

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GEORG LUKAS TAUTZ

**Zur Theorie des dirichletschen Problems bei
nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 24 (1955), p. 421-442

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__421_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__421_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ZUR THEORIE DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS BEI NICHTLINEAREN ELLIPTISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Nota () di* GEORG LUKAS TAUTZ *(a Friburgo i. B.)*

*(Wilhelm Süss Zum 60 Geburtstag gewidmet) (**)*

Bei linearen elliptischen Differentialgleichungen lässt sich bekanntlich das Dirichletsche Problem im Kleinen für stetige Randwerte und hinreichend kleine und reguläre Gebiete stets eindeutig lösen. Wie ich vor einiger Zeit¹⁾ gezeigt habe, stellt umgekehrt ein Operator, der jeder stetigen Randfunktion f für eine gewisse Klasse $\mathfrak{S}$ von Gebieten ω eine Funktion im Innern zuweist, das allgemeine Integral einer linearen elliptischen Differentialgleichung dar, falls er bei festem ω bezüglich f linear ist und noch gewisse weitere Forderungen erfüllt. In einer demnächst erscheinenden Abhandlung über das lineare Umkehrungsproblem, welche im folgenden mit «A» zitiert werde, wird das frühere Resultat unter einfacheren Bedingungen ge-

(*) Pervenuta in Redazione il 5 maggio 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Friburgo i. B., Germania.

(**) Diese Note ist die ausführliche Darstellung der kurzen in den Atti del convegno internazionale di Trieste (August 1954) erschienenen Vortragswiedergabe. Allerdings sind die dortigen Bedingungen vereinfacht und abgeschwächt, die Resultate also verallgemeinert worden. Insbesondere werden durch die schwächere Fassung des Postulats V jetzt alle elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfasst, während in der früheren Form nur die quasilinearen Gleichungen den Postulaten genügten.

¹⁾ Archiv der Mathematik III (1952), Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen I, II, III. S. 232.

löst. Insbesondere bleibt die Forderung der Existenz einer Grundlösung weg.

Im folgenden wird bewiesen, dass auch im nichtlinearen Falle Ähnliches gilt wie im linearen. Genauer handelt es sich um die Umkehrung eines zuerst wohl von J. Schauder²⁾ bewiesenen Satzes, wonach man aus der Existenz einer elliptischen Lösung einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung und aus deren eindeutiger Lösbarkeit auf die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems in der Nachbarschaft der gegebenen Lösung schliessen kann. Bedeutet $x = (x_1, \dots, x_n)$ einen Punkt des R^n und ist

$$\Phi(x, u, u_i, u_{ik}) = 0$$

die Differentialgleichung für die Funktion $u = F(x)$ mit den Ableitungen $u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $u_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$, so heisst $u = F(x)$ elliptisch für die Differentialgleichung, wenn die zugehörige lineare homogene Jacobische Differentialgleichung (Variationsgleichung) elliptisch ist. Will man den Satz von Schauder umkehren, so wird man von einer ausgezeichneten Funktion $F_0(x)$ ausgehen, die genügend differenzierbar ist, und weiter in einer Umgebung von F_0 einen Operator $R_{f; \omega}(x)$ definieren, welcher jeder Funktion F auf dem Rande von ω , die nicht zu sehr von F_0 abweicht, eine Funktion im Innern von ω mit stetigem Randanschluss zuweist (Postulat I, § 1). Dem Umstand, dass bei der Differentialgleichung die Variationsgleichung, d. h. die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial u_{ik}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ existieren sollen, entspricht jetzt die Forderung nach der Existenz einer ersten Variation $R_{\eta; \omega}^F$ von $R_{F; \omega}$, d. h. der Ableitung von $R_{F; \omega}$ nach einem Parameter (Postulat II). Ausser Differenzierbarkeitseigenschaften (Postulat III) wird man noch eine Stetigkeitseigenschaft der ersten Variation $R_{\eta; \omega}^F$ in bezug auf die « Basisfunktion » F annehmen dürfen (Postulat V). Postulat IV gibt noch eine

²⁾ Math. Annalen 106. J. Schauder, Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. S. 661.

naheliegende Beschränktheitseigenschaft der ersten Variation. Unter diesen Annahmen wird gezeigt, dass der Operator $R_{F;\omega}$ das allgemeine Integral einer gewissen elliptischen Differentialgleichung ist, deren Jacobische Gleichung die erste Variation $R_{\eta;\omega}^F$ als Lösung besitzt. Natürlich wird man verlangen müssen, dass die Postulate stets erfüllt sind, wenn $R_{F;\omega}$ das allgemeine Integral einer gegebenen elliptischen Differentialgleichung mit hinreichenden Differenzierbarkeitseigenschaften ist. Die Verifizierung dieser Forderung soll an anderer Stelle geschehen ³⁾).

