RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Semianelli complementarizzabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 474-509

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__474_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SEMIANELLI COMPLEMENTARIZZABILI

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Nel § 1 si introduce anzitutto il concetto di anello complementare (sinistro) $\mathcal{A}$ di un semianello dato S (non necessariamente commutativo) rispetto ad un suo sottinsieme M, moltiplicativamente chiuso, di elementi semplificabili (per le definizioni qui adottate si vedano i n.i seguenti, in particolare il n.° 1).

Si dimostra quindi un teorema (n.° 2) che dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè S sia complementarizzabile (a sinistra) rispetto ad M, cioè affinchè esista l'anello $\mathcal{A}$ (che risulta individuato da S ed M a meno di isomorfismi).

In particolare, se S è un anello, $\mathcal{A}$ non è altro che l'anello dei quozienti (a sinistra) di S rispetto ad M, e si ritrova allora (n.° 8) un teorema di ASANO ([1] [1])), che generalizza un noto risultato di ORE ([6]; cfr. [2], p. 147).

La costruzione, qui adottata, dell'anello complementare $\mathcal{A}$ contiene come caso particolare una costruzione diretta (senza cioè l'intervento intermediario dell'anello dei numeri interi) del corpo dei numeri razionali a partire dal semianello dei numeri naturali, che fornisce una (presumibilmente nuova) definizione di numero razionale come classe di equivalenza di terne ordinate di numeri naturali (n.i 9, 10).

(*) Pervenuta in Redazione il 12 maggio 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

Nel § 2 si considera un analogo problema di immersione per uno pseudoanello P contenente un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili (sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione), problema che conduce alla nozione di pseudoanello complementare (sinistro, in senso stretto) $\mathfrak{S}$ di P rispetto a Π.

Imponendo al sottinsieme Π di P un'ulteriore restrizione, si trova, per l'esistenza di $\mathfrak{S}$, una condizione necessaria e sufficiente analoga alla precedente (n.° 12).

§ 1

1. - Sia P un insieme (non vuoto) in cui siano definite due operazioni (univoche) binarie, addizione e moltiplicazione, che ad ogni coppia ordinata (a, b) con $a, b \in P$ facciano corrispondere una somma $a + b \in P$ ed un prodotto $ab = a \cdot b \in P$. Se queste due operazioni godono delle proprietà seguenti (qualunque siano $a, b, c \in P$):

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a,$$
$$(ab)c = a(bc),$$
$$(a + b)c = ac + bc, \qquad c(a + b) = ca + cb,$$

(se cioè l'addizione è associativa e commutativa, e la moltiplicazione associativa e distributiva — a destra e a sinistra — rispetto all'addizione), diremo che P è uno *pseudoanello*. Questo si dirà poi *commutativo*, se la moltiplicazione è inoltre commutativa $(ab = ba)$.

Dunque uno pseudoanello è uno pseudogruppo rispetto alla moltiplicazione ed uno pseudogruppo commutativo rispetto all'addizione (denotandosi qui con *pseudogruppo* ogni insieme in cui sia definita una operazione binaria associativa — cfr. ad es. [4], p. 117 —).

Indicando con $f(a, b)$ il risultato dell'operazione sulla coppia ordinata (a, b) di elementi di uno pseudogruppo Q qualsiasi, ricorderemo (cfr. ad es. [3], p. 22) che per elemento identico s'intende un $e \in Q$ tale che $f(e, a) = f(a, e) = a$ per ogni $a \in Q$; questo e, se esiste, è unico. Ricorderemo inoltre che, se tale elemento identico esiste, per inverso di un $a \in Q$

s'intende un $a' \in Q$ tale che $f(a', a) = f(a, a') = e$; anche a', se esiste, è unico. Per gli eventuali elemento identico ed inverso rispetto ad una qualsiasi delle due operazioni di uno pseudoanello P, adotteremo le denominazioni e i simboli usuali (e cioè 0, $-a$ per l'addizione, 1, a^{-1} per la moltiplicazione).

Ricorderemo ancora (cfr. ad es. [2], p. 42), che un elemento a di uno pseudogruppo Q dicesi semplificabile (in Q) se ciascuna delle due eguaglianze $f(b, a) = f(b', a)$, $f(a, b) = f(a, b')$ implica $b = b'$, qualunque siano $b, b' \in Q$. Uno pseudogruppo i cui elementi siano tutti semplificabili verrà detto un *semigruppo*.

In uno pseudoanello P si potrà dunque parlare di elementi *semplificabili rispetto all'addizione* oppure *rispetto alla moltiplicazione*. Un elemento di P che sia semplificabile sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione si dirà *semplificabile* (in P).

Uno pseudoanello i cui elementi siano tutti semplificabili rispetto all'addizione si dirà un *semianello*. Rispetto all'addizione un semianello è dunque un semigruppo (commutativo).

Esistono semianelli privi di elementi semplificabili. Ad es., nell'anello delle matrici quadrate del 2° ordine sopra l'anello dei numeri interi, consideriamo l'insieme $\mathfrak{S}$ delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con a, b (interi) positivi. È evidente che la somma e il prodotto di due elementi di $\mathfrak{S}$ appartengono ad $\mathfrak{S}$, ed è pure chiaro (poichè $\mathfrak{S}$ è immerso in un anello) che ogni elemento di $\mathfrak{S}$ è semplificabile rispetto all'addizione. Dunque $\mathfrak{S}$ è un semianello. Ora, se c, d, d' son numeri naturali con $d \neq d'$, qualunque sia l'elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ di $\mathfrak{S}$, si ha $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c & d' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque nessun elemento di $\mathfrak{S}$ è semplificabile.

Per contro vi sono semianelli in cui tutti gli elementi sono semplificabili. Tale è ad es. il semianello dei numeri naturali.

Esistono infine semianelli i cui elementi semplicabili costituiscono un sottinsieme proprio e non vuoto. Tale è ad es. il semianello formato dai numeri naturali e dallo zero.

2. - Sia S un semianello contenente elementi semplificabili. Detto M^* l'insieme di questi, è chiaro che il prodotto di due elementi di M^* appartiene ad M^*, cioè, come diremo, che M^* è *moltiplicativamente chiuso* (in S).

Sia M un qualsiasi insieme, moltiplicativamente chiuso, costituito da elementi semplificabili di S ($M \subseteq M^*$).Un sopra-semianello $\mathfrak{A}$ di S si dirà un *anello complementare sinistro* (*a.c.s.*) *di* S *rispetto ad* M se esso soddisfa alle tre condizioni seguenti:

I) $\mathfrak{A}$ è un anello dotato di elemento unità 1;

II) Ogni elemento α di M possiede reciproco α^{-1} in $\mathfrak{A}$;

III) Ogni elemento x di $\mathfrak{A}$ è rappresentabile nella forma $x = \gamma^{-1}(a - b)$, con $\gamma \in M$, $a, b \in S$.

Se un tale sopra-semianello $\mathfrak{A}$ esiste, S si dirà *complementarizzabile a sinistra rispetto ad* M. Denoteremo con 0 lo zero di $\mathfrak{A}$. Si osservi che, se S è dotato di zero 0, si ha $0 = \bar{0}$ (infatti, se $a \in S$, si ha $0 = a - a = (\bar{0} + a) - a = \bar{0} + (a - a) = \bar{0} + 0 = \bar{0}$). Analogamente, se S è dotato di elemento unità $\bar{1}$, si ha $1 = \bar{1}$.

In particolare, se $M = M^*$, si parlerà semplicemente di un *anello complementare sinistro* (*a.c.s.*) *di* S. Se questo esiste, S si dirà *complementarizzabile a sinistra.*

Nei numeri successivi (3-8) dimostreremo il seguente

TEOREMA: *Affinchè un semianello* S *sia complementarizzabile a sinistra rispetto ad un suo sottinsieme* M, *moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in* S, *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente:*

A) *Dati comunque* $a, b \in S$, $\gamma \in M$, *esistono* $a_1, b_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ *tali che*

$$\gamma_1 a + b_1 \gamma = \gamma_1 b + a_1 \gamma .$$

Se esiste un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ *di* S *rispetto ad* M, $\mathfrak{A}$ *è univocamente determinato da* S *ed* M *a meno di isomorfismi.*

3. - La dimostrazione della necessità della condizione A) è immediata. Supponiamo infatti che esista un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M, e siano dati comunque $a, b \in S$, $\gamma \in M$. Considerato allora (v. I), II)) l'elemento $x = (a - b)\gamma^{-1}$ di $\mathfrak{A}$, per la III) esistono $a_1, b_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ tali che $(a - b)\gamma^{-1} = \gamma_1^{-1}(a_1 - b_1)$, donde appunto $\gamma_1 a + b_1\gamma = \gamma_1 b + a_1\gamma$.

Premettiamo ora il seguente

Lemma: *Se è soddisfatta la condizione* A) *del n.° 2, le eguaglianze*

$$(1) \qquad r\gamma = s\gamma + \alpha, \qquad r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha,$$

$$(1') \qquad ra + sb + r_1b_1 + s_1a_1 = rb + sa + r_1a_1 + s_1b_1,$$

$$(2) \qquad r'\gamma = s'\gamma + \alpha', \qquad r'_1\gamma_1 = s'_1\gamma_1 + \alpha',$$

dove le lettere latine indicano elementi di S e quelle greche di M, implicano

$$(2') \qquad r'a + s'b + r'_1b_1 + s'_1a_1 = r'b + s'a + r'_1a_1 + s'_1b_1.$$

Infatti, considerati i tre elementi $2\alpha'(= \alpha' + \alpha')$, α', α, esistono, per la A), $g, h \in S$, $\delta \in M$ tali che $\delta \cdot 2\alpha' + h\alpha = \delta\alpha' + g\alpha$, cioè, semplicando per $\delta\alpha'$ (osservato che $\delta \cdot 2\alpha' = 2\delta\alpha'$), tali che

$$(3) \qquad g\alpha = h\alpha + \delta\alpha'.$$

Moltiplicando a sinistra (ambo i membri de) la $(1)_1$ dapprima per g e poi per h, e la $(2)_1$ per δ, si ottengono le tre eguaglianze $gs\gamma + g\alpha = gr\gamma$, $hr\gamma = hs\gamma + h\alpha$, $\delta r'\gamma = \delta s'\gamma + \delta\alpha'$ che, sommate (membro a membro) tenendo conto della (3), danno $(gs + hr + \delta r')\gamma = (gr + hs + \delta s')\gamma$, donde, semplificando per γ,

$$(4) \qquad gs + hr + \delta r' = gr + hs + \delta s'.$$

Ripetendo le stesse operazioni sulle $(1)_2$, $(2)_2$, (3) e semplificando adesso per γ_1, risulta

$$(4') \qquad gs_1 + hr_1 + \delta r'_1 = gr_1 + hs_1 + \delta s'_1.$$

Dalla (4) discende

$$(5) \qquad (gr + hs + \delta s')a + (gs + hr + \delta r')b = \\ = (gs + hr + \delta r')a + (gr + hs + \delta s')b,$$

e dalla (4')

$$(5') \qquad (gs_1 + hr_1 + \delta r_1')a_1 + (gr_1 + hs_1 + \delta s_1')b_1 = \\ = (gr_1 + hs_1 + \delta s_1')a_1 + (gs_1 + hr_1 + \delta r_1')b_1 .$$

Inoltre dalla (1') si trae

$$(5'') \qquad g(rb + sa + r_1a_1 + s_1b_1) + h(ra + sb + r_1b_1 + s_1a_1) = \\ = g(ra + sb + r_1b_1 + s_1a_1) + h(rb + sa + r_1a_1 + s_1b_1).$$

Sommando adesso le tre eguaglianze (5), (5'), (5'') ed eseguendo quindi tutte le possibili semplificazioni rispetto all'addizione, si trova

$$\delta(r'b + s'a + r_1'a_1 + s_1'b_1) = \delta(r'a + s'b + r_1'b_1 + s_1'a_1),$$

donde, semplificando per δ, risulta appunto la (2').

