RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Maggiorazioni delle componenti di stress nel problema di De Saint-Venant

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 70-83

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__70_0>

MAGGIORAZIONI DELLE COMPONENTI DI STRESS NEL PROBLEMA DI DE SAINT-VENANT

Nota (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Padova*)

Si considera il problema di DE SAINT-VENANT relativo al caso della torsione e della flessione non uniforme di un solido elastico cilindrico isotropo, avente per sezione normale un campo C semplicemente connesso, il cui contorno soddisfa a qualche ipotesi di regolarità e si determinano maggiorazioni funzionali delle componenti di stress. Ci si vale di alcune formule di maggiorazione per il problema di Dirichlet dovute al prof. G. CIMMINO. I valori maggioranti i massimi moduli delle componenti non nulle di stress coincidono, nel caso che la sezione sia circolare, proprio con i massimi dei moduli delle stesse componenti.

1. - PREMESSE AL CASO DELLA TORSIONE.

Si consideri un solido elastico cilindrico. Come è ben noto [1]), assunto un sistema di riferimento con l'asse z parallelo alle generatrici del cilindro, il metodo semi-inverso di DE SAINT-VENANT riduce il problema della torsione alla ricerca di una funzione $\Phi(x, y)$, definita nei punti della sezione $\mathcal{C}$, ove soddisfa alla equazione

$$\Delta_2 \Phi = -K, \tag{1}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 15 ottobre 1954.

1) Cfr. TIMOSCHENKO: *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill Book Company. New York and London, 1934, p. 230 e seg.

essendo K una costante indeterminata a priori, e annullantesi sulla frontiera, Σ, di $\mathcal{C}$. Supposto inoltre assegnato il momento torcente M_t applicato ad una delle basi, la Φ soddisfa alla condizione integrale

$$M_t = 2 \int_{\mathcal{C}} \Phi dx dy. \tag{2}$$

Una volta determinata tale funzione Φ le componenti non nulle di stress sono date da

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{3}$$

Come si sa, il principio di approssimazione di DE SAINT-VENANT ci assicura che questa soluzione del problema può ritenersi praticamente esatta per quanto riguarda i punti sufficientemente lontani dalle basi.

Ogni limitazione del massimo modulo delle derivate della Φ espressa solo in funzione del momeno torcente M_t e della forma della sezione $\mathcal{C}$, porge una limitazione superiore per il massimo sforzo nel criterio di approssimazione di DE SAINT-VENANT.

2. - UN LIMITE INFERIORE PER LA RIGIDITÀ TORSIONALE.

Siano dunque, come già detto, $\mathcal{C}$ la sezione normale del cilindro e Σ la sua frontiera. Sulla forma di $\mathcal{C}$ e Σ non facciamo per ora nessuna ipotesi oltre a quella che il campo $\mathcal{C}$ sia semplicemente connesso. Siano $E_1, E_2, \dots, E_n$ n-ellissi, prive di punti interni in comune e senza punti esterni a $\mathcal{C}$ e siano a_r, b_r i semiassi della generica E_r.

Osserviamo che poichè la Φ si annulla su Σ e il suo Δ_2 è costante, essa conserverà in $\mathcal{C}$ sempre il medesimo segno poichè non potrà avere il massimo e il minimo ambedue in punti di $\mathcal{C}$ esterni a Σ.

Non sarà restrittivo supporre nel seguito, insieme ad $M_t \geq 0$, $k \geq 0$; allora Φ sarà non negativa in tutto $\mathcal{C}$.

Sarà quindi

$$\int_{\mathcal{C}} \Phi dxdy \geq \Sigma_r \int_{E_r} \Phi dxdy. \tag{4}$$

Consideriamo ora la generica E_r. In E_r la Φ soddisfa ancora alla (1) e sulla frontiera Σ_r di E_r essa è positiva o nulla.