1. Präzisierung der Aufgabe.

Es sei Ω ein Gebiet des R^n , $\mathfrak{s}$ eine Schar von Gebieten aus Ω mit analytischem Rand. $\mathfrak{s}$ enthalte insbesondere für jeden Punkt $x \in \Omega$ Kugeln um x von beliebig kleinem Radius. Es genügt, wenn $\mathfrak{s}$ nur diese Kugeln enthält. Die fünf Postulate formulieren wir in Anlehnung an eine Arbeit von Beckenbach und Jackson ⁴⁾ wie folgt. $\{F\}$ sei eine gewisse Klasse von dreimalstetig differenzierbaren Funktionen. Gehört eine Funktion $F(x)$ bezüglich $\omega \subseteq \Omega$ zu $\{F\}$ ⁵⁾, so gehört sie auch bezüglich jedes Teilgebietes von ω zu $\{F\}$. $F(x)$ heiße dann «in ω regulär». Wir benutzen des Weiteren folgende *Bezeichnungen*:

$D^i F$ bedeute eine Ableitung i -ter Ordnung von F , z. B. $D^2 F$ für $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$. Etwas genauer schreiben wir diese auch in der Form $D_{ik} F$.

$$\|F\|^\omega = \|F\|_\omega^\omega = \max_{x \in \omega} |F(x)|$$

$$\|F\|_\sigma^\omega = \max \{ \|F\|^\omega, \|D^1 F\|^\omega, \dots, \|D^i F\|^\omega \},$$

wo sämtliche Ableitungen zu durchlaufen sind. Ist σ eine hinreichend reguläre Fläche im R^n , so habe $\|F\|_\sigma^\sigma$ eine analoge Bedeutung wie $\|F\|_\sigma^\omega$. Nur dürfen jetzt bloss *innere* Ablei-

³⁾ Vgl. hierzu die Bemerkung am Schlusse der Arbeit.

⁴⁾ Subfunctions of several variables, Pacif. Journ. Math. (1953).

⁵⁾ d. h. $F(x)$ ist in ω mit einer Funktion aus $\{F\}$ identisch.

tungen der Fläche bis einschliesslich zur Ordnung i benutzt werden. Weiterhin bezeichnen wir mit $\bar{\omega}$ die abgeschlossene Hülle des sonst als offen anzusehenden Gebietes ω . $Rd\omega$ bezeichnet den Rand von ω .

Es sei bemerkt, dass natürlich z. B. für eine in einer Umgebung der Fläche σ definierte Funktion $\max \{ \|F\|^\sigma, \|D^1 F\|^\sigma \}$ etwas anderes bedeutet als $\|F\|_1^\sigma$. Von einer in ω ($\bar{\omega}$) i -mal stetig differenzierbaren Funktion sagen wir mit Lichtenstein, sie gehöre zur Klasse $C_i^\omega(C_i^\sigma)$. Entsprechend ist C_i^σ die Klasse der Funktionen, die auf σ stetige innere Ableitungen bis einschliesslich der i -ten Ordnung besitzen. Es folgen nun die Postulate:

I. EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT. Zu jeder in ω_0 regulären Funktion F gebe es eine positive Konstante M_F derart, dass für jedes $\omega \in \mathfrak{S}$ und $\bar{\omega} \subset \omega_0$ und jede Funktion f der Klasse C_3^σ ($\sigma = Rd\omega$), welche der Bedingung

$$\|f - F\|_3^\sigma < M_F$$

genügt, eine und nur eine in ω reguläre, und auf $\bar{\omega}$ stetige Funktion mit den Randwerten f existiert. Sie werde mit $R_{f; \omega}(x)$ bezeichnet.

