Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Lamberto Cattabriga

Osservazioni sul problema generalizzato di Dirichlet

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 45-52

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__45_0>

OSSERVAZIONI SUL PROBLEMA GENERALIZZATO DI DIRICHLET

Nota (*) *di* LAMBERTO CATTABRIGA (*a Bologna*)

1. - Sia D un dominio [1]) limitato di S_3 tale che la sua frontiera consti di un numero finito di superficie semplici chiuse prive a due a due di punti comuni; ammetta una rappresentazione parametrica

$$x = \bar{x}(r, s) \quad , \quad y = \bar{y}(r, s) \quad , \quad z = \bar{z}(r, s)$$

di dominio base T, avente la frontiera costituita da un numero finito di insiemi chiusi e connessi, tale che $\bar{x}(r, s)$, $\bar{y}(r, s)$, $\bar{z}(r, s)$ e le loro derivate dei primi due ordini siano continue in T e il quadrato della matrice jacobiana $EG - F^2$ sia ivi sempre positivo; inoltre abbia in ogni punto curvature principali $1/R_1$, $1/R_2$ variabili con continuità.

Il problema di Dirichlet per le funzioni armoniche, generalizzato al modo di G. Cimmino, si pone allora nel dominio D al modo seguente:

Assegnata la funzione $f(r, s)$ di quadrato sommabile in T, determinare una funzione $u(x, y, z)$ armonica in $D - FD$, la quale converga in media su FD verso i valori della $f(r, s)$.

Per definire ciò che si intende nell'enunciato del problema per convergenza in media, il modo più semplice e naturale è,

---

(*) Pervenuta in Redazione il 3 novembre 1954.

La presente Nota è stata argomento di una breve comunicazione al Congresso dei Matematici tenuto ad Amsterdam dal 2 al 9 Settembre 1954.

1) Secondo la definizione datane da M. Picone, intendiamo qui per dominio un insieme chiuso, tale che ogni suo punto frontiera sia punto di accumulazione di punti interni.

in questo caso, di considerare il sistema di superficie con rappresentazione parametrica di dominio base T

$$(1)\qquad \begin{cases} x(r, s, t) = \bar{x}(r, s) + t\xi(r, s) \\ y(r, s, t) = \bar{y}(r, s) + t\eta(r, s) \\ z(r, s, t) = \bar{z}(r, s) + t\zeta(r, s) \end{cases}$$

ove $\xi(r, s)$, $\eta(r, s)$, $\zeta(r, s)$ indicano i coseni direttori della normale interna su FD e t è un parametro variabile in un intorno dèstro (o, δ) sufficientemente piccolo dello zero.

Ciascuna di queste superficie è parallela ad FD e costituisce la frontiera FD_t di un dominio D_t tutto interno a D; inoltre per $t \to o$ esse approssimano uniformemente FD. *Se ora $f(r, s)$ è una funzione di quadrato sommabile in T, diremo che una funzione $u(x, y, z)$ definita in $D - FD$ converge in media verso i valori di $f(r, s)$ su FD od anche brevemente che la u assume in media i valori f su FD quando è*:

$$\lim_{t \to 0} \int\!\!\int_T \left\{ u[x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t)] - f(r, s) \right\}^2 drds = 0.$$

Notiamo peraltro, che la convergenza in media si può definire a partire da altri sistemi di superficie approssimanti, la scelta essendo possibile con larga arbitrarietà senza che la soluzione del problema enunciato dipenda effettivamente da questa scelta. Infatti da quanto è dimostrato nei lavori di G. Cimmino [1], [2], si trae in particolare che il problema così posto ammette una e una sola soluzione, la quale, almeno sotto ipotesi abbastanza larghe, risulta indipendente dalla scelta delle superficie approssimanti. Ciò è ottenuto con metodi di analisi funzionale, ispirati ad un'idea di R. Caccioppoli [3], i quali, come è stato recentemente precisato dallo stesso Cimmino [4], richiedono soltanto la conoscenza delle più semplici proposizioni relative allo spazio hilbertiano. Seguendo il metodo di Caccioppoli, C. Miranda [5] ha poi mostrato l'esistenza della soluzione del problema ordinario di Dirichlet per le funzioni armoniche, nel caso di domini sufficientemente regolari, applicando il teorema di Hahn-Banach allo spazio delle funzioni continue sulla frontiera dei domini considerati.

Vediamo qui invece come, fondandosi sull'esistenza della soluzione del problema generalizzato enunciato, si possa mostrare semplicemente, senza far uso del teorema di Hahn-Banach, l'esistenza della soluzione del corrispondente problema ordinario, e di problemi in cui la condizione al contorno sia in parte assegnata in modo classico e in parte in modo generalizzato.

2. - Fondamentale è il seguente lemma, già enunciato nel caso di due variabili da G. Cimmino, con un cenno di dimostrazione peraltro non sufficiente.