Decomponiamo, in E_r, la Φ nella somma di due funzioni:

$$\Phi = u_r + v_r \tag{5}$$

soddisfacenti alle

$$\begin{cases} \Delta_2 u_r = -K & (\text{in } E_r), \quad u_r = 0 \quad (\text{su } \Sigma_r), \\ \Delta_2 v_r = 0 & (\text{in } E_r), \quad v_r = \Phi \quad (\text{su } \Sigma_r). \end{cases} \tag{6}$$

Allora, come ben si sa,

$$u_r = -\frac{K a_r^2 b_r^2}{2(a_r^2 + b_r^2)} \left(\frac{x_r^2}{a_r^2} + \frac{y_r^2}{b_r^2} - 1 \right), \tag{7}$$

ove x_r, y_r sono le coordinate di un generico punto di E_r rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale con l'origine nel centro di E_r, e con gli assi coincidenti con gli assi dell'ellisse E_r.

D'altra parte da (6_2), ricordando che, in $\mathcal{C}$, Φ è non negativa, si ha

$$v_r \geq 0. \tag{8}$$

Basta ora tener conto di (5), (7) per ricavare

$$2 \int_{E_r} \Phi dxdy = \frac{K a_r^3 b_r^3 \pi}{2(a_r^2 + b_r^2)} + 2 \int_{E_r} v dxdy, \tag{9}$$

e quindi tenuto conto di (8)

$$2 \int_{Er} \Phi dxdy \geq \frac{\pi}{2} \Sigma_r \frac{K a_r^3 b_r^3}{(a_r^2 + b_r^2)}. \tag{10}$$

In base a (2) possiamo concludere questo numero con la relazione

$$M_t \geq \frac{\pi K}{2} \Sigma_r \frac{a_r^3 b_r^3}{a_r^2 + b_r^2} \tag{11}$$

che si traduce

$$0 \leq K \leq \frac{2M_t}{\pi} \left(\Sigma_r \frac{a_r^3 b_r^3}{a_r^2 + b_r^2} \right)^{-1} . \tag{12}$$

La (12) porge anche un limite inferiore per la rigidità torsionale $\frac{M_t}{K}$, limite che può fornire il valore effettivo della stessa rigidità nel caso della sezione ellittica qualora l'insieme delle ellissi E_r coincida con la sezione stessa.

3. - Impostazione del problema.

Supponiamo che il contorno Σ ammetta una rappresentazione in coordinate polari del tipo

$$\rho = \alpha(\theta) \tag{13}$$

con $\alpha(\theta)$ periodica di periodo 2π e sempre positiva. Si supponga inoltre che $\alpha(\theta)$ ammette le derivate dei primi tre ordini limitate e che il raggio di curvatura non si annulli in nessun punto del contorno Σ.

Dovendo risolvere il problema

$$\Delta_2 \Phi = -K \quad (\text{in } \mathcal{C}), \quad \Phi = 0 \quad (\text{su } \Sigma), \tag{14}$$

poniamo

$$\Phi = -\frac{K}{4}(x^2 + y^2) + \psi . \tag{15}$$

Ci ridurremo quindi al problema

$$\Delta_2 \psi = 0 \qquad (\text{in } \mathcal{C}), \quad \psi = \frac{K}{4}(x^2 + y^2) \quad (\text{su } \Sigma). \tag{16}$$

Nelle ipotesi ammesse nei riguardi del secondo membro di (13), otterremo limitazioni per le derivate della funzione ψ, risolvente il sistema (16), giovandoci di risultati del Prof. G. CIMMINO[2]), sulle funzioni armoniche, conseguiti col metodo delle funzioni super e subarmoniche. Ogni maggiorazione dei massimi moduli delle derivate parziali di ψ fornisce una maggiorazione dei massimi moduli delle derivate parziali di Φ, cioè una maggiorazione dei massimi moduli delle componenti di stress.

Notiamo che, poichè la derivata di Φ lungo Σ è nulla, basta maggiorare il massimo modulo della derivata normale per avere una maggiorazione del massimo modulo delle derivate parziali di Φ sulla frontiera Σ.

Basta poi osservare che le derivate parziali di Φ sono funzioni armoniche e che le τ_{xz}, τ_{yz} sono massime su Σ per poter concludere che una tale maggiorazione della derivata normale di Φ su Σ è atta a fornire una maggiorazione del massimo modulo delle componenti di stress.

4. - FORMA ESPLICITA DI ALCUNE MAGGIORAZIONI RELATIVE AL PROBLEMA (16).