II. ERSTE VARIATION. Sei $F \in C_3^\omega$ in $\omega \in \mathfrak{S}$ regulär. Weiter sei die Funktion $\eta_\varepsilon(x)$ der Klasse C_3^σ mit allen Ableitungen in $\sigma \times e$ stetig. Dann existiert die « erste Variation »

$$\left[\frac{\partial R_{F+\varepsilon\eta_\varepsilon; \omega}(x)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \quad (x \in \bar{\omega}).$$

Ihr Wert hängt nur ab vom Grenzwert $\eta(x) = \eta_0(x)$ und werde durch $R_{\eta; \omega}^F$ bezeichnet. $F(x)$ heisst « Basis ».

III. DIFFERENZIERBARKEIT. $\eta(x)$ sei von der Klasse C_3^σ . Dann existieren für die Funktion $F_\varepsilon(x) = R_{F+\varepsilon\eta; \omega}(x)$ in $\omega \times e$ ausser D^i ($i = 1, 2, 3$) und $\frac{\partial}{\partial \varepsilon}$ noch die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} D^i$ und

⁶⁾ e bedeutet das Intervall $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ (ε_0 hinreichend klein), und $\sigma \times e$ ($\sigma = Rd\omega$) das topologische Produkt von σ und e .

sind stetig in $\omega \times e$. Es gelten also alle Vertauschbarkeitsrelationen $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} D^i = D^i \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$.

$D^i F_\varepsilon$ und $D^i R_{\eta}^{F_\varepsilon}$ ($i = 0, 1, 2$) sind in $\bar{\omega}$ stetig. $R_{\eta}^{F_\varepsilon}$ hat daher die Randwerte η .

IV. GLEICHMÄSSIGE BESCHRÄNKTHEIT. Sei F_0 in ω regulär und von der Klasse C_ε^ω . Dann gibt es Konstanten N und N_τ derart, dass für alle in ω regulären F aus C_ε^ω die Ungleichungen

$$\begin{aligned} a) \quad & \|R_{\eta; \omega}^F\|_{\bar{\omega}}^\omega \geq N \|\eta\|^\sigma, \\ b) \quad & \|R_{\eta; \omega}^F\|_2^\omega \leq N \|\eta\|_2^\sigma, \\ c) \quad & \|R_{\eta; \omega}^F\|_2^\tau < N_\tau \|\eta\|^\sigma \quad (\bar{\tau} < \omega) \end{aligned}$$

gelten.

V. LIPSCHITZBEDINGUNG. F, F_0 seien in ω regulär und von der Klasse C_3^ω , η von der Klasse C_3^σ . Für jedes $\tau \subseteq \omega$ ($\tau \in \mathfrak{S}$) gibt es dann eine nur von F_0, ω und τ abhängende Grösse $K = K(F_0, \omega, \tau)$ derart, dass

$$\|R_{\eta; \tau}^F - R_{\eta; \tau}^{F_0}\|^\tau < K \cdot \|F - F_0\|_2^{Rd\omega} \|\eta\|_2^{Rd\tau}$$

gilt. Ist $\{\tau_\rho\}$ speziell eine Schar von konzentrischen Kugeln vom Radius ρ aus ω um einen Punkt x^0 , so kann $K(F_0, \omega, \tau) = K_1(F_0, \omega) \cdot \rho^2$ gesetzt werden.

2. Einige grundlegende Ungleichungen.

Für das Folgende ist es wichtig, aus dem Verhalten von $R_{f; \omega}$ auf dem Rande Rückschlüsse auf das Verhalten im Innern ziehen zu können.

Sei f eine Funktion der Klasse C_3^σ ($\sigma = Rd\omega, \omega \in \mathfrak{S}$) und so beschaffen, dass wenn F in ω regulär ist und zu C_3^ω gehört, auch noch $R_{F+\lambda f; \omega}(x)$ ($|\lambda| \leq 1$) existiert. Setzen wir

$$(1) \quad \|f\|_2^\sigma = m.$$

Die Funktion $F_\lambda(x) = R_{F+\lambda f; \omega}(x)$ ist bei festem $x \in \bar{\omega}$ im Intervall $0 \leq \lambda \leq 1$ differenzierbar. Anwendung des Mittel-

wertsatzes ergibt

$$(2) \quad R_{F+f; \omega}(x) - R_{F; \omega}(x) = R_{f; \omega}^{\tilde{\lambda}}(x) \quad x \in \bar{\omega},$$

wobei der Mittelwert $\tilde{\lambda}$ von x abhängen kann. Ähnlich ergibt sich, wenn man $\lambda = \varepsilon/m$ setzt, für die Ableitungen wegen III

$$(3) \quad D^i[R_{F+f; \omega}(x) - R_{F; \omega}(x)] = m D^i R_{f/m; \omega}^{\tilde{\lambda}}(x) \quad (x \in \bar{\omega}, i \leq 2).$$