LEMMA. - *Se la funzione $f(P)$ di quadrato sommabile su FD è ivi quasi dappertutto positiva, la funzione $u(P)$ armonica in $D - FD$, che assume in media su FD i valori $f(P)$, si mantiene positiva in tutto $D - FD$.*

Basta mostrare che la u non può essere negativa in $D - FD$. Supponiamo allora che la u assuma valori negativi in $D - FD$; l'insieme dei punti per cui ciò accade è certamente aperto e quindi se non è connesso, sarà la somma di un numero finito o di una infinità numerabile di insiemi aperti e connessi. Sulla frontiera di questi, almeno nei punti ~~che non appartengono anche ad~~ $\cancel{FD}$~~, la~~ $\cancel{u}$ ~~sarà nulla e vice-~~ versa un punto interno a D in cui la u sia nulla apparterrà alla frontiera di uno almeno di tali insiemi. In $D - FD$ il luogo $u = 0$ è costituito da porzioni di superficie regolari (analitiche), non può avere punti di bordo interni a D ed inoltre non può costituire la completa frontiera di un insieme tutto contenuto in $D - FD$, altrimenti la u, identicamente nulla in tale insieme, lo sarebbe anche in tutto $D - FD$ e non potrebbe assumere in media su FD valori quasi dappertutto positivi. Se dunque A è uno qualunque dei componenti connessi dell'insieme in cui la u è negativa, esso risulta aperto e semplicemente connesso e la sua frontiera ha punti in comune con FD. Ne segue che, almeno per t sufficientemente piccolo, esso avrà punti in comune con FD_t, i quali corrisponderanno ai punti di un insieme E_t contenuto in T, secondo la corrispondenza continua stabilita per ogni t dalle (1). E_t risulta aperto, se si prescinde da eventuali porzioni di FT, ed in ogni caso misurabile, ed allora per la supposta convergenza in media della u, è pure

$$\lim_{t \to 0} \int_{E_t} [u - f]^2 drds = 0 ;$$

anzi, poichè la u è sempre negativa in E_t,

$$\lim_{t \to 0} \int_{E_t} u^2 drds = 0. \tag{2}$$

Il lemma sarà stabilito se mostriamo che questa relazione non può sussistere per u non identicamente nulla in A. Ciò equivale a mostrare l'unicità di soluzione del problema generalizzato per l'insieme A, usando come insiemi approssimanti gli insiemi $A.D_t$. Per stabilire un'identità fondamentale del tipo di quelle usate da G. Cimmino in [1], [2], [4], introduciamo la funzione v così definita in D:

$$v(P) = \begin{cases} u(P) & \text{per } P \varepsilon A \\ 0 & \text{per } P \varepsilon D - A \end{cases}$$

e tramite le (1) la funzione

$$\pi(r, s, t) = \sqrt{\left\| \begin{matrix} x_r & y_r & z_r \\ x_s & y_s & z_s \end{matrix} \right\|^2} = \sqrt{EG - F^2} \left(1 - \frac{t}{R_1}\right)\left(1 - \frac{t}{R_2}\right),$$

che per le ipotesi fatte, è definita e continua per (r, s) in T e t in $(0, \delta)$, ed ivi sempre positiva. Riesce allora per ogni t:

$$\int_{E_t} \pi(r, s, t) u^2(\bar{x} + t\xi, \bar{y} + t\eta, \bar{z} + t\zeta) drds = \tag{3}$$

$$= \int_T \pi(r, s, t) v^2(\bar{x} + t\xi, \bar{y} + t\eta, \bar{z} + t\zeta) drds.$$

Qualunque sia t interno a $(0, \delta)$, derivando perciò il secondo membro di (3) sotto al segno di integrale, si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\int_{E_t} \pi(r, s, t)u^2(\bar{x} + t\xi, \bar{y} + t\eta, \bar{z} + t\zeta)drds =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{T} \pi(r, s, t)v^2(\bar{x} + t\xi, \bar{y} + t\eta, \bar{z} + t\zeta)drds =$$

$$= 2t\int_{E_t} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{R_1R_2} u^2drds - \int_{E_t} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{R_1R_2}(R_1 + R_2)u^2drds -$$

$$- 2\int_{F(A\cdot D_t)} u(u_x dydz + u_y dzdx + u_z dxdy)$$

tenendo presente che gli unici punti frontiera di $A.D_t$ su cui non si annulla la u sono quelli corrispondenti ai punti di E_t. L'ultimo integrale si può trasformare mediante le formule di Green in un integrale di volume e quindi:

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\int_{E_t} \pi(r, s, t)u^2(\bar{x} + t\xi, \bar{y} + t\eta, \bar{z} + t\zeta)drds =$$

$$= 2t\int_{E_t} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{R_1R_2} u^2drds - \int_{E_t} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{R_1R_2}(R_1 + R_2)u^2drds -$$

$$- 2\int_{A\cdot D_t} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)dxdydz.$$

Se ora la u non è identicamente nulla in A, l'integrale di volume al secondo membro sarà positivo e crescente al decrescere di t, mentre dalla (2) segue la convergenza a zero, per $t \to 0$, anche dei due integrali doppi a secondo membro. Si conclude che, per t abbastanza prossimo a zero il secondo membro di (4) dovrebbe essere negativo, cioè l'integrale a primo membro dovrebbe crescere al decrescere di t ed essendo positivo per ogni t, non può convergere a zero per $t \to 0$, come seguirebbe dalla (2).