4. - Nell'ipotesi che la condizione A) sia soddisfatta, ci proponiamo ora di costruire un sopra-semianello $\mathfrak{A}$ del dato S, che soddisfi alle I), II), III) del n.° 2. Premettiamo un secondo

LEMMA: *Se è soddisfatta la condizione* A) *del n.° 2, dati n qualsiasi elementi $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in M$, esistono $2n+1$ elementi $r_1, s_1, \dots, r_n, s_n \in S$, $\alpha \in M$ tali che*

$$r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha, \dots, r_n\gamma_n = s_n\gamma_n + \alpha.$$

Infatti, procedendo per induzione completa su n, il lemma è intanto vero per $n = 1$ (basta assumere $r_1 = 2\rho$, $s_1 = \rho$ $\alpha = \rho\gamma_1$, dove ρ è un qualsiasi elemento di M che, si ricordi, è moltiplicativamente chiuso). Supposto allora che esistano r_i', $s_i' \in S$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $\alpha' \in M$ tali che

$$(6) \qquad r_i'\gamma_i = s_i'\gamma_i + \alpha' \qquad (i = 1, \dots, n-1),$$

consideriamo i tre elementi $2\alpha'$, α', γ_n. Per la A), esistono $r_n, s_n \in S$, $\lambda \in M$ tali che $\lambda \cdot 2\alpha' + s_n\gamma_n = \lambda\alpha' + r_n\gamma_n$, cioè che

$$(6') \qquad r_n\gamma_n = s_n\gamma_n + \alpha.$$

avendo posto $\alpha = \lambda\alpha'$. Posto ancora $r_i = \lambda r_i'$, $s_i = \lambda s_i'$ $(i = 1,$

..., $n-1$), le (6), moltiplicate a sinistra per λ, e la (6') provano l'asserto.

Consideriamo adesso l'insieme $\mathcal{T}$ delle terne ordinate di elementi (γ, a, b), con $\gamma \in M$, $a, b \in S$. Porremo:

$$(7) \qquad (\gamma, a, b) \sim (\gamma_1, a_1, b_1),$$

se esistono cinque elementi $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (1), (1').

La relazione (7) è riflessiva (v. il lemma di questo n.° per $n=1$) ed evidentemente simmetrica. Essa è inoltre transitiva. Infatti, considerati $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in M$, per il lemma di questo n.°, esistono sette elementi $r', s', r'_1, s'_1, r'_2, s'_2 \in S$, $\alpha' \in M$ tali che

$$(8) \qquad r'\gamma = s'\gamma + \alpha', \quad r'_1\gamma_1 = s'_1\gamma_1 + \alpha', \quad r'_2\gamma_2 = s'_2\gamma_2 + \alpha'.$$

Se allora $(\gamma, a, b) \sim (\gamma_1, a_1, b_1)$, dalle prime due delle (8) discende, per il lemma del n.° 3, la (2'); analogamente, $(\gamma_1, a_1, b_1) \sim (\gamma_2, a_2, b_2)$ e le ultime due delle (8) implicano

$$(9) \qquad r'_1a_1 + s'_1b_1 + r'_2b_2 + s'_2a_2 = r'_1b_1 + s'_1a_1 + r'_2a_2 + s'_2b_2.$$

Sommando le (2'), (9) e semplificando, si ha allora $r'a + s'b + r'_2b_2 + s'_2a_2 = r'b + s'a + r'_2a_2 + s'_2b_2$, e questa eguaglianza, assieme alle $(8)_1$, $(8)_3$, prova appunto che $(\gamma, a, b) \sim (\gamma_2, a_2, b_2)$.

La relazione (7), sopra definita in $\mathcal{T}$, è dunque una relazione di equivalenza. La classe delle terne equivalenti ad una qualsiasi terna (γ, a, b) verrà denotata con $[(\gamma, a, b)]$ e l'insieme avente come elementi tutte queste classi di equivalenza con $\mathcal{A}'$:

$$[(\gamma, a, b)] \in \mathcal{A}'.$$

Consideriamo in particolare in $\mathcal{T}$ le due terne (γ, a, b), (γ_1, a_1, b_1), con $\gamma_1 = \mu\gamma$, $a_1 = \mu a$, $b_1 = \mu b$, $\mu \in M$. Dall'eguaglianza $2\lambda\mu\gamma = \lambda\mu\gamma + \lambda\mu\gamma$, dove λ è un qualsiasi elemento di M, posto $r = 2\lambda\mu$, $s = \lambda\mu$, $r_1 = 2\lambda$, $s_1 = \lambda$, $\alpha = \lambda\mu\gamma$, discendono le (1); ma anche la (1') è soddisfatta. Quindi in $\mathcal{T}$ si ha

$$(10) \qquad (\mu\gamma, \mu a, \mu b) \sim (\gamma, a, b),$$

qualunque sia $\mu \in M$. Il ragionamento fatto mostra pure che, più in generale, si ha

$$(10') \qquad (m\gamma,\ ma,\ mb) \backsim (\gamma,\ a,\ b)$$

per ogni $m \in S$ tale che $m\gamma \in M$.

In base alla (7), si ha dunque in $\mathfrak{A}'$ la seguente *definizione di eguaglianza*:

$$(11) \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] = [(\gamma_1,\ a_1,\ b_1)]$$

se e soltanto se esistono cinque elementi $r,\ s,\ r_1,\ s_1 \in S,\ \alpha \in M$ per cui valgono le (1), (1').

Si osservi che, *se in particolare* $\gamma = \gamma_1$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a + b_1 = b + a_1$. Infatti, se $a + b_1 = b + a_1$, per il lemma del n.° 4 ($n = 1$), esistono $r,\ s,\ r_1,\ s_1 \in S,\ \alpha \in M$, con $r = r_1,\ s = s_1$, per cui valgono le (1); ma vale anche la (1'), che si ottiene sommando le due eguaglianze $r(a + b_1) = r(b + a_1)$, $s(b + a_1) = s(a + b_1)$. Viceversa, se la (11) è vera e ρ è un qualsiasi elemento di M, dalle (2), con $r' = r'_1 = 2\rho$, $s' = s'_1 = \rho$, $\alpha' = \rho\gamma$, discende, per il lemma del n.° 3, la (2'), donde appunto, semplificando, $a + b_1 = b + a_1$. Da questa osservazione risulta immediatamente che

$$(12) \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] = [(\gamma,\ a + s,\ b + s)]$$

qualunque sia $s \in S$.

Si osservi ancora che, *se in particolare* $a = b$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a_1 = b_1$. Infatti la (1'), con $a = b$, $a_1 = b_1$, è soddisfatta qualunque siano $r,\ s,\ r_1,\ s_1 \in S$. Viceversa, se la (11) è vera, considerati i tre elementi $2\gamma_1,\ \gamma_1,\ \gamma$, esistono, per la A), $r',\ s' \in S,\ \rho \in M$ tali che $\rho \cdot 2\gamma_1 + s'\gamma = \rho\gamma_1 + r'\gamma$, ossia tali che valga la $(2)_1$ con $\alpha' = \rho\gamma_1$. D'altra parte vale pure la $(2)_2$ con $r'_1 = 2\rho$, $s'_1 = \rho$, e quindi, per il lemma del n.° 3, la (2'). Da questa, poichè $a = b$, discende $2\rho \cdot b_1 + \rho a_1 = 2\rho \cdot a_1 + \rho b_1$, donde appunto, semplificando, $a_1 = b_1$.

Osserveremo infine che, *se* $r,\ s \in S,\ \alpha \in M$ *sono elementi tali che* $r\gamma = s\gamma + \alpha$, *si ha*

$$(13) \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] = [(\alpha,\ ra + sb,\ rb + sa)].$$

Se μ è un qualsiasi elemento di M, ciò discende infatti dalle tre evidenti eguaglianze: $\mu r \cdot \gamma = \mu s \cdot \gamma + \mu\alpha$, $2\mu \cdot \alpha = \mu \cdot \alpha + \mu\alpha$, $\mu r \cdot a + \mu s \cdot b + 2\mu(rb + sa) + \mu(ra + sb) = \mu r \cdot b + \mu s \cdot a + 2\mu(ra + sb) + + \mu(rb + sa)$.

5. - Diamo in $\mathfrak{A}'$ la seguente *definizione di addizione*:

$$(14) \qquad [(\gamma, a, b)] + [(\gamma_1, a_1, b_1)] = \\ = [(\alpha, ra + sb + r_1a_1 + s_1b_1, rb + sa + r_1b_1 + s_1a_1)],$$

dove $\alpha \in M$, $r, s, r_1, s_1 \in S$ sono cinque elementi per cui valgono le (1).

La somma a 2° membro della (14) non dipende dalla scelta degli elementi $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (1) (l'esistenza di questi elementi è assicurata dal lemma del n.° 4). Se infatti $r', s', r_1', s_1' \in S$, $\alpha' \in M$ son cinque elementi per cui valgono le (2), considerati i due elementi α, α', esistono per il lemma del n.° 4, $p, q, p', q' \in S$, $\delta \in M$ tali che

$$(15) \qquad p\alpha = q\alpha + \delta, \qquad p'\alpha' = q'\alpha' + \delta.$$

Moltiplicando la $(1)_1$ a sinistra dapprima per p, poi per q, e tenendo conto della $(15)_1$, si trova

$$(16) \qquad pr\gamma = ps\gamma + q\alpha + \delta, \qquad qs\gamma + q\alpha = qr\gamma,$$

e analogamente dalla $(2)_1$, tenendo conto della $(15)_2$ si ottiene

$$(16') \qquad p's'\gamma + q'\alpha' + \delta = p'r'\gamma, \qquad q'r'\gamma = q's'\gamma + q'\alpha'.$$

Sommando le (16), (16') e semplificando, risulta

$$(17) \qquad pr + qs + p's' + q'r' = ps + qr + p'r' + q's'.$$

Ripetendo ora le stesse operazioni sulle $(1)_2$, $(2)_2$, si trova analogamente

$$(17') \qquad pr_1 + qs_1 + p's_1' + q'r_1' = ps_1 + qr_1 + p'r_1' + q's_1'.$$

Moltiplichiamo adesso a destra la (17) dapprima per a e poi per b, scambiamo fra loro i due membri della seconda eguaglianza così ottenuta, quindi sommiamo con la prima. Som-

miamo l'eguaglianza ricavata in tal modo con quella che si ricava analogamente moltiplicando a destra la (17') dapprima per a_1 e poi per b_1 e sommando quindi le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$h = ra + sb + r_1a_1 + s_1b_1, \qquad k = rb + sa + r_1b_1 + s_1a_1,$$
$$h' = r'a + s'b + r'_1a_1 + s'_1b_1, \qquad k' = r'b + s'a + r'_1b_1 + s'_1a_1,$$

si trova

$$ph + qk + p'k' + q'h' = pk + qh + p'h' + q'k'.$$

Questa eguaglianza e le (15) dimostrano appunto che $[(\alpha, h, k)] = [(\alpha', h', k')]$.