Aus IV folgt nun, weil wegen (1) $\left\| \frac{f}{m} \right\|_2^\sigma = 1$ ist,

$$(4) \quad \| R_{f; \omega}^{\tilde{\lambda}} \|_{\bar{\omega}} < N \| f \|^\sigma, \quad \| R_{f/m; \omega}^{\tilde{\lambda}} \|_{\bar{\omega}} < N.$$

Aus (2) und (3) folgt somit unter Benutzung von (4)

$$(5) \quad \begin{aligned} \| R_{F+f; \omega} - R_{F; \omega} \|_{\bar{\omega}} &< N \| f \|^\sigma \\ \| R_{F+f; \omega} - R_{F; \omega} \|_2^{\bar{\omega}} &< N \| f \|_2^\sigma. \end{aligned}$$

Dies sind die beabsichtigten Abschätzungen, welche wir in der Folge als *Hauptungleichungen* bezeichnen wollen.

3. $R_{\eta; \omega}^F$ als Integral einer linearen elliptischen Differentialgleichung.

Der Operator $R_{\eta; \omega}^F$ ist bei festem F linear.

Sei etwa F in ω_0 regulär und $\bar{\omega} < \omega_0$, $\omega \in \mathfrak{S}$. Dann folgt

$$R_{a\eta; \omega}^F = a R_{\eta; \omega}^F$$

unmittelbar aus der Definition von $R_{\eta; \omega}^F$.

Ehwas umständlicher beweist sich die Additivität.

$$(6) \quad R_{\eta_1}^F + R_{\eta_2}^F = R_{\eta_1 + \eta_2}^F.$$

(R_{η}^F statt $R_{\eta; \omega}^F$ geschrieben; η_1, η_2 wie stets dreimal stetig differenzierbar). Es ist ($\varepsilon > 0$).

$$(7) \quad \frac{R_{F+\varepsilon(\eta_1+\eta_2)} - R_{F+\varepsilon\eta_1}}{\varepsilon} + \frac{R_{F+\varepsilon\eta_1} - R_F}{\varepsilon} = \frac{R_{F+\varepsilon(\eta_1+\eta_2)} - R_F}{\varepsilon}.$$

Wir wenden auf die Funktionen

$$\begin{aligned} R_{F+\varepsilon\eta_1+\tau\eta_2} - R_{F+\varepsilon\eta_1} &= \Phi_1(\tau, \varepsilon), \\ R_{F+\tau\eta_1} - R_F &= \Phi_2(\tau), \quad (0 \leq \tau \leq \varepsilon) \\ R_{F+\tau(\eta_1+\eta_2)} - R_F &= \Phi_3(\tau) \end{aligned}$$

den Mittelwertsatz an.

$$\Phi_1(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon \Phi_1'(\tau_1, \varepsilon), \quad \Phi_2(\varepsilon) = \varepsilon \Phi_2'(\tau_2), \quad \Phi_3(\varepsilon) = \varepsilon \Phi_3'(\tau_3),$$

wo τ_1, τ_2, τ_3 gewisse Mittelwerte sind, die natürlich auch von x abhängen können. Aus (7) folgt, wenn $R_{F+\varepsilon\eta_1+\tau_1\eta_2} = F_{\tau_1, \varepsilon}$, $R_{F+\tau_3\eta_1} = F_{\tau_3}$, $R_{F+\tau_3(\eta_1+\eta_2)} = F_{\tau_3}$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\varepsilon} [\Phi_1(\varepsilon, \varepsilon) + \Phi_2(\varepsilon) - \Phi_3(\varepsilon)] = \Phi_1'(\tau_1, \varepsilon) + \Phi_2'(\tau_2) - \Phi_3'(\tau_3) \\ &= R_{\eta_2}^{F_{\tau_1, \varepsilon}} + R_{\eta_1}^{F_{\tau_3}} - R_{\eta_1+\eta_2}^{F_{\tau_3}} \end{aligned}$$