Cominciamo con il richiamare i risultati dal prof. G. CIMMINO. Si denoti con $u(P)$ una funzione, del generico P di $\mathfrak{C}$, nulla sul contorno Σ, il cui $\Delta_2 u$ ammetta in $\mathfrak{C}$ un massimo negativo $-M$.

Si indicano poi con v_1 e v_2 due funzioni di P, assumenti su Σ i valori di ψ e tali che $\Delta_2 v_1$ sia limitato inferiormente da una costante negativa o nulla $-M_1$, e $\Delta_2 v_2$ sia limitato superiormente da una costante positiva o nulla M_2.

Valgono allora le seguenti disuguaglianze

$$\frac{dv_1}{dn} - \frac{M_1}{M}\frac{du}{dn} \leq \frac{d\psi}{dn} \leq \frac{dv_2}{dn} + \frac{M_2}{M}\frac{du}{dn}. \tag{16}$$

[2]) G. CIMMINO: *Formule di maggiorazione nel problema di Dirichlet per le funzioni armoniche.* «Rend. Sem. Mat. Un. Padova», 1932, vol. III. p. 46-66.

Sarà utile assumere u in modo tale che risulti piccolo il rapporto $\frac{1}{M}\frac{du}{dn}$.

Si sa determinare[3]) una funzione u, nulla sul contorno, a derivata normale unitaria e tale che il relativo $\Delta^2 u$, sempre negativo, soddisfi alla

$$\max \Delta_2 u = -\frac{S_0(2R_0 - S_0)}{2R_0} \tag{17}$$

ove si denoti con R_0 il massimo dei raggi di curvatura, presi questi con il segno $+$ o $-$ a seconda che il vettore che va dal punto generico al centro del cerchio osculatore è diretto verso l'interno o verso l'esterno di $\mathcal{C}$, e con S_0 il raggio del massimo cerchio tutto contenuto in $\mathcal{C}$. È da notare che se R_0 è positivo e limitato, S_0 è certamente inferiore ad R_0. Se $R_0 = +\infty$, e ciò succede certamente se la curva Σ ha almeno un punto di flesso, la (17) diventa

$$\max \Delta_2 u = -\frac{1}{S_0}. \tag{18}$$

In corrispondenza a questa u risulterà in generale

$$\frac{1}{M}\frac{du}{dn} = \left|\frac{1}{\max \Delta_2 u}\frac{du}{dn}\right| = \frac{S_0}{2}\left(2 - \frac{S_0}{R_0}\right). \tag{19}$$

Tenuto conto di (19) la (16) porge

$$\frac{dv_1}{dn} - \frac{M_1 S_0}{2}\left(2 - \frac{S_0}{R_0}\right) \leq \frac{d\psi}{dn} \leq \frac{dv_2}{dn} + \frac{M_2 S_0}{2}\left(2 - \frac{S_0}{R_0}\right). \tag{20}$$

Siano ρ^1 e ρ^2 il minimo ed il massimo di $\alpha(\theta)$, ρ' il massimo di $|\alpha'(\theta)|$ e ρ_1'', ρ_2'' il minimo ed il massimo di $\alpha''(\theta)$.

Assumiamo, in base a loco cit. in nota[2])

$$v_i = \frac{K}{4}\left\{\rho\left(\alpha - \frac{\rho_i^2}{\alpha}\right) + \rho_i^2\right\} \qquad (i = 1, 2). \tag{21}$$

[3]) Cfr. loco citato in 2.

Avremo, in corrispondenza,

$$\Delta_2 v_i = \frac{K}{4}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\alpha - \frac{\rho_i^2}{\alpha}\right) + \rho\left(\alpha - \frac{\rho_i^2}{\alpha}\right)''\right\}, \tag{22}$$

e inoltre

$$\frac{dv_i}{dn} = \frac{K}{4(\alpha^2 + \alpha'^2)^{1/2}}\left\{\alpha'\left(\alpha - \frac{\rho_i^2}{\alpha}\right)' - \alpha^2 + \rho_i^2\right\}. \tag{23}$$