La somma a 2° membro della (14) non dipende neppure dalla scelta dei rappresentanti delle due classi a 1° membro. Infatti, se $[(\gamma, a, b)] = [(\gamma', a', b')]$, cioè se esistono cinque elementi $c, d, c', d' \in S$, $\beta \in M$ tali che

$$c\gamma = d\gamma + \beta, \qquad c'\gamma' = d'\gamma' + \beta, \tag{18}$$

$$ca + db + c'b' + d'a' = cb + da + c'a' + d'b', \tag{18'}$$

e se inoltre $[(\gamma_1, a_1, b_1)] = [(\gamma'_1, a'_1, b'_1)]$, cioè se esistono $c_1, d_1, c'_1, d'_1 \in S$, $\beta_1 \in M$ per cui si ha

$$c_1\gamma_1 = d_1\gamma_1 + \beta_1, \qquad c'_1\gamma'_1 = d'_1\gamma'_1 + \beta_1, \tag{19}$$

$$c_1a_1 + d_1b_1 + c'_1b'_1 + d'_1a'_1 = c_1b_1 + d_1a_1 + c'_1a'_1 + d'_1b'_1, \tag{19'}$$

allora, in corrispondenza ai due elementi β, β_1, esistono, per il lemma del n.° 4, $f, g, f_1, g_1 \in S$, $\lambda \in M$ tali che

$$f\beta = g\beta + \lambda, \qquad f_1\beta_1 = g_1\beta_1 + \lambda. \tag{20}$$

Dalla $(18)_1$, tenendo conto della $(20)_1$, si ottiene $fc\gamma = fd\gamma + f\beta = fd\gamma + g\beta + \lambda$, $gd\gamma + g\beta = gc\gamma$, donde, sommando e semplificando,

$$(fc + gd)\gamma = (fd + gc)\gamma + \lambda, \tag{21}$$

e analogamente dalla $(19)_1$, tenendo conto della $(20)_2$, risulta

$$(f_1c_1 + g_1d_1)\gamma_1 = (f_1d_1 + g_1c_1)\gamma_1 + \lambda. \tag{21}$$

In modo analogo dalle $(18)_2$, $(19)_2$, tenendo conto risp. delle $(20)_1$, $(20)_2$, si ottiene

$$(22) \qquad \begin{aligned} (fc' + gd')\gamma' &= (fd' + gc')\gamma' + \lambda, \\ (f_1c_1' + g_1d_1')\gamma_1' &= (f_1d_1' + g_1c_1')\gamma_1' + \lambda. \end{aligned}$$

Posto allora

$$\begin{aligned} a_0 &= (c + gd)a + (fd + gc)b + (f_1c_1 + g_1d_1)a_1 + (f_1d_1 + g_1c_1)b_1, \\ b_0 &= (fc + gd)b + (fd + gc)a + (f_1c_1 + g_1d_1)b_1 + (f_1d_1 + g_1c_1)a_1, \\ a_0' &= (fc' + gd')a' + (fd' + gc')b' + (f_1c_1' + g_1d_1')a_1' + (f_1d_1' + g_1c_1')b_1', \\ b_0' &= (fc' + gd')b' + (fd' + gc')a' + (f_1c_1' + g_1d_1')b_1' + (f_1d_1' + g_1c_1')a_1', \end{aligned}$$

per le (21), si ha

$$[(\gamma, a, b)] + [(\gamma_1, a_1, b_1)] = [(\lambda, a_0, b_0,)]$$

e, per le (22),

$$[(\gamma', a', b')] + [(\gamma_1', a_1', b_1')] = [(\lambda, a_0', b_0')].$$

Moltiplichiamo ora a sinistra la (18′) dapprima per f e poi per g, scambiamo fra loro i due membri della seconda eguaglianza così ottenuta, quindi sommiamo con la prima. Sommiamo l'eguaglianza ricavata in tal modo con quella che si ricava analogamente moltiplicando a sinistra la (19′) dapprima per f_1 e poi per g_1 e sommando quindi le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda: si trova

$$a_0 + b_0' = b_0 + a_0'.$$

Ma allora, per una osservazione fatta al n.° 4, $[(\lambda, a_0, b_0)] = [(\lambda, a_0', b_0')]$, come appunto si era affermato.

Osserveremo che, se in particolare $\gamma = \gamma_1$, si ha

$$(23) \qquad [(\gamma, a, b)] + [(\gamma, a_1, b_1)] = [(\gamma, a + a_1, b + b_1)].$$

Infatti, se $\rho \in M$, le (1) son soddisfatte assumendo $r = r_1 = 2\rho$, $s = s_1 = \rho$, $\alpha = \rho\gamma$; quindi $[(\gamma, a, b)] + [(\gamma, a_1, b_1)] = [(\alpha, a_2, b_2)]$ con $a_2 = \rho(2a + 2a_1 + b + b_1)$, $b_2 = \rho(a + a_1 + 2b + 2b_1)$.

Ma, per le (10), (12),

$$[(\alpha, a_2, b_2)] = [(\gamma, 2a + 2a_1 + b + b_1, a + a_1 + 2b + 2b_1)] = \\ = [(\gamma, a + a_1, b + b_1)].$$

Per l'addizione definita mediante la (14) vale evidentemente la proprietà commutativa. Ma vale pure la proprietà associativa. Dati infatti i tre addendi $[(\gamma, a, b)]$, $[(\gamma_1, a_1, b_1)]$, $[(\gamma_2, a_2, b_2)]$, per il lemma del n.° 4 esistono $r, s, r_1, s_1, r_2, s_2 \in S$, $\alpha \in M$ tali che

$$(24) \qquad r\gamma = s\gamma + \alpha, \qquad r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha, \qquad r_2\gamma_2 = s_2\gamma_2 + \alpha.$$

Scritto ciascun addendo nella forma (13) in relazione alla rispettiva (24), l'associatività dell'addizione, in base alla (23), è senz'altro evidente.

L'elemento $0' = [(\gamma, a, a)]$ di $\mathfrak{A}'$ (che, in base ad una osservazione del n. 4, non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $a \in S$) ne è lo *zero* (v. le (23), (12)). Inoltre ogni elemento $[(\gamma, a, b)]$ di $\mathfrak{A}'$ è dotato di *opposto*, che è precisamente $[(\gamma, b, a)]$. Dunque $\mathfrak{A}'$, rispetto all'addizione sopra definita, è un gruppo commutativo.

6. - Diamo ora in $\mathfrak{A}'$ la seguente *definizione di moltiplicazione*:

$$(25) \qquad [(\gamma, a, b)] \cdot [(\gamma_1, a_1, b_1)] = [(\nu\gamma, pa_1 + qb_1, pb_1 + qa_1)],$$

dove $\nu \in M$, $p, q \in S$ sono tre elementi tali che

$$(25') \qquad \nu a + q\gamma_1 = \nu b + p\gamma_1.$$

Il prodotto a 2° membro della (25) non dipendente dalla scelta degli elementi $p, q \in S$, $\nu \in M$ soddisfacenti alla (25') (i quali esistono certamente in base alla condizione A)). Se infatti si ha

$$(26) \qquad \nu' a + q'\gamma_1 = \nu' b + p'\gamma_1$$

con $p', q' \in S$, $\nu' \in M$, considerati i due elementi ν, ν', esistono, per il lemma del n.°4, $r, s, r', s' \in S$, $\alpha' \in M$ tali che

$$(27) \qquad r\nu = s\nu + \alpha', \qquad r'\nu' = s'\nu' + \alpha',$$

ossia, posto $\alpha = \alpha'\gamma$, tali che

$$(28) \qquad r \cdot \nu\gamma = s \cdot \nu\gamma + \alpha, \qquad r' \cdot \nu'\gamma = s' \cdot \nu'\gamma + \alpha.$$

Dalle (25') discende

$$(29) \qquad r(\nu a + q\gamma_1) + s(\nu b + p\gamma_1) = r(\nu b + p\gamma_1) + s(\nu a + q\gamma_1),$$

e dalla (26):

$$(29') \qquad r'(\nu' b + p'\gamma_1) + s'(\nu' a + q'\gamma_1) = r'(\nu' a + q'\gamma_1) + s'(\nu' b + p'\gamma_1 .$$

Dalla $(27)_1$ si trae: $r\nu a = s\nu a + \alpha' a$, $s\nu b + \alpha' b = r\nu\gamma$ e dalla $(27)_2$: $s'\nu' a + \alpha' a = r'\nu' a$, $r'\nu' b = s'\nu' b + \alpha' b$. Sommando queste quattro eguaglianze, si trova

$$(30) \qquad (r\nu + s'\nu')a + (s\nu + r'\nu')b = (s\nu + r'\nu')a + (r\nu + s'\nu')b.$$

Sommando le (29), (29'), e quindi semplificando dapprima in base alla (30) e poi per γ_1, risulta

$$(31) \qquad rq + sp + r'p' + s'q' = rp + sq + r'q' + s'p'.$$

Moltiplichiamo ora la (31) a destra dapprima per a_1 e poi per b_1, quindi sommiamo le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$l = pa_1 + qb_1, \quad m = pb_1 + qa_1, \quad l' = p'a_1 + q'b_1, \quad m' = p'b_1 + q'a_1,$$

si trova

$$rl + sm + r'm' + s'l' = rm + sl + r'l' + s'm'.$$

Dunque (v. le (28)): $[(\nu\gamma, l, m)] = [(\nu'\gamma, l', m')]$, come asserito.

Il prodotto a 2° membro della (25) non dipende neppure dalla scelta dei rappresentanti delle due classi a 1° membro. Infatti, posto

$$(32) \qquad \xi = [(\gamma, a, b)], \quad \xi_1 = [(\gamma_1, a_1, b_1)],$$
$$\xi' = [(\gamma', a', b')], \quad \xi_1' = [(\gamma_1, a_1', b_1')],$$

supponiamo che sia

$$(33) \qquad \xi = \xi', \quad \xi_1 = \xi_1' .$$

Considerati i due elementi γ_1, γ'_1, esistono, per il lemma del n.° 4, h, k, h', $k' \in S$, $\beta \in M$ tali che

$$h\gamma_1 = k\gamma_1 + \beta, \qquad h'\gamma_1 = k'\gamma'_1 + \beta. \tag{34}$$

D'altra parte, in corrispondenza ai tre elementi a, b, β, esistono, per la condizione A), c. $d \in S$, $\delta \in M$ tali che

$$\delta a + d\beta = \delta b + c\beta. \tag{35}$$

Dalla $(34)_1$ si trae $ck\gamma_1 + c\beta = ch\gamma_1$, $dh\gamma_1 = dk\gamma_1 + d\beta$, da cui, sommando, $(ck + dh)\gamma_1 + c\beta = (ch + dk)\gamma_1 + d\beta$. Sommando questa con la (35), si trova $\delta a + (ck + dh)\gamma_1 = \delta b + (ch + dk)\gamma_1$, donde

$$\xi\xi_1 = [(\delta\gamma,\ p_0a_1 + q_0b_1,\ p_0b_1 + q_0a_1)], \tag{36}$$

avendo posto

$$p_0 = ch + dk, \qquad q_0 = ck + dh.$$

Per il lemma del n.° 3, dalle $(33)_2$, (34) discende

$$ha_1 + kb_1 + h'b'_1 + k'a'_1 = hb_1 + ka_1 + h'a'_1 + k'b'_1. \tag{37}$$

Moltiplichiamo la (37) a sinistra dapprima per c e poi per d, quindi sommiamo le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$p'_0 = ch' + dk', \qquad q'_0 = ck' + dh',$$

si trova $(p_0a_1 + q_0b_1) + (p'_0b'_1 + q'_0a'_1) = (p_0b_1 + q_0a_1) + (p'_0a'_1 + q'_0b'_1)$, ossia, per un'osservazione del n.° 4,

$$[(\delta\gamma,\ p_0a_1 + q_0b_1,\ p_0b_1 + q_0a_1)] = [(\delta\gamma,\ p'_0a'_1 + q'_0b'_1,\ p'_0b'_1 + q'_0a'_1)]. \tag{38}$$

Operando sulle $(34)_2$, (35) analogamente a quanto fatto sopra sulle $(34)_1$, (35) si trova

$$\delta a + q'_0\gamma'_1 = \delta b + p'_0\gamma'_1, \tag{39'}$$

da cui

$$[(\delta\gamma,\ p'_0a'_1 + q'_0b'_1,\ p'_0b'_1 + q'_0a'_1)] = \xi\xi'_1. \tag{39}$$

Dalle (36), (38), (39) risulta quindi

$$\xi\xi_1 = \xi\xi_1'. \tag{40}$$

Considerati adesso tre elementi p_1, $q_1 \in S$, $\nu_1 \in M$ tali che

$$\nu_1 a' + q_1\gamma_1' = \nu_1 b' + p_1\gamma_1', \tag{41'}$$

si ha

$$\xi'\xi_1' = [(\nu_1\gamma',\ p_1 a_1' + q_1 b_1',\ p_1 b_1' + q_1 a_1')]. \tag{41}$$

Per il lemma del n.° 4, in corrispondenza ai due elementi $\delta\gamma$, $\nu_1\gamma'$, esistono f, g, f', $g' \in S$, $\lambda \in M$ tali che

$$f \cdot \delta\gamma = g \cdot \delta\gamma + \lambda, \qquad f' \cdot \nu_1\gamma' = g' \cdot \nu_1\gamma' + \lambda. \tag{42}$$

Dalle $(33)_1$, (42), per il lemma del n.° 3, discende

$$f\delta a + g\delta b + f'\nu_1 b' + g'\nu_1 a' = f\delta b + g\delta a + f'\nu_1 a' + g'\nu_1 b'. \tag{43}$$

Dalla (39') si trae

$$f(\delta b + p_0'\gamma_1') + g(\delta a + q_0'\gamma_1') = f(\delta a + q_0'\gamma_1') + g(\delta b + p_0'\gamma_1'), \tag{44}$$

e dalla (41'):

$$f'(\nu_1 a' + q_1\gamma_1') + g'(\nu_1 b' + p_1\gamma_1') = f'(\nu_1 b' + p_1\gamma_1') + g'(\nu_1 a' + q_1\gamma_1'), \tag{44'}$$

Sommando le (44), (44'), e quindi semplificando dapprima in base alla (43) e poi per γ_1', si trova

$$fp_0' + gq_0' + f'q_1 + g'p_1 = fq_0' + gp_0' + f'p_1 + g'q_1. \tag{45}$$

Moltiplichiamo ora la (45) a destra dapprima per a_1' e poi per b', quindi sommiamo le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$l_0 = p_0'a_1' + q_0'b_1', \qquad m_0 = p_0'b_1' + q_0'a_1',$$
$$l_1 = p_1a_1' + q_1b_1', \qquad m_1 = p_1b_1' + q_1a_1',$$

si trova

$$fl_0 + gm_0 + f'm_1 + g'l_1 = fm_0 + gl_0 + f'l_1 + g'm_1,$$

donde, per le (42), $[(\delta\gamma,\ l_0,\ m_0)] = [(\nu_1\gamma',\ l_1,\ m_1)]$, ossia

(v. le (39), (41)):

$$\xi\xi_1' = \xi'\xi_1'. \tag{46}$$

Dal confronto delle (40), (46) risulta $\xi\xi_1 = \xi'\xi_1'$, cioè quanto si era affermato.