Aus der Lipschitzbedingung folgt jetzt z. B. für $R_{\eta_1}^{F_{\tau_3}}$ wenn $\omega = \tau$ gesetzt wird

$$(8) \quad \| R_{\eta_1; \omega}^{F_{\tau_3}} - R_{\eta_1; \omega}^F \|^\omega < K \| F_{\tau_3} - F \|_2^\sigma \| \eta_1 \|_2^\sigma.$$

Die Randwerte $f(\xi)$ von $F_{\tau_3} - F$ für ein festes $x \in \omega$ sind gegeben durch die Funktion

$$f(\xi) = \tau_2(x) \eta_1(\xi) \quad (|\tau_2| \leq \varepsilon).$$

Dies in (8) eingesetzt, ergibt

$$\| R_{\eta_1; \omega}^{F_{\tau_3}} - R_{\eta_1; \omega}^F \|^\omega < \varepsilon \cdot \text{const.}$$

Die linke Seite von (8) strebt also gleichmässig gegen Null, und man erhält schliesslich

$$(9) \quad R_{\eta_1; \omega}^F + R_{\eta_2; \omega}^F = R_{\eta_1+\eta_2; \omega}^F.$$

Wir beweisen jetzt für den Linearoperator $R_{\eta; \omega}^F$ die folgende Funktionalgleichung⁷⁾:

⁷⁾ Auch für den Operator $R_{f; \omega}$ selbst gilt eine solche Funktionalgleichung. Denn nach Definition der Klasse $\{F\}$ ist F , falls in ω regulär, auch in τ regulär. Wegen $\tau \in \mathfrak{g}$ muss aus Gründen der Eindeutigkeit also $F = R_{F, \tau}$ sein.

Sei $\omega \in \mathfrak{S}$, $\tau \in \mathfrak{S}$ und $\tau \subset \omega$. F sei in ω regulär und von der Klasse C_3^ω . Nach II existiert $R_{\eta; \omega}^F(x) = v(x) (\eta \in C_3^\sigma)$. Dann gilt in τ

$$R_{v; \tau}^F(x) = v(x).$$

Schreiben wir kurz

$$(10) \quad R_{F+\varepsilon\eta; \omega} = F_\varepsilon,$$

dann ist

$$v = \left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_\varepsilon - F}{\varepsilon},$$

oder, wenn

$$(11) \quad \frac{F_\varepsilon - F}{\varepsilon} = \eta_\varepsilon(x) \quad (0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0)$$

gesetzt wird,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_\varepsilon(x) = v(x).$$

Dieser Limes existiert sogar gleichmässig.

Bei festem x ist nämlich nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{F_\varepsilon - F}{\varepsilon} = R_{\eta; \omega}^{F_\varepsilon} \quad (0 < |\tilde{\varepsilon}| < \varepsilon_0).$$

$\tilde{\varepsilon}$ kann natürlich von x abhängen. Anwendung von V ergibt nun

$$(12) \quad \left| \frac{F_\varepsilon - F}{\varepsilon} - v \right| = |R_{\eta; \omega}^{F_\varepsilon} - R_{\eta; \omega}^F|$$

$$< K \|F_\varepsilon - F\|_2^\sigma \|\eta\|_2^\sigma \leq K \varepsilon (\|\eta\|_2^\sigma)^2 \quad (\sigma = R d\omega).$$

Aus (12) folgt also, dass $\frac{F_\varepsilon - F}{\varepsilon}$ gleichmässig bezüglich x gegen v strebt. $\eta_\varepsilon(x)$ (vgl. (11)) ist somit gleichmässig stetig in x und ε , wie es in Postulat II verlangt wird. Nach diesem Postulat gilt also, da $R_{F+\varepsilon\eta; \tau} = F_\varepsilon$ ist,

$$R_{v; \tau}^F = \left[\frac{\partial R_{F+\varepsilon\eta; \tau}}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial R_{F+\varepsilon\eta; \tau}}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = v,$$

also die Behauptung. Damit sind für den Operator $R_{\eta; \omega}^F$ bei festem F alle Eigenschaften bewiesen, aus welchen man mittels der Postulate III und IV schliessen kann, dass er das allge-

meine Integral einer elliptischen homogenen Differentialgleichung

$$(13) \quad L(v) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + av = 0$$

darstellt, deren Koeffizienten durch

$$(14) \quad \begin{aligned} a(x^0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1 - R_{i; \tau_\rho}^F(x^0)}{\rho^2}, \quad a_i(x^0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} - \frac{R_{x_i - x_i^0; \tau_\rho}^F(x^0)}{\rho^2}, \\ a_{ik}(x^0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} - \frac{R_{(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0); \tau_\rho}^F(x^0)}{\rho^2} \end{aligned}$$

gegeben sind.