Esplicitando la (22) si ha

$$\Delta_2 v_i = \frac{K}{4}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\alpha - \frac{\rho_i^2}{\alpha}\right) + \rho\left[\alpha''\left(1 + \frac{\rho_i^2}{\alpha^2}\right) - 2\alpha'^2\frac{\rho_i^2}{\alpha^3}\right]\right\}, \tag{24}$$

e si osserva subito che, essendo $\alpha - \dfrac{\rho_i^2}{\alpha}$ sempre negativo, sarà

$$\max \Delta_2 v_2 \leq \frac{K}{4}\rho_2\rho_2''\left(1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1}\right), \tag{25}$$

mentre, poichè è sempre $\alpha - \dfrac{\rho_1^2}{\alpha} \geq 0$.

$$\min \Delta_2 v_1 \geq -\frac{K}{4}\rho_2\left(|\rho_1''| + \frac{\rho'^2}{\rho_1}\right). \tag{26}$$

Dalle (23) si ha inoltre

$$\frac{dv_2}{dn} = \frac{K}{4(\alpha^2 + \alpha'^2)^{1/2}}\left\{\rho_2^2 - \alpha^2 + \alpha'^2\left(1 + \frac{\rho_2^2}{\alpha^2}\right)\right\}, \tag{27}$$

e quindi

$$\frac{dv_2}{dn} \leq \frac{K}{4\rho_1}\left\{\rho_2^2 - \rho_1^2 + \rho'^2\left(1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}\right)\right\}. \tag{28}$$

Sempre da (23) per $i = 1$ si ha

$$\frac{dv_1}{dn} = \frac{K}{4(\alpha^2 + \alpha'^2)^{1/2}}\left\{\rho_1^2 - \alpha^2 + \alpha'^2\left(1 + \frac{\rho_1^2}{\alpha^2}\right)\right\}, \tag{29}$$

e quindi

$$\frac{dv_1}{dn} > -\frac{K}{4\rho_1}(\rho_2^2 - \rho_1^2). \tag{30}$$

Le (20) porgono allora tenuto conto di (25), (26), (28), (30)

$$(31) \qquad -\frac{K}{4}\left\{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho_1}+S_0\left(2-\frac{S_0}{R_0}\right)\rho_2\left(|\rho_1''|+\frac{\rho'^2}{\rho_1}\right)\right\}\leq\frac{d\psi}{dn}\leq$$

$$\leq\frac{K}{4}\left\{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho_1}+\frac{\rho'^2}{\rho_1}\left(1+\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}\right)+\frac{S_0}{2}\left(2-\frac{S_0}{R_0}\right)\rho_2\rho_2''\left(1+\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}\right)\right\}$$

che è la disuguaglianza che ci eravamo proposti di ottenere.

5. - FORMULE DI MAGGIORAZIONE NEL PROBLEMA DELLA TORSIONE.

Per stabilire le preannunciate formule di maggiorazione per lo stato tensionale nel caso della torsione il passo è breve.

Osserviamo intanto che

$$\frac{d}{dn}\left\{-\frac{K}{4}(x^2+y^2)\right\}=-\frac{K}{2}(x\cos xn+y\cos yn),,$$

e quindi

$$(32) \qquad -\frac{K\rho_2}{2}\leq\frac{d}{dn}\left\{-\frac{K}{4}(x^2+y^2)\right\}\leq\frac{K\rho_2}{2}.$$

Da (15) poi, tenuto conto di (31), e (32) si ha

$$(33) \qquad -\frac{K}{4}\left\{\frac{\rho_2^2+\rho_1\rho_2-\rho_1^2}{2}+S_0\left(2-\frac{S_0}{R_0}\right)\rho_2\left(|\rho_1''|+\frac{\rho'^2}{\rho_1}\right)\right\}\leq\frac{d\Phi}{dn}\leq$$

$$\leq\frac{K}{4}\left\{\frac{\rho_2^2+\rho_1\rho_2-\rho_1^2}{\rho_1}+\frac{\rho'^2}{\rho_1}\left(1+\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}\right)+\frac{S_0}{2}\left(2-\frac{S_0}{R_0}\right)\rho_2\rho_2''\left(1+\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}\right)\right\}.$$

Ricordando ora che $\frac{d\Phi}{ds}=0$, otterremo

$$(34) \qquad \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|\leq\left|\frac{d\Phi}{dn}\right|\max \quad , \quad \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|\leq\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|\max$$

e quindi τ_{xz} e τ_{yz} soddisferanno alle disuguaglianze

$$(35) \qquad |\tau_{xz}|\leq\left|\frac{d\Phi}{dn}\right|\max \quad , \quad |\tau_{yz}|\leq\left|\frac{d\Phi}{dn}\right|\max .$$

La (33) e la (12) forniscono un valore maggiorante il massimo di $\left|\frac{d\Phi}{dn}\right|$ cioè un valore maggiorante il massimo di τ_{xz} e di τ_{yz}

È di facile verifica che tale valore maggiorante coincide proprio con il massimo modulo di τ_{xz} e di τ_{yz} qualora la sezione sia circolare.