La moltiplicazione definita mediante la (25) è associativa. Infatti, posto ancora (cfr. le (32))

$$\xi_2 = [(\gamma_2,\ a_2,\ b_2)], \tag{47}$$

se $p_2,\ q_2 \in S,\ \nu_2 \in M$ son tali che

$$\nu_2 a_1 + q_2\gamma_2 = \nu_2 b_1 + p_2\gamma_2, \tag{48}$$

ne segue $\xi_1\xi_2 = [(\nu_2\gamma_1,\ a^*,\ b^*)]$, dove

$$a^* = p_2 a_2 + q_2 b_2, \qquad b^* = p_2 b_2 + q_2 a_2.$$

Se inoltre si ha

$$\nu^* a + q^* \cdot \nu_2\gamma_1 = \nu^* b + p^* \cdot \nu_2\gamma_1, \tag{49'}$$

con $p^*,\ q^* \in S,\ \nu^* \in M$, allora

$$\xi(\xi_1\xi_2) = [(\nu^*\gamma,\ p^*a^* + q^*b^*,\ p^*b^* + q^*a^*)]. \tag{49}$$

Ma poichè, per la (10), $\xi_1 = [(\nu_2\gamma_1,\ \nu_2 a_1,\ \nu_2 b_1)]$, dalla (49') segue pure $\xi\xi_1 = [(\nu^*\gamma,\ \bar{a},\ \bar{b})]$, con

$$\bar{a} = p^*\nu_2 a_1 + q^*\nu_2 b_1, \qquad \bar{b} = p^*\nu_2 b_1 + q^*\nu_2 a_1.$$

Se μ è un qualsiasi elemento di M, dalla (48) discende

$$\mu p^*(\nu_2 a_1 + q_2\gamma_2) + \mu q^*(\nu_2 b_1 + p_2\gamma_2) = \mu p^*(\nu_2 b_1 + p_2\gamma_2) + \mu q^*(\nu_2 a_1 + q_2\gamma_2),$$

ossia

$$\mu\bar{a} + \mu\bar{q} \cdot \gamma_2 = \mu\bar{b} + \mu\bar{p} \cdot \gamma_2. \tag{50}$$

avendo posto

$$\bar{p} = p^* p_2 + q^* q_2, \qquad \bar{q} = q^* p_2 + p^* q_2.$$

Dalla (50), tenuto conto della (10), segue,

$$(\xi\xi_1)\xi_2 = [(\nu^*\gamma,\ \bar{p}a_2 + \bar{q}b_2,\ \bar{p}b_2 + \bar{q}a_2)],$$

che, confrontata con la (49), in base alle posizioni fatte, porge appunto $\xi(\xi_1\xi_2) = (\xi\xi_1)\xi_2$. Dunque $\mathfrak{A}'$, rispetto alla moltiplicazione, è uno pseudogruppo (n.° 1).

Osserviamo che, *se in particolare* $a = \gamma + b$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a_1 = \gamma_1 + b_1$. Infatti la (1'), con $a = \gamma + b$, $a_1 = \gamma_1 + b_1$, è soddisfatta qualunque siano $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (1). Viceversa, se la (11) è vera, esistendo (cfr. il penult. capov. del n.° 4) $r', s' \in S$, $\rho \in M$ per cui valgono le (2) con $a' = \rho\gamma_1$, $r'_1 = 2\rho$ $s'_1 = \rho$, per il lemma del n.° 3 vale pure la (2'). Da questa, poichè $a = \gamma + b$, posto (per la $(2)_1$) $r'\gamma = s'\gamma + \rho\gamma_1$, segue appunto (semplificando) $a_1 = \gamma_1 + b_1$.

L'elemento $1' = [(\gamma, \gamma + b, b)]$ di $\mathfrak{A}'$ (che dunque non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $b \in S$) ne è l'*elemento unità*. Infatti, ricordando il terzult. capov. del n.° 4 e la (10), se $\nu a + q\gamma = \nu b + p\gamma$, si ha (v. la $(32)_1$): $\xi 1' = [(\nu\gamma, p\gamma, q\gamma)] = [(\nu\gamma, \nu a, \nu b)] = \xi$; se poi $\nu'(\gamma + b) + q'\gamma = \nu' b + p'\gamma$, cioè se $\nu' + q' = p'$, si ha pure $1'\xi = [(\nu'\gamma, p'a + q'b, p'b + q'a)] = [(\nu'\gamma, \nu'a, \nu'b)] = \xi$.

Osserviamo ancora che, *se in particolare* $a = \gamma s + b$ $(s \in S)$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a_1 = \gamma_1 s + b_1$. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella dell'osservazione precedente. Ne segue che l'elemento $[(\gamma, \gamma s + b, b)]$ di $\mathfrak{A}'$ non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $b \in S$; porremo

$$[(\gamma, \gamma s + b, b)] \in S' \qquad (s \in S). \tag{51}$$

È immediato, in base all'ultima osservazione ed al terzult. capov. del n.° 4, che la corrispondenza

$$s \to [(\gamma, \gamma s + b, b)] \tag{52}$$

fra S ed S' è biunivoca. Essa subordina una corrispondenza biunivoca fra M ed M', avendo posto

$$[(\gamma, \gamma\mu + b, b)] \in M' \qquad (\mu \in M). \tag{51'}$$

Ogni elemento $\zeta = [(\gamma, \gamma\mu + b, b)]$ di questo sottinsieme M' di $\mathfrak{A}'$ è dotato di *reciproco*, che è precisamente $\zeta' = [(\gamma\mu, \gamma + b, b)]$. Infatti, osservato che la (25'), relativa sia al prodotto $\zeta\zeta'$ che $\zeta'\zeta$, è soddisfatta assumendo $p = q + \nu$, con $q \in S$,

$\nu \in M$ arbitrari, ricordando la (12) si trova $\zeta\zeta' = [(\nu\gamma,\ \nu\gamma + \nu b,\ \nu b)] = 1' = [(\nu\gamma\mu,\ \nu\gamma\mu + qb,\ qb)] = \zeta'\zeta$; dunque $\zeta' = \zeta^{-1}$.

7. - In $\mathcal{A}'$ valgono le due proprietà distributive

$$\xi(\xi_1 + \xi_2) = \xi\xi_1 + \xi\xi_2, \qquad (\xi_1 + \xi_2)\xi = \xi_1\xi + \xi_2\xi.$$

I simboli ξ, ξ_1, ξ_2 avendo il significato del n.° preced. (v. le (32), (47)), supporremo infatti, com'è lecito (cfr. il penult. capov. del n.° 5), che sia

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2.$$

Se allora $p,\ q \in S$, $\nu \in M$ son tali che $\nu a + q\gamma = \nu b + p\gamma$, ricordando la (23) si ha appunto

$$\xi(\xi_1 + \xi_2) = [(\nu\gamma,\ p(a_1 + a_2) + q(b_1 + b_2),\ p(b_1 + b_2) + q(a_1 + a_2))] =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} [(\nu\gamma,\ pa_i + qb_i,\ pb_i + qa_i)] = \xi\xi_1 + \xi\xi_2.$$

D'altra parte, se p_1, q_1, p_2, $q_2 \in S$, ν_1, $\nu_2 \in M$ son tali che

$$\nu_i a_i + q_i\gamma = \nu_i b_i + p_i\gamma \qquad (i = 1,\ 2), \tag{53}$$

in corrispondenza ai due elementi ν_1, ν_2 esistono, per il lemma del n.° 4, c_1, d_1, c_2, $d_2 \in S$, $\nu' \in M$ tali che

$$c_i\nu_i = d_i\nu_i + \nu' \qquad (i = 1,\ 2). \tag{54}$$

Dalle (53) si trae $c_i(\nu_i a_i + q_i\gamma) + d_i(\nu_i b_i + p_i\gamma) = c_i(\nu_i b_i + p_i\gamma) + d_i(\nu_i a_i + q_i\gamma)$, donde, tenendo conto delle (54),

$$\nu' a_i + q_i'\gamma = \nu' b_i + p_i'\gamma \qquad (i = 1,\ 2), \tag{55}$$

avendo posto $p_i' = c_i p_i + d_i q_i$, $q_i' = c_i q_i + d_i p_i$. Sommando le (55), si ottiene

$$\nu'(a_1 + a_2) + (q_1' + q_2')\gamma = \nu'(b_1 + b_2) + (p_1' + p_2')\gamma. \tag{55'}$$

In base alle (55'), (55), si ha appunto

$$(\xi_1 + \xi_2)\xi = [(\nu'\gamma,\ (p_1' + p_2')a + (q_1' + q_2')b,\ (p_1' + p_2')b + (q_1' + q_2')a)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} [(\nu'\gamma,\ p_i'a + q_i'b,\ p_i'b + q_i'a)] = \xi_1\xi + \xi_2\xi.$$

Dai n.i 4-7 risulta dunque che, *in base alle definizioni* (11), (14), (25), *l'insieme* $\mathfrak{A}'$ (n.° 4) *delle classi di equivalenza* $[(\gamma, a, b)]$ (con $\gamma \in M$, $a, b \in S$) *è un anello, dotato di elemento unità* 1', *in cui ogni elemento del sottinsieme* M' (n.° 6) *ammette reciproco.*

Si vede inoltre facilmente che *la corrispondenza* (52), *fra* S *ed* $S' \subseteq \mathfrak{A}'$, *è un isomorfismo.* Posto infatti

$$\eta_i = [(\gamma, \gamma s_i + b, b)] \qquad (i = 1, 2),$$

si ha $[(\gamma, \gamma(s_1 + s_2) + 2b, 2b)] = \sum_{i=1}^{2} [(\gamma, \gamma s_i + b, b)] = \eta_1 + \eta_2$, cioè

$$s_1 + s_2 \rightarrow \eta_1 + \eta_2.$$

D'altra parte, se $p_0, q_0 \in S$, $\nu_0 \in M$ son tali che $\nu_0(\gamma s_1 + b) + q_0\gamma = \nu_0 b + p_0\gamma$, quindi (moltiplicando per s_2) che

$$\nu_0(\gamma s_1 + b)s_2 + q_0\gamma s_2 = \nu_0 b s_2 + p_0\gamma s_2, \tag{56}$$

si ha $\eta_1\eta_2 = [(\nu_0\gamma, p_0(\gamma s_2 + b) + q_0 b, p_0 b + q_0(\gamma s_2 + b))]$, ossia, per la (12) e la (56) (terzult. capov. del n.° 4), $\eta_1\eta_2 = [(\nu_0\gamma, p_0\gamma s_2 . q_0\gamma s_2)] = [(\nu_0\gamma, \nu_0\gamma \cdot s_1 s_2 + \nu_0 b s_2, \nu_0 b s_2)]$, cioè

$$s_1 s_2 \rightarrow \eta_1\eta_2.$$

Posto allora

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}' \dot{-} S') + S, \tag{57}$$

considerata fra $\mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{A}'$ la corrispondenza biunivoca Φ che subordina l'identità in $\mathfrak{A}' \dot{-} S'$ e l'isomorfismo (52) fra S ed S', definiti, se $x_1 \rightarrow \xi_1$ ed $x_2 \rightarrow \xi_2$ in Φ ($x_1, x_2 \in \mathfrak{A}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{A}'$), somma $x_1 + x_2$ e prodotto $x_1 x_2$ in $\mathfrak{A}$ risp. come corrispondenti in Φ di $\xi_1 + \xi_2$ e $\xi_1\xi_2$, l'insieme $\mathfrak{A}$ è un anello isomorfo (mediante la Φ) ad $\mathfrak{A}'$.