Wir wollen daraus noch eine wichtige Folgerung ziehen. Der Operator $R_{\eta; \omega}^F$ ist nur für die Funktionen der Klasse C_3^σ definiert. Wir wollen seine Definition für alle auf σ stetigen Funktionen η erweitern. Man approximiere η gleichmässig auf σ durch Funktionen $\eta^{(\nu)}$ der Klasse C_3^σ .

$$\eta^{(\nu)}(x) \Rightarrow \eta(x) \quad (x \in Rd\omega).$$

Wegen IVa) und der Additivität bilden $R_{\eta^{(\nu)}; \omega}^F$ eine Fundamentalfolge, die in $\bar{\omega}$ gleichmässig gegen eine stetige Funktion $H(x)$ strebt. Wegen IVc) konvergieren in jedem inneren Punkte auch die ersten und zweiten Ableitungen und zwar gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von ω . Also ist H in ω zweimal stetig differenzierbar und aus der Konvergenz folgt, dass $H(x)$ ebenso wie $R_{\eta^{(\nu)}; \omega}^F$ eine Lösung von

$$L(H) = 0$$

ist. Es gilt also

Das Dirichletsche Problem ist für $L(v) = 0$ bei allen Gebieten $\omega \in \mathfrak{S}$ für beliebige stetige Randfunktionen lösbar.

Daraus schliessen wir auf Grund von A, dass die Jacobische Gleichung $L(v) = 0$ streng elliptisch ist.

4. Zwei Hilfssätze.

Die Koeffizienten der Variationsgleichungen hängen ausser von x noch von F ab. Sie könnten an sich Funktionale von F sein. Wir beweisen jedoch den

HILFSSATZ 1. Die Koeffizienten a_{ik} , a_i , a hängen ausser von x nur ab von den Werten von F und seinen ersten und zweiten Ableitungen im Punkte x^0 , also von den Grössen

$$u = F(x^0), \quad u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0), \quad u_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(x^0);$$

sie sind stetige Funktionen dieser Grössen.

Betrachten wir beispielsweise den Koeffizienten

$$a_f(x^0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} - \frac{R_{x_j - x_j^0; \tau_\rho}^F(x^0)}{\rho^2}$$

Sei $\bar{F}$ eine weitere Funktion aus $\{F\}$ mit dem Definitionsgebiet $\omega (x^0 \in \omega)$. Sei weiter

$$\bar{u} = \bar{F}(x^0), \quad \bar{u}_i = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i}(x^0), \quad \bar{u}_{ik} = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x_i \partial x_k}(x^0),$$

und

$$(15) \quad \max(|u - \bar{u}|, |u_i - \bar{u}_i|, |u_{ik} - \bar{u}_{ik}|) < \mu.$$

Setzen wir

$$(16) \quad \bar{a}_f(x^0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} - \frac{R_{x_j - x_j^0; \tau_\rho}^{\bar{F}}(x^0)}{\rho^2}$$

und schätzen $|\bar{a}_f(x^0) - a_f(x^0)|$ ab. Nach V ist (falls ρ bereits < 1 ist)

$$(17) \quad |R_{x_j - x_j^0; \tau_\rho}^{\bar{F}}(x^0) - R_{x_j - x_j^0; \tau_\rho}^F(x)| < K \cdot \rho^2 \|\bar{F} - F\|_2^{Rd\omega} \cdot 1.$$

Nun nehmen wir ω so klein, dass zufolge der Stetigkeit der Funktionen F , $\bar{F}$ und deren Ableitungen in $\bar{\omega}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\max_{i=0,1,2} \{ \|D^i(\bar{F} - F)\|_{\bar{\omega}} \} < \mu + \varepsilon$$

gilt, dann folgt leicht aus (16) und (17)

$$(18) \quad |\bar{a}_f(x^0) - a_f(x_0)| \leq K \cdot (\mu + \varepsilon).$$

Daraus wiederum ergeben sich, je nachdem ob man μ gleich Null oder beliebig klein annimmt, die beiden Teile der Be-

hauptung. Aus (15) und (18) ergibt sich die Lipschitzstetigkeit von $a_j(x) = a_j(x, u, u_i, u_{ik})$ in u, u_i, u_{ik} . Diese ist wegen der Konstanz von K gleichmässig bezüglich x .