Il lemma resta così provato.

3. - Si può ora stabilire il seguente

TEOREMA. - *Se $f(P)$ è limitata su FD, eventualmente a meno di un insieme di misura nulla, e se essa è continua in un punto P_0 di FD, la funzione $u(P)$ armonica in $D - FD$, assumente in media su FD i valori della $f(P)$, tenderà al valore di f in P_0, quando il punto P tende a P_0.*

La dimostrazione è, con opportune varianti, quella esposta da G. Cimmino per il problema piano in [1].

Fissato un numero positivo ε arbitrario, sia Ω una porzione di FD contenente P_0 tale che in ogni suo punto P risulti

$$| f(P) - f(P_0) | < \varepsilon .$$

Se $u_1(P)$, $u_2(P)$ sono le due funzioni armoniche in $D - FD$ assumenti in media su FD rispettivamente i valori:

$$\varphi_1(P) = \begin{cases} f(P) - f(P_0) & \text{su } \Omega \\ 0 & \text{su } FD - \Omega \,, \end{cases}$$

$$\varphi_2(P) = \begin{cases} 0 & \text{su } \Omega \\ f(P) - f(P_0) & \text{su } FD - \Omega \end{cases}$$

risulta di conseguenza in tutto $D - FD$:

$$u(P) - f(P_0) = u_1(P) + u_2(P).$$

Sia ora O un punto esterno a D tale che la sfera di centro O e raggio OP_0 non contenga punti di D diversi da P_0, mentre la sfera a questa concentrica e di raggio $k \cdot OP_0$, con $k > 1$, non contenga alcun punto di $FD - \Omega$. Ciò è possibile, qualunque sia P_0 su FD, per le ipotesi di regolarità fatte all'inizio.

La funzione

$$w(P) = \frac{2Mk}{k-1}\left(1 - \frac{OP_0}{OP}\right)$$

con $M > | f(P) |$ quasi dappertutto su FD, risulta allora armonica in $D - FD$, uguale a zero per $P = P_0$, positiva su Ω e maggiore di $| f(P) - f(P_0) |$ su $FD - \Omega$. In base al lemma provato valgono allora in tutto $D - FD$ le diseguaglianze

$$-\varepsilon < u_1(P) < \varepsilon \quad , \quad -w(P) < u_2(P) < w(P)$$

dalle quali per $P \to P_0$ si trae l'asserto.

Il teorema permette così di concludere in particolare che se la funzione $f(P)$ assegnata è continua su tutto FD, la soluzione del problema generalizzato enunciato, di cui conosciamo l'esistenza, assumerà punto per punto, cioè come richiesto dal problema ordinario, i valori $f(P)$ e quindi sarà pure la soluzione del corrispondente problema ordinario. Nel caso poi in cui la $f(P)$ sia continua solo su una porzione, eventualmente in un unico punto, di FD la soluzione del problema generalizzato riesce pure soluzione del problema in cui la condizione al contorno sia intesa in senso ordinario su questa porzione e nel senso generalizzato introdotto su tutta la parte rimanente di FD.

4. - Da ultimo osserviamo che quanto si è mostrato vale anche in casi in cui non siano soddisfatte tutte le ipotesi indicate all'inizio. Ad esempio si può ammettere, con opportune limitazioni, che FD sia costituita da porzioni di superficie secantesi a due a due, ciascuna soddisfacente alle ipotesi indicate in **1.** per FD. Un semplice esempio di questo si ha nel caso in cui D sia un cilindro: l'esistenza della soluzione del problema generalizzato si mostra scegliendo ancora superficie cilindriche e, come proverò altrove, è facile vedere che continuano a valere i risultati che si sono ora conseguiti.

Con procedimenti analoghi a quelli qui tenuti, si dovrebbe inoltre potere stabilire l'esistenza della soluzione del problema ordinario di Dirichlet, anche quando si considerino domini dell'S_n o, anzichè il caso armonico, si tratti quello di una equazione lineare omogenea di tipo ellittico a coefficienti analitici.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CIMMINO: *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione del problema generalizzato di Dirichlet.* « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », vol. LXI, (1937).

[2] G. CIMMINO: *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson.* « Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », vol. XI, (1940).

[3] R. CACCIOPPOLI : *Sui teoremi di esistenza di Riemann.* « Rend. Accad. Sc. Fis. Mat., Napoli », (4), 4 - (1934) e « Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa », (2), 7 - (1938).

[4] G. CIMMINO : *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico.* « Rend. del Sem. Mat. Fis. di Milano », vol. XXIII, (1952).

[5] C. MIRANDA : *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche.* « Atti Accad. Naz. Linc., Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat. (8), 3, (1947).