Per quanto sappiamo della sua immagine isomorfa $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ è dunque un sopra-semianello del dato semianello S che soddisfa alle condizioni I), II) del n.° 2 (v. penult. capov. del n.° 6). Ma anche la III) è soddisfatta. Se infatti $x \in \mathfrak{A}$, ed in Φ si ha

$$x \rightarrow \xi = [(\gamma, a, b)],$$

si verifica facilmente che in $\mathfrak{A}'$ si ha $(c \in S)$:

$$(58) \qquad \xi = [(\gamma^2,\ \gamma + c,\ c)] \cdot \{[(\gamma,\ \gamma a + c,\ c)] + [(\gamma,\ c,\ \gamma b + c)]\},$$

bastando osservare (ricordate le (23), (12), (10)) che la somma costituente il secondo fattore vale $[(\gamma,\ \gamma a,\ \gamma b)]$ e che la (25'), relativa al prodotto di $[(\gamma^2,\ \gamma + c,\ c)]$ per questa somma, è soddisfatta assumendo $p = q + \nu$, con $q \in S$, $\nu \in M$ qualsiasi. Ma allora (ricordando le espressioni dell'opposto e del reciproco di un dato elemento di $\mathfrak{A}'$, date nei n.i 5, 6), dalla (58), per note proprietà dell'isomorfismo Φ, discende appunto

$$x = \gamma^{-1}(a - b)\,.$$

Poichè è raggiunto lo scopo dichiarato all'inizio del n.° 4, la condizione A) del teorema enunciato al n.° 2 è anche sufficiente, e perciò la prima parte di tale teorema è dimostrata.

8. — Supposto S complementarizzabile a sinistra rispetto ad M, sia $\bar{\mathfrak{A}}$ un suo qualsiasi anello complementare sinistro rispetto ad M.

Si vede facilmente che $\bar{\mathfrak{A}}$ è isomorfo all'anello $\mathfrak{A}$, sopra costruito. Consideriamo infatti la corrispondenza fra $\bar{\mathfrak{A}}$ ed $\mathfrak{A}'$ così definita:

$$(59) \qquad \bar{x} = \gamma^{-1}(a - b) \to \xi = [(\gamma,\ a,\ b)].$$

Essa è biunivoca, poichè, se

$$(60) \qquad \gamma^{-1}(a - b) = \gamma_1^{-1}(a_1 - b_1),$$

esistendo (per il lemma del n.° 4) $r,\ s,\ r_1,\ s_1 \in S$, $\alpha \in M$ tali che valgano le (1), cioè tali che sia, in $\bar{\mathfrak{A}}$, $(r - s)\gamma = (r_1 - s_1)\gamma_1 = \alpha$, moltiplicando la (60) a sinistra per α si ottiene $(r - s)(a - b) = (r_1 - s_1)(a_1 - b_1)$ cioè, in S, la (1'); ma allora, per la definizione (11),

$$(60') \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] = [(\gamma_1,\ a_1,\ b_1)].$$

Viceversa, dalla (60') seguono le (1), (1'), quindi in $\bar{\mathfrak{A}}$ si ha $\alpha\gamma^{-1} \cdot (a - b) = \alpha\gamma_1^{-1} \cdot (a_1 - b_1)$, donde la (60). D'altra parte, se

$$\bar{x}_i = \gamma_i^{-1}(a_i - b_i), \qquad \xi_i = [(\gamma_i,\ a_i,\ b_i)] \qquad (i = 1,\ 2),$$

poichè esistono (n.° 4, lemma) h_1, k_1, h_2, $k_2 \in S$, $\beta \in M$ tali che $h_i\gamma_i = k_i\gamma_i + \beta$ $(i = 1, 2)$, cioè che (in $\bar{\mathfrak{A}}$): $(h_1 - k_1)\gamma_1 = (h_2 - k_2)\gamma_2 = \beta$, posto

$$c = h_1a_1 + k_1b_1 + h_2a_2 + k_2b_2, \qquad d = h_1b_1 + k_1a_1 + h_2b_2 + k_2a_2,$$

in $\bar{\mathfrak{A}}$ risulta $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \beta^{-1}(\beta\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2) = \beta^{-1}(c - d)$, quindi (nella (59)) si ha

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \to \xi_1 + \xi_2,$$

dato che appunto, per la definizione (14), $[(\beta, c, d)] = \xi_1 + \xi_2$. Inoltre, poichè (per la condizione A)) esistono p, $q \in S$, $\nu \in M$ tali che $\nu a_1 + q\gamma_2 = \nu b_1 + p\gamma_2$, cioè che (in $\mathfrak{A}$): $(a_1 - b_1)\gamma_2^{-1} = \nu^{-1}(p - q)$, risulta $\bar{x}_1\bar{x}_2 = \gamma_1^{-1}(a_1 - b_1)\gamma_2^{-1}(a_2 - b_2) = (\nu\gamma_1)^{-1}(pa_2 + qb_2 - pb_2 - qa_2)$, quindi (ricordando la definizione (25)) si ha

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \to \xi_1\xi_2.$$

Dunque (mediante la corrispondenza (59)) $\bar{\mathfrak{A}}$ è isomorfo ad $\mathfrak{A}'$; quindi, poichè $\mathfrak{A}'$ è isomorfo ad $\mathfrak{A}$ (n.° 7), si è dimostrato l'asserto. La corrispondenza che realizza l'isomorfismo fra $\bar{\mathfrak{A}}$ ed $\mathfrak{A}$ associa gli elementi che ammettono una medesima rappresentazione $\gamma^{-1}(a - b)$.

Il teorema enunciato alla fine del n.° 2 è quindi completamente dimostrato.

Si verifica facilmente che, in un anello, un elemento è semplificabile (secondo il n.° 1) se e soltanto se esso non è divisore dello zero (cfr. ad es. [3], p. 53).

Se allora, in particolare, il semianello S del n.° 2 è un anello, un sopraanello $\mathfrak{A}_0$ di S si dirà (cfr. [1], p. 73) un *anello dei quozienti a sinistra di S rispetto ad M* (M avendo il significato del n.° 2) se esso soddisfa alle I), II del n.° 2 (ove si legga $\mathfrak{A}_0$ invece di $\mathfrak{A}$) ed alla

III$_0$) Ogni elemento x di $\mathfrak{A}_0$ è rappresentabile nella forma $x = \gamma^{-1}c$, con $\gamma \in M$, $c \in S$.

Evidentemente ($c = c + b - b$, con $b \in S$) un tale $\mathfrak{A}_0$ è pure un anello completamente sinistro dell'anello S rispetto ad M, e viceversa. Quindi dal teor. del n.° 2 discende immediatamente il

COROLLARIO: *Affinchè esista un anello dei quozienti a sinistra* $\mathfrak{A}_0$ *di un anello* S *rispetto ad un suo sottinsieme* M, *moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi non divisori dello zero, è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente*:

A_0) *Dati comunque* $c \in S$, $\gamma \in M$, *esistono* $c_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ *tali che*

$$\gamma_1 c = c_1 \gamma.$$

L'anello $\mathfrak{A}_0$, *ove esista, è univocamente determinato da* S *ed* M *a meno di isomorfismi.*

Questo risultato, qui ritrovato per altra via, è dovuto ad ASANO ([1], *Satz 1* a p. 73). (Evidentemente, se S è un anello, la condizione A) del n.° 2 è equivalente alla A_0).)

9. - I simboli S ed M avendo il significato del n.° 2, osserveremo che, *se* S *è complementarizzabile a sinistra rispetto ad* M, *l'a.c.s. di* S *rispetto ad* M *è il più piccolo sopra-semianello di* S *che soddisfa alle due condizioni* I), II).

Ciò perchè, se $\mathfrak{R}$ è un qualsiasi sopra-semianello di S che soddisfa alle I), II) del n.° 2 (ove si legga $\mathfrak{R}$ invece di $\mathfrak{A}$), gli elementi di $\mathfrak{R}$ della forma $\gamma^{-1}(a-b)$ ($\gamma \in M$, a, $b \in S$) costituiscono, se S è complementarizzabile a sinistra rispetto ad M, un a.c.s. $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M; dunque $\mathfrak{R}$ è un sopra-semianello di $\mathfrak{A}$. Infatti ($s \in S$, $\mu \in M$): $\gamma^{-1}(\gamma s + b - b)$, $\gamma^{-1}(a-a)$, $\gamma^{-1}(b-a)$, $\gamma^{-1}(\gamma + b - b)$, $(\gamma\mu)^{-1}(\gamma + b - b) \in \mathfrak{A}$; inoltre, per la condizione A) (che discende dall'ip. fatta su S) e per il lemma del n°. 4 che ne consegue, da x_1, $x_2 \in \mathfrak{A}$ segue (cfr. il 2° capov. del n.° 8) $x_1 x_2$, $x_1 + x_2 \in \mathfrak{A}$.

I simboli S ed M avendo sempre il significato del n.° 2, è chiaro come si possa pure parlare di un *anello complementare destro* (*a.c.d.*) *di* S *rispetto ad* M: esso è un sopra-semianello di S che soddisfa alle I), II), III) del n.° 2 ove si legga $(a-b)\gamma^{-1}$ invece di $\gamma^{-1}(a-b)$.

Vale il teorema che si deduce da quello del n.° 2 leggendo destra (*-o*) *invece di sinistra* (*-o*) *e* $a\gamma_1 + \gamma b_1 = b\gamma_1 + \gamma a_1$ *invece di* $\gamma_1 a + b_1 \gamma = \gamma_1 b + a_1 \gamma$. Infatti, quanto alla sufficienza della condizione così dedotta dalla A) (la necessità è imme-

diata), consideriamo il semianello S' che ha gli stessi elementi e la stessa definizione di addizione del semianello S, ma questa nuova definizione di moltiplicazione (a', $b' \in S'$, a, $b \in S$): $a'b' = ba$, con $b = b'$, $a = a'$. Per il teor. del n.° 2, esiste allora un a.c.s di S' rispetto ad M; l'anello dedotto da questo come qui sopra S' da S è appunto un a.c.d. di S rispetto ad M. Inoltre, considerato un qualsiasi a.c.d. di S rispetto ad M (supposto esistente), l'anello dedotto da esso come sopra S' da S è un a.c.s. di S' rispetto ad M, quindi è isomorfo (per il teor. del n.° 2) all'a.c.s. prima considerato; di qui la 2ª parte del teorema in discorso.

Si osservi che *l'esistenza di un a.c.d. di S rispetto ad M è indipendente da quella di un a.c.s.*. In [1] (p. 76) è dato infatti un esempio di un anello R che possiede l'anello dei quozienti a sinistra, ma non quello a destra (si ricordi la 2ª parte del n.° 8). Quindi l'anello dedotto da R come nel capov. preced. S' da S possiede invece l'anello dei quozienti a destra ma non quello a sinistra.

Ne segue che *la condizione* A) *del n.° 2, sufficiente* (in base al teor. dello stesso n.°) *per l'esistenza di un sopra-semianello di S soddisfacente alle due condizioni* I), II), *non è invece necessaria.* Può dunque accadere che un tale sopra-semianello esista e che in esso l'insieme degli elementi della forma $\gamma^{-1}(a - b)$ non sia moltiplicativamente o additivamente chiuso (cfr. il 2° capov. di questo n.°).