Für das Weitere ist folgende Numerierung bequem. Wir setzen

$$(19) \quad u = u_{00}, \quad u_i = u_{0i}; \quad a = a_{00}, \quad a_i = a_{0i} = a_{i0}.$$

Der Einheitlichkeit halber führen wir noch die formale Koordinate x_0 und einige Abkürzungen ein

$$(20) \quad x_0 - x_0^* = 1, \quad (x_k - x_k^*)(x_l - x_l^*) = \xi_{kl} \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Jetzt beweisen wir den für das Folgende fundamentalen

HILFSSATZ 2. *Es sei $\{F_v\}$ eine Folge in ω regulärer Funktionen, die auf $\bar{\omega}$ gleichmässig gegen F konvergieren, und deren Ableitungen bis einschliesslich zur dritten Ordnung auf $\bar{\omega}$ gleichmässig in x und v beschränkt und gleichgradig stetig sind. x^0 sei ein Punkt von ω und k_0, l_0 irgendwelche vorgegebene Indices ($0 \leq k_0, l_0 \leq n$). Sei*

$$u_{kl} = \left[\frac{\partial^{k+l} F}{\partial x_k \partial x_l} \right]_{x=x^0}, \quad u_{kl;v} = \left[\frac{\partial^{k+l} F_v}{\partial x_k \partial x_l} \right]_{x=x^0} \quad (k, l = 0, 1, \dots, n).$$

Es sei weiter

$$\begin{aligned} u_{k_0 l_0; v} &\neq u_{k_0 l_0}, \\ u_{kl; v} &= u_{kl} \quad ((k, l) \neq (k_0, l_0)). \end{aligned}$$

Dann ist der Koeffizient $a_{k_0 l_0}(x)$ des Variationsoperators im Punkte x^0 gleich Null.

Zum Beweise setzen wir

$$u_{k_0 l_0; v} - u_{k_0 l_0} = \varepsilon_v.$$

Offenbar gilt $\varepsilon_v \rightarrow 0$. F und F_v lassen sich dann schreiben

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{u_{00}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k, l=0}^n u_{kl} \xi_{kl} + U, \\ F_v(x) &= \frac{u_{00}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k, l=0}^n u_{kl} \xi_{kl} + \delta_{k_0 l_0} \varepsilon_v \xi_{k_0 l_0} + U_v, \end{aligned} \quad (21)$$

wo $\delta_{k_0 l_0} = 2$, falls $k_0 = l_0 = 0$ ist, und sonst $\delta_{k_0 l_0} = 1$. Die

Restglieder U und U_ν haben die Form

$$\frac{1}{3!} \sum_{\lambda, \sigma, \tau} \xi_{\lambda\sigma\tau} \tilde{G}_{\lambda\sigma\tau} \quad (\lambda, \sigma, \tau = 1, 2, \dots, n)$$

$$\xi_{\lambda\sigma\tau} = (x_\lambda - x_\lambda^0)(x_\sigma - x_\sigma^0)(x_\tau - x_\tau^0),$$

wo $\tilde{G}_{\lambda\sigma\tau}$ gewisse Mittelwerte der dritten Ableitungen von F bzw. F_ν sind. Diese sind auf Grund der Voraussetzungen gleichmässig beschränkt. Entwickelt man die Differenz $F_\nu(x) - F(x)$ nach Taylor, so erhält man, wenn noch zur Abkürzung $\delta_{k_0 l_0} \xi_{k_0 l_0} = \xi$ gesetzt wird,

$$F_\nu(x) - F(x) = \xi \varepsilon_\nu + W_\nu,$$

wo ebenfalls W_ν die Form

$$\frac{1}{3!} \sum_{\lambda, \sigma, \tau} \tilde{H}_{\lambda\sigma\tau}$$

besitzt und $\tilde{H}_{\lambda\sigma\tau}$ Mittelwert einer dritten Ableitung von $F_\nu - F$, also Differenz dritter Ableitungen $\tilde{G}_{\lambda\sigma\tau; \nu}$ bzw. $\tilde{G}_{\lambda\sigma\tau}$ von F_ν bzw. F ist, aber nunmehr für denselben Mittelwert. Setzen wir

