrario. Potremo decomporre X in un sistema finito di parti X_r in modo che risulti simultaneamente per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, e per ogni r

$$\delta\{\xi_i(X_r)\} \leq \alpha[\xi_i(X)] + \varepsilon \leq k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon.$$

Allora per ogni coppia di punti x_1, x_2 di X_r sarà

$$\|\xi(x_1) - \xi(x_2)\| = \|\Sigma_i \lambda_i \xi_i(x_1) - \Sigma_i \lambda_i \xi_i(x_2)\| \leq \Sigma_i |\lambda_i| \cdot \|\xi_i(x_1) - \xi_i(x_2)\| \leq$$
$$\leq \Sigma_i |\lambda_i| \, \delta\{\xi_i(X_r)\} \leq \Sigma_i |\lambda_i| (k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon),$$

ossia

$$\delta[\xi(X_r)] \leq \Sigma_i |\lambda_i| (k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon).$$

Si è decomposto così $\xi(X)$ in un sistema finito di parti $\xi(X_r)$ di diametro non superiore a $\Sigma_i |\lambda_i| (k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon)$ da cui, tenendo presente l'arbitrarietà di ε, segue facilmente il teorema.