Se S è complementarizzabile sia a sinistra che a destra rispetto ad M, ogni a.c.s. $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M è pure un a.c.d. (*e viceversa*). Infatti, poichè esistono a_1, $b_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ tali che (in $\mathfrak{A}$) $(a - b)\gamma_1 = \gamma(a_1 - b_1)$, ogni elemento $\gamma^{-1}(a - b)$ di $\mathfrak{A}$ è rappresentabile nella forma $(a_1 - b_1)\gamma_1^{-1}$.

Se in particolare S è commutativo, esso è certamente complementarizzabile rispetto ad M, sia a sinistra che a destra; infatti la condiz. A) del n.° 2 è manifestamente soddisfatta (basta assumere $a_1 = a$, $b_1 = b$, $\gamma_1 = \gamma$). Si può allora parlare (v. il capov. preced.) di *anello complementare* (*a.c.*) *di S rispetto ad M; questo a.c. è pure commutativo* (si ricordi la III) del n.° 2, e si osservi che $\gamma a + b\gamma = \gamma b + a\gamma$ implica $(a - b)\gamma^{-1} =$

$= \gamma^{-1}(a - b))$ e quindi in esso valgono le seguenti, usuali regole di calcolo (posto $\gamma^{-1}(a - b) = (a - b)/\gamma$):

$$(61) \qquad \frac{a-b}{\gamma} = \frac{a_1 - b_1}{\gamma_1} \text{ se e soltanto se } a\gamma_1 + \gamma b_1 = b\gamma_1 + \gamma a_1,$$

$$(61) \qquad \frac{a-b}{\gamma} + \frac{a_1 - b_1}{\gamma_1} = \frac{a\gamma_1 + \gamma a_1 - (b\gamma_1 + \gamma b_1)}{\gamma\gamma_1},$$

$$(61) \qquad \frac{a-b}{\gamma} \cdot \frac{a_1 - b_1}{\gamma_1} = \frac{aa_1 + bb_1 - (ab_1 + ba_1)}{\gamma\gamma_1}.$$

Poichè l'a.c. di cui al preced. capov. è isomorfo (n.° 8), mediante la corrispondenza (59), all'anello $\mathfrak{A}'$ delle classi di equivalenza $[(\gamma, a, b)]$ sopra costruito (n.° 7), dalle (61) discende che, *se S è commutativo, le definizioni* (11), (14), (25) *sono risp. equivalenti alle seguenti*:

$$(\overline{11}) \qquad \xi = \xi_1 \text{ se e soltanto se } a\gamma_1 + \gamma b_1 = b\gamma_1 + \gamma a_1,$$

$$(\overline{14}) \qquad \xi + \xi_1 = [(\gamma\gamma_1, a\gamma_1 + \gamma a_1, b\gamma_1 + \gamma b_1)],$$

$$(\overline{25}) \qquad \xi\xi_1 = [(\gamma\gamma_1, aa_1 + bb_1, ab_1 + ba_1)],$$

avendo posto $\xi = [(\gamma, a, b)]$, $\xi_1 = [(\gamma_1, a_1, b_1)]$. Ciò può anche dedursi direttamente dalle (11), (14), (25) (assumendo $r = 2\gamma_1$, $s = \gamma_1$, $r_1 = 2\gamma$, $s_1 = \gamma$, $\alpha = \gamma\gamma_1$, $p = a$, $q = b$, $\nu = \gamma_1$).

10. - Se in particolare $M^* = S$ (n.° 2), dal teor. del n.° 2 si ha il

COROLLARIO: *Se gli elementi di un semianello S^* sono tutti semplificabili, affinchè S^* sia complementarizzabile a sinistra è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente*:

A*) *Dati comunque $\alpha, \beta, \gamma \in S^*$, esistono $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in S^*$ tali che*

$$\gamma_1\alpha + \beta_1\gamma = \gamma_1\beta + \alpha_1\gamma.$$

Se esiste un a.c.s. $\mathfrak{A}^*$ di S^*, $\mathfrak{A}^*$ è univocamente determinato da S^* a meno di isomorfismi.

Questo anello $\mathfrak{A}^*$ (supposto esistente) può benissimo *non* essere un corpo, come risulta dall'esempio seguente. Nel-

l'anello $I[x]$ dei polinomi $f = f(x)$ a coefficienti interi, consideriamo l'insieme $\mathfrak{S}^*$ dei polinomi non nulli coi coefficienti ≥ 0. $I[x]$ essendo un campo d'integrità, è chiaro che $\mathfrak{S}^*$ è un semianello (commutativo) i cui elementi sono tutti semplificabili (n.° 8). Nel corpo dei quozienti di $I[x]$, l'insieme delle frazioni $(f^* - g^*)/h^*$, con f^*, g^*, $h^* \in \mathfrak{S}^*$, è un a.c. di $\mathfrak{S}^*$ (n.° 9, 2° capov.); ebbene, questo a.c. non è un corpo. Ciò risulta ad es. dal fatto che il reciproco $1/(x-1)$ dell'elemento $(x-1)/1$ di questo anello non appartiene all'anello stesso. Se infatti fosse $1/(x-1) = (f^* - g^*)/h^*$, con f^*, g^*, $h^* \in \mathfrak{S}^*$, ossia $(x-1)(f^* - g^*) = h^*$, il polinomio non nullo h^* coi coefficienti ≥ 0 avrebbe uno zero positivo $(x = 1)$, il che è assurdo.

Diremo che uno pseudoanello (in particolare un semianello o un anello) è *nullo* se esso contiene un solo elemento (che quindi ne è lo zero).

Al n.° 2 abbiamo osservato che l'eventuale zero di S coincide con quello del suo a.c.s. $\mathfrak{A}$ (supposto esistente). Ne segue evidentemente che, affinchè l'a.c.s. di un semianello non nullo S (complementarizzabile a sinistra) sia un corpo, è necessario che tutti gli elementi non nulli di S siano semplificabili. Questa condizione necessaria non è però sufficiente, come dimostra il precedente es. del semianello $\mathfrak{S}^*$.

Teorema: Affinchè l'a.c.s. $\mathfrak{A}$ di un semianello non nullo S (complementarizzabile a sinistra) sia un corpo, è *sufficiente* che S soddisfi alle due condizioni seguenti:

i) tutti gli elementi non nulli di S sono semplificabili;

ii) qualunque siano $a, b \in S$ con $a \neq b$, una almeno delle due equazioni (risp. nelle incognite φ, ψ)

$$\varphi + a = b\,, \qquad \psi + b = a$$

è risolubile in S.

Se infatti $x = \gamma^{-1}(a - b)$ è un qualsiasi elemento $\neq 0$ di $\mathfrak{A}$ (quindi $a \neq b$), esiste, per la ii), $\alpha \in S$ oppure $\beta \in S$ tale risp. che $\alpha + a = b$ oppure $\beta + b = a$. Poichè $a \neq b$, sia α che β è $\neq 0$ e quindi, per la i), semplificabile. Avendosi allora $x = -\gamma^{-1}\alpha$ oppure $x = \gamma^{-1}\beta$, risulta risp. $x^{-1} = -\alpha^{-1}\gamma$

oppure $x^{-1} = \beta^{-1}\gamma$. L'esistenza in $\mathfrak{A}$ del reciproco x^{-1} di ogni $x \neq 0$ prova l'asserto. Questo teorema vale naturalmente anche per un a.c.d..

Le i), ii) sono ad es. soddisfatte nel semianello dei numeri naturali. Dunque l'a.c. di questo semianello (commutativo) è un corpo, che evidentemente coincide (a meno di isomorfismi) col corpo dei numeri razionali, (cfr. l'introduzione).

§ 2

11. - Se P è uno pseudoanello (n.° 1) contenente elementi semplificabili (sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione — n.° 1 —) l'insieme di questi può *non* essere un sotto-pseudoanello di P, (cioè può non essere sia additivamente che moltiplicativamente chiuso). Consideriamo infatti ad es., nell'anello delle matrici quadrate $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{ik})$ del 2° ordine sopra il corpo dei numeri razionali, l'insieme Γ delle matrici (a_{ik}) cogli elementi a_{ik} tutti positivi. Γ è evidentemente uno pseudoanello (non commutativo), anzi un semianello. Facilmente si verifica che, affinchè un elemento (a_{ik}) di questo semianello Γ sia semplificabile (in Γ), è necessario e sufficiente che il suo determinante $|a_{ik}|$ sia $\neq 0$. Difatti, la sufficienza di questa condizione essendo manifesta (se $|a_{ik}| \neq 0$, esiste, nell'anello suddetto, $(a_{ik})^{-1}$), se $(a_{ik}) \in \Gamma$ ed $|a_{ik}| = 0$, l'equazione $(a_{ik})(x_{ik}) = (0)$, con (0) matrice nulla, ammette evidentemente una soluzione non nulla $(x_{ik}) = (d_{ik})$ nell'anello suddetto; se (b_{ik}), (c_{ik}) sono allora due qualsiasi elementi di Γ (certo esistenti) tali che $(b_{ik}) - (c_{ik}) = (d_{ik})$, in Γ si ha $(a_{ik})(b_{ik}) = (a_{ik})(c_{ik})$ con $(b_{ik}) \neq (c_{ik})$, ossia (a_{ik}) non è ivi semplificabile. Quindi l'insieme Σ degli elementi semplificabili di Γ non è additivamente chiuso (si ha ad es. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$) e perciò Σ non è uno pseudoanello.

D'altra parte esistono evidentemente (basta pensare al semianello dei numeri naturali) pseudoanelli non nulli P contenenti un sotto-pseudoanello costituito da elementi semplifi-

cabili in P. Lo stesso pseudoanello Γ dell'es. precedente ne contiene uno: tale è infatti l'insieme Γ' delle matrici di Γ del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a > b$ (a, b numeri razionali positivi). Ciò si riconosce osservando che, se $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in \Gamma'$, da $a = b + c$, $a' = b' + c'$ con c, $c' > 0$ segue $aa' + bb' = (ab' + a'b) + cc'$ con $cc' > 0$, dunque $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in \Gamma'$. È poi chiaro che Γ' è anche additivamente chiuso e che ogni suo elemento è semplificabile in Γ (perchè ha il determinante $\neq 0$).

Esistono pure pseudoanelli non nulli P che contengono un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P tale che:

Δ) Dati comunque a, $a_1 \in P$, β, $\beta_1 \in \Pi$ si ha

$$a\beta_1 + \beta a_1 \in \Pi.$$

(Basta pensare ancora al semianello dei numeri naturali, assumendo ad es. in questo come sotto-pseudoanello Π quello costituito dai numeri pari.)

12. - Sia P uno pseudoanello contenente un sotto-pseudoanello Π costituito da elementi semplificabili in P.

Un sopra-pseudoanello $\mathfrak{S}$ di P si dirà uno *pseudoanello complementare sinistro* (*p.c.s.*) (*in senso stretto*) *di P rispetto a* Π se esso soddisfa alle tre condizioni seguenti:

1) $\mathfrak{S}$ è dotato sia di 0 che di 1;

2) Ogni elemento α di Π possiede sia opposto $-\alpha$ che reciproco α^{-1} in $\mathfrak{S}$;

3) Ogni elemento x di $\mathfrak{S}$ è rappresentabile nella forma $= \gamma^{-1}(a - \beta)$ con $a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$.

Se un tale sopra-pseudoanello $\mathfrak{S}$ esiste, P si dirà *strettamente complementarizzabile a sinistra rispetto a* Π, (la locuzione « rispetto a Π » si tralascerà se in particolare $\Pi = P$). Come subito si verifica (cfr. n.° 2) gli eventuali $\bar{0}$ ed $\bar{1}$ di P coincidono risp. con 0 ed 1.

Dimostreremo (nel n. 14) il seguente

Teorema: *Affinchè uno pseudoanello P, contenente un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P per cui vale la*

Δ) (*n.º* 11), *sia strettamente complementarizzabile a sinistra rispetto a* Π, *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente*:

B) *Dati comunque* $a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$, *esistono* $a_1 \in P$, β_1, $\gamma_1 \in \Pi$ *tali che*

$$\gamma_1 a + \beta_1 \gamma = \gamma_1 \beta + a_1 \gamma .$$

Per dimostrare questo teorema (a differenza di quanto fatto per quello del n.º 2) sfrutteremo dei risultati già noti, riguardanti problemi d'immersione per pseudogruppi. Avremmo però potuto dimostrarlo anche per via diretta, con procedimento analogo a quello seguito nei n.i 4-7.

13. - Premettiamo alcune osservazioni.