Si deve dunque ritenere che le disuguaglianze stabilite sono tanto più efficaci quanto più la sezione si avvicina a quella circolare. Osserviamo anche che le maggiorazioni ottenute non dipendono dalla natura del materiale di cui è costituito il cilindro. Esse hanno quindi carattere puramente geometrico.

6. - Caso della flessione non uniforme.

Riferiamo il cilindro ad una terna di riferimento con l'asse coincidente con l'asse dei baricentri delle sezioni, l'origine nel baricentro della base vincolata, gli assi x, y coincidenti con gli assi centrali d'inerzia della sezione.

La sollecitazione in una delle sezioni terminali equivalga ad una forza unica P parallela e concorde con l'asse x ed applicata in un generico punto Q. A questo caso ci si può sempre ricondurre per il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti se P non è parallela ad uno degli assi centrali della sezione del cilindro, basterà decomporla secondo le loro direzioni.

Supponiamo dapprima che la retta di azione di P passi per il centro di torsione in modo che la flessione non sia accompagnata da torsione. In un secondo tempo ci libereremo da questa ipotesi restrittiva.

Denotiamo con l la lunghezza del cilindro, con I il momento d'inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto ad y, con ν il modulo di Poisson.

Se $\Phi(x, y)$, $f(y)$ sono due funzioni soddisfacenti alle

$$(36)\qquad \begin{cases} \Delta_2\Phi = \dfrac{\nu}{1+\nu}\dfrac{P}{I}y - \dfrac{df}{dy} & \text{in } \mathcal{C} \\[2ex] \dfrac{d\Phi}{ds} = \dfrac{dy}{ds}\left(\dfrac{Px^2}{2I} - f\right) & \text{su } \Sigma \end{cases}$$

le componenti non nulle di stress, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} sono fornite dalle

$$(37)\qquad \sigma_z = -\frac{P}{I}(l-z)x,\quad \tau_{xz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + f(y),\quad \tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,.$$

Sia ora $\rho = \alpha(\theta)$ l'equazione del contorno riferita ad un sistema polare con l'origine in G e l'asse polare coincidenti con l'asse x. Sarà ovviamente $\alpha(\theta+2\pi) = \alpha(\theta)$.

Supponiamo $\alpha(\theta) > 0$ e siano, come prima, ρ_1, ρ_2, $(\rho_1''$, $\rho_2'')$ il minimo e il massimo rispettivamente di $\alpha(\theta)$, $(\alpha''(\theta))$. Con ρ' denotiamo infine il massimo di $|\alpha'(\theta)|$.

Poniamo

$$(38)\qquad r^2 = \frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{2},\qquad f(y) = \frac{P}{2I}(r^2-y^2).$$

Allora le (36) porgono

$$(39)\qquad \begin{cases} \Delta_2\Phi = \dfrac{1+2\nu}{1+\nu}\dfrac{P}{I} & (\text{in } \mathfrak{C}),\\[2ex] \Phi = \displaystyle\int_0^\theta \frac{P}{2I}(\alpha^2-r^2)(\alpha\cos\theta+\alpha'\operatorname{sen}\theta)d\theta & (\text{su } \Sigma), \end{cases}$$

la seconda e terza delle (37) danno

$$(40)\qquad \tau_{xz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{P}{2I}(x^2+y^2-r^2),\qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