Se in uno pseudoanello P, *dotato di zero* $\bar{0}$, *vi è un sottinsieme* M *moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in* P *rispetto all'addizione, qualunque sia* $\alpha \in M$ *si ha*

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}\alpha = \bar{0} . \tag{62}$$

Infatti, se β è un qualsiasi elemento di M, da $\alpha\beta + \bar{0} = \alpha\beta = \alpha(\beta + \bar{0}) = \alpha\beta + \alpha\bar{0}$, segue (semplificando per $\alpha\beta \in M$) $\bar{0} = \alpha\bar{0}$; analogamente da $\beta\alpha + \bar{0} = \beta\alpha + \bar{0}\alpha$ segue $\bar{0} = \bar{0}\alpha$. La (62) vale dunque in particolare se il sottinsieme M di P è un sotto-pseudoanello costituito da elementi semplificabili (cfr. il 2º capov. del n.º 11). Altro caso particolare notevole:

Se un semianello S *è dotato di zero* $\bar{0}$, *si ha* $a\bar{0} = \bar{0}a = \bar{0}$, *qualunque sia* $a \in S$.

Dalla precedente osservazione segue che: *Se uno pseudoanello* P, *dotato di zero* $\bar{0}$, *contiene un sotto-pseudoanello* Π *costituito da elementi semplificabili in* P *e soddisfacente alla condizione* Δ) (n.º 11), *esso è necessariamente nullo* (n.º 10): $P = \{\bar{0}\}$. Infatti, (per la Δ)) da $\alpha \in \Pi$ segue $\bar{0}\alpha + \alpha\bar{0} \in \Pi$, ossia (2º capov. di questo n.º) $\bar{0} + \bar{0} \in \Pi$; quindi intanto $\bar{0} \in \Pi$. Se Π contenesse un altro elemento $\alpha \neq \bar{0}$, poichè $\alpha\bar{0} = \bar{0}\bar{0} (= \bar{0})$, α non sarebbe semplificabile, contro l'ip.; quindi $\Pi = \{\bar{0}\}$. Se allora P contenesse un $a \neq \bar{0}$, poichè (per la Δ)) $a\bar{0} + \bar{0}\bar{0} = a\bar{0} + \bar{0} = a\bar{0} \in \Pi = \{\bar{0}\}$, si avrebbe $a\bar{0} = \bar{0}\bar{0}$ con $a \neq \bar{0}$, il

che è assurdo (poichè $\bar{0}$, appartenendo a Π, è semplificabile in P); dunque appunto $P = \{\bar{0}\}$.

Dunque, se lo pseudoanello P è dotato di zero (*in particolare se P è un anello*) il teorema del n.° 12 diventa banale. Nella dimostrazione di tale teorema escluderemo perciò che P possegga lo zero.

Se uno pseudoanello P contiene un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P per cui vale la Δ), P è un semianello. Infatti, se $a + c = b + c$ ($a, b, c \in P$) e β è un qualsiasi elemento di Π, si ha $(a\beta + c\beta) + \beta c = (b\beta + c\beta) + \beta c$, donde, semplificando per $c\beta + \beta c \in \Pi$ (vedi Δ)), $a\beta = b\beta$, da cui appunto $a = b$.

In uno pseudoanello $\mathfrak{S}$ dotato di zero 0, affinchè tutti i multipli $x\alpha$, αx di ogni elemento α dotato di opposto siano pure dotati di opposto è necessario e sufficiente che sia

$$x0 = 0x = 0, \tag{62'}$$

qualunque sia $x \in \mathfrak{S}$. Infatti, se $x\alpha$ è dotato di opposto, da $x\alpha + x(\alpha - \alpha) = x(\alpha + \alpha - \alpha) = x\alpha$ segue $x(\alpha - \alpha) = x\alpha - x\alpha$, ossia appunto $x0 = 0$; analogamente, se esiste $-\alpha x$, si ha $0x = 0$. Viceversa, se vale la (62'), gli opposti di $x\alpha$, αx sono risp. $x(-\alpha)$, $(-\alpha)x$. Dunque:

La condizione (62') *è necessaria e sufficiente affinchè in uno pseudoanello $\mathfrak{S}$, dotato di* 0, *valgano le solite proprietà moltiplicative del segno meno,* ossia

$$x(-\alpha) = -x\alpha, \qquad (-\alpha)x = -\alpha x, \qquad (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta, \tag{63}$$

($x, \alpha, \beta \in \mathfrak{S}$; α, β dotati di opposto). Infatti la terza delle (63) è un'immediata conseguenza delle prime due.

14. - I simboli P e Π abbiano il significato dichiarato all'inizio del n.° 12, ed esista uno p.c.s. $\mathfrak{S}$ di P rispetto a Π. Dati allora comunque $a \in P$, $\beta, \gamma \in \Pi$, esistono (per la 3)) $a_1 \in P$, $\beta_1, \gamma_1 \in \Pi$ tali che in P si abbia (cfr. il n.° 3) $\gamma_1(a - \beta) = (a_1 - \beta_1)\gamma$, donde (addizionando ai due membri $\gamma_1\beta$) $\gamma_1 a = \gamma_1\beta + (a_1 - \beta_1)\gamma$, e di qui: $\gamma_1 a + \beta_1\gamma = \gamma_1\beta + a_1\gamma$. La necessità della condizione B) del teorema del n.° 12 è così dimostrata.

Nelle ipotesi dell'enunciato di tale teorema, dimostriamo ora la sufficienza della B).

Rispetto all'addizione P è un semigruppo (terzult. capov. del n.° 13) commutativo, di cui Π è un sotto-semigruppo. Per un noto teorema ([2], p. 150), esiste allora uno pseudogruppo delle differenze di P rispetto a Π, cioè un sopra-pseudogruppo P_0 di P, dotato di zero, in cui ogni elemento di Π ammette opposto, ed ogni elemento del quale è rappresentabile nella forma $a - \beta$ con $a \in P$, $\beta \in \Pi$; in P_0 valgono le regole di calcolo:

(64) $\quad a - \beta = a_1 - \beta_1$ se e soltanto se, in P, $a + \beta_1 = \beta + a_1$,

(65) $$(a - \beta) + (a_1 - \beta_1) = (a + a_1) - (\beta + \beta_1).$$

Poichè P è un semigruppo, anche lo pseudogruppo P_0 (come subito si verifica) è un semigruppo (commutativo). Diamo ora in P_0 la seguente *definizione* di moltiplicazione:

(66) $$(a - \beta)(a_1 - \beta_1) = (aa_1 + \beta\beta_1) - (a\beta_1 + \beta a_1).$$

Questa definizione ha intanto senso perchè, per la Δ), $a\beta_1 + \beta a_1 \in \Pi$ (e quindi è dotato di opposto in P_0). Inoltre, se (in P)

$$a + \beta' = \beta + a', \qquad a_1 + \beta_1' = \beta_1 + a_1',$$

in virtù di queste due eguaglianze si ha successivamente

$$a\beta_1 + \beta'\beta_1 + a'a_1' = \beta\beta_1 + a'\beta_1 + a'a_1' = \beta\beta_1 + a'a_1 + a'\beta_1',$$
$$(\beta a_1 + \beta' a_1') + \beta\beta_1 + a'a_1 + a'\beta_1' = a\beta_1 + \beta'\beta_1 + a'a_1' + (\beta a_1 + \beta' a_1'),$$
$$aa_1 + \beta' a_1' + \beta\beta_1 + \beta' a_1 + a'\beta_1' = a\beta_1 + \beta' a_1 + a'a_1' + \beta a_1 + \beta'\beta_1',$$

donde, semplificando per $\beta' a_1$ (e ricordando la Δ)), in P_0 risulta

$$(aa_1 + \beta\beta_1) - (a\beta_1 + \beta a_1) = (a'a_1' + \beta'\beta_1') - (a'\beta_1' + \beta' a_1').$$

dunque la moltiplicazione definita dalla (66) è univoca. Facilmente si verifica che questa moltiplicazione è associativa e distributiva (sia a destra che a sinistra) rispetto all'addizione (65). Dunque P_0 è un semianello (in cui valgono le re-

gole di calcolo (64), (65), (66)) dotato di zero $0(=\pi-\pi$, con $\pi \in \Pi$) tale che (n.° 13, 3° capov.):

$$(67) \qquad (a-\beta)0 = 0(a-\beta) = 0.$$

Se in particolare $a-\beta = b$, $a_1-\beta_1 = b_1$ con b, $b_1 \in$ P, come prodotto in P_0 di $(b+\beta)-\beta$ per $(b_1+\beta_1)-\beta_1$ si trova proprio (mediante la 66)) il prodotto bb_1 di b per b_1 in P; dunque P_0 *è un sopra-pseudoanello di* P. In P_0 la moltiplicazione, in virtù della (67), è distributiva anche rispetto alla sottrazione, (n.° 13, ult. capov.); ne segue subito che *ogni elemento di* Π *è semplificabile in* P_0.

Rispetto alla moltiplicazione P_0 è dunque un sopra-pseudogruppo di Π, in cui tutti gli elementi di questo sono semplificabili. In virtù della B) del n.° 12, in P_0 è soddisfatta inoltre la seguente condizione:

B_0) Dati comunque $(a-\beta) \in P_0$, $\gamma \in \Pi$, esistono $(a_1-\beta_1) \in P_0$, $\gamma_1 \in \Pi$ tali che

$$\gamma_1(a-\beta) = (a_1-\beta_1)\gamma.$$

Questa condizione, in base ad un teorema dimostrato da Murata ([5], Th. 1 a p. 2) (che generalizza un noto risultato di Ore — [6]; cfr. [2], p. 142 —), è sufficiente affinchè esista uno pseudogruppo dei quozienti a sinistra di P_0 rispetto a Π, cioè un sopra-pseudogruppo $\mathfrak{S}$ di P_0, dotato di 1, in cui ogni elemento di Π ammette reciproco, ed ogni elemento x del quale è rappresentabile nella forma $x = \gamma^{-1}(a-\beta)$ con $\gamma \in \Pi$, $(a-\beta) \in P_0$; questo $\mathfrak{S}$ è individuato da P_0 e Π a meno di isomorfismi.

Poichè dalla B_0) segue immediatamente che, dati comunque γ, $\gamma_1 \in \Pi$, esistono r, $r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ tali che, in P,

$$(68) \qquad r\gamma = \sigma\gamma + \alpha, \qquad r_1\gamma_1 = \sigma_1\gamma_1 + \alpha,$$

(si pensi, in P_0, ai due elementi $2\gamma-\gamma$, γ_1), se, in $\mathfrak{S}$ $\gamma^{-1}(a-\beta) = \gamma_1^{-1}(a_1-\beta_1)$, moltiplicando a sinistra per α ne viene che, in P,

$$(68') \qquad ra + \sigma\beta + r_1\beta_1 + \sigma_1 a_1 = r\beta + \sigma a + r_1 a_1 + \sigma_1\beta_1;$$

viceversa, se esistono $r, r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ per cui valgono (in P) le (68), (68'), in $\mathfrak{S}$ si ha $\alpha\gamma^{-1}(a-\beta) = \alpha\gamma_1^{-1}(a-\beta_1)$. Poichè inoltre, per la B_0), in corrispondenza ai due elementi $(a-\beta)$, γ_1, esistono $(p-\rho) \in P_0$, $\nu \in \Pi$ tali che, in $\mathfrak{S}$, $(a-\beta)\gamma_1^{-1} = \nu^{-1}(p-\rho)$, ne viene $\gamma^{-1}(a-\beta)\cdot\gamma_1^{-1}(a_1-\beta_1) = (\nu\gamma)^{-1}(p-\rho)(a_1-\beta_1)$. In conclusione, nello pseudogruppo (moltiplicativo) $\mathfrak{S}$ valgono le regole di calcolo:

$$\gamma^{-1}(a-\beta) = \gamma_1^{-1}(a_1-\beta_1) \tag{69}$$

se e soltanto se esistono $r, r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ per cui valgono (in P) le (68), (68');

$$\gamma^{-1}(a-\beta)\cdot\gamma_1^{-1}(a_1-\beta_1) = (\nu\gamma)^{-1}((pa_1+\rho\beta_1)-(p\beta_1+\rho a_1)), \tag{70}$$

dove $p \in P$, ρ, $\nu \in \Pi$ sono tali che (in P)

$$\nu a + \rho\gamma_1 = \nu\beta + p\gamma_1 . \tag{70'}$$

Dati, in $\mathfrak{S}$, $x = \gamma^{-1}(a-\beta)$, $x_1 = \gamma_1^{-1}(a_1-\beta_1)$, esiste (v. (68)) un $\alpha \in \Pi$ tale che $\alpha x = (r-\sigma)(a-\beta)$, $\alpha x_1 = (r_1-\sigma_1)(a_1-\beta_1)$, con $(r-\sigma)$, $(r_1-\sigma_1) \in P_0$, dunque tale che αx, $\alpha x_1 \in P_0$. Diamo allora in $\mathfrak{S}$ la seguente *definizione* di addizione: $x + x_1 = \alpha^{-1}(\alpha x + \alpha x_1)$ (la somma $\alpha x + \alpha x_1$ essendo calcolata nello pseudoanello P_0), ossia:

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(a-\beta) + \gamma_1^{-1}(a_1-\beta_1) = \alpha^{-1}((ra+\sigma\beta+r_1a_1+\sigma_1\beta_1)- \\ -(r\beta+\sigma a+r_1\beta_1+\sigma_1 a_1)),\end{aligned} \tag{71}$$

dove $r, r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ son cinque elementi per cui valgono le (68). La somma $\alpha^{-1}(\alpha x + \alpha x_1)$ non dipende ([5], p. 4, 4° capov.) dalla scelta di α (tale che αx, $\alpha x_1 \in P_0$), quindi l'addizione ora definita è univoca. Inoltre, se in particolare x, $x_1 \in P_0$, qualunque sia $\alpha \in \Pi$ si ha αx, $\alpha x_1 \in P_0$, quindi in $\mathfrak{S}$: $x + x_1 = \alpha^{-1}\cdot\alpha(x+x_1) = x + x_1$, quest'ultima somma essendo calcolata in P_0.

Osserviamo che, se in particolare (con le notazioni del preced. capov.) $\gamma = \gamma_1$, allora $\gamma x = (a-\beta) \in P_0$, $\gamma x_1 = (a_1-\beta_1) \in P_0$; dunque in $\mathfrak{S}$ si ha

$$\gamma^{-1}(a-\beta) + \gamma^{-1}(a_1-\beta_1) = \gamma^{-1}((a-\beta)+(a_1-\beta_1)) \tag{72}$$

$(\gamma \in \Pi$, $(a-\beta)$, $(a_1-\beta_1) \in P_0)$.

Ne segue che l'addizione in $\mathfrak{S}$ è associativa. Dati infatti x, x_1, $x_2 \in \mathfrak{S}$, esiste ([5], Lemma 3) un $\lambda \in \Pi$ tale che λx, λx_1, $\lambda x_2 \in P_0$, quindi, in virtù della (72), si ha: $(x + x_1) + x_2 = \lambda^{-1}(\lambda x + \lambda x_1) + \lambda^{-1} \cdot \lambda x_2 = \lambda^{-1}(\lambda x + \lambda x_1 + \lambda x_2) = x + (x_1 + x_2)$.

In $\mathfrak{S}$ la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione ([5], p. 4, penult. ed ult. capov.). Dunque (poichè, come sopra osservato, la somma di due elementi di P_0, calcolata in $\mathfrak{S}$, coincide con quella calcolata in P_0) $\mathfrak{S}$ *è un sopra-pseudoanello* (di P_0 e quindi) *di* P. Inoltre, per la (67), in $\mathfrak{S}$ si ha

$$0 = 1 \cdot 0 = \pi^{-1} \cdot \pi 0 = \pi^{-1} \cdot 0, \tag{73}$$

dove 0 è lo zero di P_0 e π è un qualsiasi elemento di Π. In base alla (73) si vede subito che $\mathfrak{S}$ *è dotato di zero* (che coincide con lo zero di P_0), *il quale gode della proprietà* (62'). La prima affermazione ($x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathfrak{S}$) risulta dalla (72), la seconda dalle (70), (70') assumendo dapprima $a_1 = \beta_1$ e poi $a = \beta$. Si noti che, come vedremo al n.° successivo, la (62') implica che $\mathfrak{S}$ *è un semianello.*

È ormai chiaro che lo pseudoanello $\mathfrak{S}$ (in cui valgono le regole di calcolo (69), (70), (71)) è uno p.c.s. di P rispetto a Π; quindi il teorema enunciato al n.° 12 è dimostrato.

15. - Oltre al teorema di esistenza enunciato al n.° 12, vale anche adesso (cfr. il n.° 2) il seguente teorema di unicità:

I simboli P e Π avendo il significato detto nell'enunciato del teorema del n.° 12, *se esiste uno p.c.s.* (*in senso stretto*) $\mathfrak{S}$ *di* P *rispetto a* Π, $\mathfrak{S}$ è *univocamente determinato da* P *e* Π *a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione: Se $\mathfrak{S}'$ è un qualsiasi p.c.s. di P rispetto a Π, dalla Δ) del n.° 11 segue anzitutto che ogni elemento di P è semplificabile *in* $\mathfrak{S}'$ rispetto all'addizione. Infatti, in $\mathfrak{S}'$, da $y + a = z + a$ (y, $z \in \mathfrak{S}'$ a $\in \mathfrak{S}$) segue $(y\beta + a\beta) + \beta a = (z\beta + a\beta) + \beta a$, qualunque sia $\beta \in \Pi$; ma poichè $a\beta + \beta a \in \Pi$ e quindi (per la 2)) esiste in $\mathfrak{S}'$ l'opposto $-(a\beta + \beta a)$, ne viene che $y\beta = z\beta$, donde appunto, semplificando per β (che, per la 2), è dotato di reciproco in $\mathfrak{S}'$), $y = z$. Ma allora (2° capov. del n.° 13), in $\mathfrak{S}'$ si ha

$$a0 = 0a = 0 \tag{74}$$

qualunque sia $a \in P$; ne segue (cfr. gli ultimi due capoversi del n.° 13) che in $\mathfrak{S}'$ si ha pure

$$(63') \quad a(-\beta) = -a\beta, \qquad (-\beta)a = -\beta a, \qquad (-\beta)(-\gamma) = \beta\gamma$$

qualunque siano $a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$. In virtù delle (63'), le differenze $a - \beta$ ($a \in P$, $\beta \in \Pi$) costituiscono in $\mathfrak{S}'$ un sotto -pseudoanello P'_0 in cui valgono le regole di calcolo (64), (65), (66) e che soddisfa alla condizione B_0) (ove si legga P'_0 invece di P_0), onde basta ripetere il ragionamento fatto per $\mathfrak{S}$ al n.° preced. per concludere che anche in $\mathfrak{S}'$ valgono le regole di calcolo (69), (70), (71). Ne segue immediatamente che, associando gli elementi di $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ che ammettono una medesima rappresentazione $\gamma^{-1}(a - \beta)$ ($a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$), la corrispondenza così ottenuta fra $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{S}'$ è appunto un isomorfismo. Si osservi che, in virtù di questo isomorfismo, in $\mathfrak{S}'$ (oltre alla (74)) vale pure la (62') (per ogni $x \in \mathfrak{S}'$).

Osserveremo adesso che, i simboli P e Π avendo il significato dichiarato all'inizio del n.° 12, *se uno p.c.s* $\mathfrak{S}$ *di* P *rispetto a* Π (supposto esistente) *soddisfa alla condizione* (62'), $\mathfrak{S}$ (e quindi P) *è necessariamente un semianello.* Infatti la (62') implica (v. il penult. capov. del n.° 13) che tutti i multipli $x\alpha$, αx ($x \in \mathfrak{S}$) di ogni $\alpha \in \Pi$ (dotato, per la 2), di opposto) siano pure dotati di opposto in $\mathfrak{S}$, e perciò quivi semplificabili rispetto all'addizione. Ne segue che, in $\mathfrak{S}$, da $x + y = x + z$ si trae $x\alpha + y\alpha = x\alpha + z\alpha$ qualunque sia $\alpha \in \Pi$, donde $y\alpha = z\alpha$ e di qui appunto (moltiplicando a destra per α^{-1}) $y = z$. Con ciò abbiamo giustificato un'affermazione fatta alla fine del penult. capov. del n.° precedente.

Dalla precedente osservazione discende dunque che, ove per uno p.c.s. di P rispetto a Π (questi due simboli avendo il significato detto all'inizio del n. 12) si intendesse un sopra-pseudoanello $\mathfrak{S}$ di P soddisfacente, oltre che alle condizioni 1), 2), 3) del n.° 12, anche alla (62'), il problema d'immersione illustrato al n.° 12 (prima dell'enunciato del teor.) perderebbe notevolmente in generalità, in quanto resterebbero allora esclusi dalla sua considerazione tutti quegli pseudoanelli P che (pur contenendo un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P) non fossero semianelli.

Quanto si è detto fin qui in questo n.° porge lo spunto per osservare che il teorema del n.° 12 fornisce condizioni *sufficienti* affinchè un semianello (n.° 13, terzult. capov.) P, contenente un sotto-semianello Π di elementi semplificabili in P, si possa immergere in un semianello (v. la fine del penult. capov. del n.° preced.) $\mathfrak{S}$, dotato di 0 ed 1, in cui ogni elemento di Π ammetta sia reciproco che opposto: queste condizioni sono la B) e la Δ) (n.i 12, 11). L'interesse, in questo senso, del teorema in discorso sta nel fatto che non si può escludere a priori (cfr. n.° 9, 6° capov.) che per una coppia P, Π non sia soddisfatta la condizione A) del n.° 2 (ove si legga P, Π invece risp. di S, M), ma lo siano invece la B) e la Δ).

Per quanto riguarda poi il problema d'immersione illustrato al n.° 12 (prima dell'enunciato del teor.), osserveremo ancora che il teorema del n.° stesso non lo risolve in modo completo, nel senso che (i simboli P, Π avendo il significato detto all'inizio del n.° 12) esso fornisce condizioni sufficienti (la B) e la Δ)) per l'esistenza di uno p.c.s. di P rispetto a Π, delle quali la sola B) è anche necessaria (n.° 14, 1° capov.). Che tale non sia invece la Δ) si riconosce infatti assumendo ad es. $P = I =$ anello dei numeri interi, $\Pi = N =$ semianello dei numeri naturali. N è evidentemente un sotto-pseudoanello di I cogli elementi tutti semplificabili in I, ma la coppia I, N non soddisfa certo alla Δ) (cfr. n.° 13, 4° capov.); ciò nonostante il corpo dei numeri razionali è evidentemente uno p.c.s. di I rispetto ad N, (la B) è verificata perchè I è commutativo — cfr. n.° 9 —).

Intendendo per un *ideale* di uno pseudoanello P un sotto-pseudoanello Π di P tale che $\beta \in \Pi$ implica $a\beta$, $\beta a \in \Pi$ qualunque sia $a \in P$, osserveremo infine che dal teor. del n.° 12 e dal 2° capov. di questo n.° segue immediatamente il

Corollario: *Affinchè uno pseudoanello P, contenente un ideale Π costituito da elementi semplificabili in P, sia strettamente complementarizzabile a sinistra rispetto a Π, è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione* B) *del* n.° 12. *Se esiste uno p.c.s. $\mathfrak{S}$ di P rispetto a Π, $\mathfrak{S}$ è univocamente determinato da P e Π a meno di isomorfismi.*

Naturalmente anche il teorema del n.° 12 si presta (entro opportuni limiti) a considerazioni analoghe a quelle svolte nei n.i 9, 10, che qui però tralasciamo.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. ASANO: *Über die Quotientenbildung von Schiefringen*, Journ. Math. Soc. Japan, vol 1 (1949), pp. 73-78.
[2] P. DUBREIL: *Algèbre, I*, Gauthier-Villars (1946).
[3] N. JACOBSON: *Lectures in Abstract Algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).
[4] U. MORIN: *Algebra astratta e geometria algebrica, Parte prima*, (litografie), Cedam (1955).
[5] K. MURATA: *On the Quotient Semi-group of a Noncommutative Semi-group*, Osaka Math. Journ., vol. 2 (1950), pp. 1-5.
[6] O. ORE: *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math., vol. 32 (1931), pp. 463-477.