Con la ulteriore posizione

$$(41)\qquad \Phi = \psi + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\frac{P}{I}(x^2+y^2-r^2)y,$$

le (39) diventano

$$(42)\qquad \begin{cases} \Delta_2\psi = 0 \qquad (\text{in } \mathfrak{C}),\\[1ex] \psi = \dfrac{P}{8I}\dfrac{3+2\nu}{1+\nu}(\alpha^2-r^2)\alpha\operatorname{sen}\theta - \dfrac{P}{I}\displaystyle\int_0^\theta \alpha^2\alpha'\operatorname{sen}\theta d\theta = \\[1ex] \qquad\qquad = \psi_0(\theta)\ (\text{su } \Sigma), \end{cases}$$

mentre delle (40) si ha

$$
(43) \qquad \begin{cases} \tau_{xz} = \dfrac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \dfrac{P}{I}\left(r^2 - x^2 - \dfrac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2\right) \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \tau_{yz} = -\dfrac{1+2\nu}{4(1+\nu)} \dfrac{P}{I} xy - \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}
$$

Ci serviranno in seguito le derivate prima e seconda di $\psi_0(\theta)$.

A calcoli eseguiti, posto $\lambda = \dfrac{3+2\nu}{8(1+\nu)}$, si ha

$$
(44) \qquad \begin{cases} \psi_0' = \dfrac{P}{I}[\alpha' \operatorname{sen}\theta(3\lambda - 1)\alpha^2 - \lambda r^2) + \lambda\alpha\cos\theta(\alpha^2 - r^2)] \\ \psi_0'' = \dfrac{P}{I}\{[2(3\lambda - 1)\alpha\alpha'^2 + (2\lambda - 1)\alpha^2\alpha'' + \lambda(\alpha^2 - r^2)(\alpha'' - \\ \qquad - \alpha)] \operatorname{sen}\theta + [(4\lambda - 1)\alpha^2\alpha' + 2\lambda\alpha'(\alpha^2 - r^2)\cos\theta]\}. \end{cases}
$$

Tenute presenti le posizioni fatte sopra si hanno dalle (42) e (44) le seguenti disuguaglianze

$$
(45) \qquad \begin{cases} |\psi_0| \leq \dfrac{P}{I}\left(\dfrac{\lambda}{2}\rho_2(\rho_2^2 - \rho_1^2) + 4\rho_2^2\rho'\right) = \bar{\psi}_0 \\ |\psi_0'| \leq \dfrac{P}{I}\left\{\left(\dfrac{1+6\nu}{8(1+\nu)}\rho_1^2 + \lambda\rho_2^2\right)^2 + \dfrac{\lambda^2}{4}(\rho_2^2 - \rho_1^2)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \bar{\psi}_0' \\ |\psi_0''| \leq \dfrac{P}{I}\left\{\left[2(3\lambda - 1)\rho_2\rho'^2 + (2\lambda - 1)\rho_2^2\rho_2'' + \dfrac{\lambda}{2}(\rho_2^2 - \right.\right. \\ \qquad \left.\left. - \rho_1^2)(\rho_2'' + \rho_2)\right] + \left[\dfrac{10\lambda - 1}{2}\rho_2^2 - \lambda\rho_1^2\right]^2 \rho'^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \bar{\psi}_0''. \end{cases}
$$

Volendo applicare al problema (42) le formule (20) assumiamo

$$
(46) \qquad \begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{\alpha}(\psi_0 - \bar{\psi}_0) + \bar{\psi}_0, \\ v_1 = \dfrac{1}{\alpha}(\psi_0 + \bar{\psi}_0) - \bar{\psi}_0. \end{cases}
$$

Maggiorando come nel n. 4 i moduli dei $\Delta_2 v_i$ e le derivate normali $\dfrac{dv_i}{dn}$ si ottiene infine

$$\left|\frac{d\psi}{dn}\right| \leq \frac{1}{\rho_1}\left(\rho' \frac{\bar{\psi}_0'}{\rho_1} + 2\bar{\psi}_0\right) + \frac{S_0\rho_2}{2\rho_1^2}\left(2 - \frac{S_0}{R_0}\right)(\bar{\psi}_0'' + 2\rho_2''\bar{\psi} + + 2\rho'^2\bar{\psi}_0') = \bar{\psi}_n . \tag{47}$$

Basta tener presente che scelta una generica direzione p risulta

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial p}\right| \leq \left\{\left|\frac{d\psi}{ds}\right|^2 + \left|\frac{d\psi}{dn}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

per ottenere le formule di maggiorazione per le derivate parziali $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$.

Notiamo che

$$\left|\frac{d\psi}{ds}\right| = \left|\frac{d\psi_0}{d\theta}\right| \frac{1}{(\alpha^2 + \alpha'^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{\rho_1}\bar{\psi}_0' , \tag{49}$$

mentre la (48) porge per la derivata nella generica direzione p

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial p}\right| \leq \left\{\frac{\bar{\psi}_0'}{\rho_1^2} + \bar{\psi}_n^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \bar{\psi}_p . \tag{50}$$

Il secondo membro di (50) dà il limite superiore per le derivate $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ in tutto $\mathfrak{C}$ e quindi, tenute presenti le (43) fornisce le

$$\begin{cases} \left|\tau_{xz} - \dfrac{3+2\nu}{8(1+\nu)}\,\dfrac{P}{I}\left(r^2 - x^2 - \dfrac{1-2\nu}{3+2\nu}y^2\right)\right| \leq \bar{\psi}_p \\ \left|\tau_{yz} + \dfrac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\,\dfrac{P}{I}\,xy\right| \leq \bar{\psi}_p . \end{cases} \tag{51}$$

È facile verificare che $\bar{\psi}_p = 0$ se $\rho_1 = \rho_2$ e quindi se $\alpha' = = \alpha'' = 0$ cioè se la sezione è circolare.

7 6

7. - UNA LIMITAZIONE SUPERIORE PER LA DISTANZA DEL CENTRO DI TORSIONE DI $\mathfrak{C}$ DAGLI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA.

Volendo completare le formule di maggiorazione lasciamo cadere l'ipotesi restrittiva che l'asse centrale della sollecitazione esterna agente in una delle basi terminali passi per il centro di torsione e sia δ la distanza di questa retta dal baricentro G di C.

Denotiamo con $\mathfrak{J}$ il seguente integrale doppio

$$\mathfrak{J} = \frac{P}{4(1+\nu)I}\int_{\mathfrak{C}}(2x^2y - (1-2\nu)y^3)dxdy \tag{52}$$

e calcoliamo in base a (43) il momento degli sforzi di taglio agenti sulla generica sezione rispetto all'asse z.

Si ha con facili calcoli

$$M_z = \mathfrak{J} - \int_{\mathfrak{C}}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy \tag{53}$$

che porge

$$M_z = \mathfrak{J} + 2\int_{\mathfrak{C}}\psi dxdy - \int_{\Sigma}\psi(xdy - ydy). \tag{54}$$

Da quest'ultima si ha immediatamente, ($\mathfrak{C}$ denotando anche l'area della sezione) tenuto conto di (45_1)

$$M_z \leq \mathfrak{J} + 3\bar{\psi}_0\mathfrak{C} = \mathfrak{J} + \frac{3P\mathfrak{C}}{I}\left(\frac{\lambda\rho_2^2}{2}(\rho_2^2 - \rho_1^2) + 4\rho_2^2\rho'\right) = \overline{M}_z. \tag{55}$$

Si avrà così che il valore assoluto della distanza d del centro di torsione dall'asse x soddisfa alla seguente relazione

$$O \leq d \leq \frac{\overline{M}_z}{\delta}. \tag{56}$$

Infine per avere i limiti superiori per i massimi moduli di τ_{xz}, τ_{yz} nel caso di una sollecitazione sulla base terminale, equivalente ad una forza P parallela e concorde all'asse x, la cui retta di azione dista, in valore assoluto, δ da G, basterà aggiungere ai limiti superiori forniti dalle 51), i limiti superiori dati da (35), (33) relativi alla sollecitazione torsionale corrispondente ad un momento M_t che vale

$$M_t = \overline{M}_z + P\delta = P(d + \delta). \tag{57}$$

Il secondo membro di (57) può essere sostituito con il prodotto di P per il maggiore dei due segmenti d e δ, e quindi le maggiorazioni possono essere migliorate, qualora si possa, in qualche modo, riconoscere che la retta d'azione di P e il centro di torsione stanno dalla stessa banda rispetto all'asse x.

Finiremo osservando che le formule di maggiorazioni (55), (56) sono verificate come uguaglianze nel caso che la sezione sia circolare.