$$\frac{1}{3!} \sum_{\lambda, \sigma, \tau} \xi_{\lambda\sigma\tau} \tilde{G}_{\lambda\sigma\tau; \nu} = V_\nu, \quad \frac{1}{3!} \sum_{\lambda, \sigma, \tau} \xi_{\lambda\sigma\tau} \tilde{G}_{\lambda\sigma\tau} = V,$$

so können zwar im allgemeinen U und U_ν in (21) nicht durch V und V_ν ersetzt werden, wohl aber ist

$$U_\nu - U = V_\nu - V$$

und in V_ν und V stehen in den Argumenten der dritten Ableitungen dieselben Mittelwerte. Wegen der vorausgesetzten Beschränktheit der ersten bis dritten Ableitungen kann man eine Teilfolge herausgreifen, für welche auch die ersten Ableitungen gleichmässig konvergieren, und schliesslich erhält man bei Berücksichtigung der gleichgradigen Stetigkeit durch eventuelle Wiederholung der Auswahl eine Teilfolge $\{\nu_i\}$, für welche auch die dritten Ableitungen bei festem ρ in τ_ρ gleichmässig konvergieren. Da die Ableitungen gegen die Ableitungen der Grenzfunktion konvergieren, so

konvergieren ihre Differenzen gegen Null. Es ist also in τ_ρ für beliebig kleines positives ε^* und passendes ν_0 (wir schreiben statt $\{\nu_i\}$ wieder $\{\nu\}$)

$$(22) \quad |D_{\lambda\sigma\tau}(F_\nu - F)| \leq \varepsilon^* \\ |W_\nu| = |U_\nu - U| = |V_\nu - V| \leq \varepsilon^* \rho^3 n^3 \quad (\nu \geq \nu_0).$$

Ist $(k_0, l_0) \neq (0, 0)$, so gilt

$$(23) \quad a_{k_0 l_0}(x^0) = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{R_{\xi_{k_0 l_0}; \tau_\rho}^F}{\rho^2}.$$

Da ε_ν und ρ gegen Null gehen, können wir

$$\rho = \rho_\nu = \varepsilon_\nu$$

setzen. Schreiben wir zur Abkürzung $\tau_{\rho_\nu} = \tau_\nu$, $Rd\tau_\nu = \sigma_\nu$, und setzen wir

$$(24) \quad \frac{U_\nu - U}{\varepsilon_\nu} = \eta_\nu(x) \quad (x \in \sigma_\nu),$$

dann ist

$$F_\nu - F = \varepsilon_\nu(\xi + \eta_\nu) \quad (x \in \sigma_\nu).$$

Setzen wir noch für ein beliebiges ν mit variablem $\varepsilon(0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_\nu|)$

$$F_\varepsilon = F + \varepsilon(\xi + \eta_\nu) \quad (x \in \sigma_\nu),$$

so ist nach dem Mittelwertsatz

$$F_\nu(x) - F(x) = \varepsilon_\nu R_{\xi + \eta_\nu; \tau_\nu}^{\tilde{F}_\varepsilon}(x) \quad (x \in \tau_\nu)$$

($\tilde{F}_\varepsilon$ natürlich im allgemeinen von x abhängig). (22) und (24) ergeben für $\rho = \varepsilon_\nu$

$$|\eta_\nu(x)| \leq \varepsilon^* n^3 \varepsilon_\nu^2 \quad (\nu \geq \nu_0; x \in \sigma_\nu)$$

also

$$(25) \quad \eta_\nu(x) = o(\varepsilon_\nu^2).$$

Wegen $(k_0, l_0) \neq (0, 0)$

$$F_\nu(x^0) - F(x^0) = 0$$

$$a_{k_0 l_0}(x^0) = a_{k_0 l_0}(x^0) + \frac{F_\nu(x^0) - F(x^0)}{\varepsilon_\nu^3} = a_{k_0 l_0}(x^0) + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} R_{\xi + \eta_\nu; \tau_\nu}^{\tilde{F}_\varepsilon}(x^0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} [-R_{\xi; \tau_\nu}^F(x^0) + R_{\xi+\eta_\nu; \tau_\nu}^{\tilde{F}}(x^0)] \\
 (26) \quad &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} [-R_{\xi; \tau_\nu}^F(x^0) + R_{\xi+\eta_\nu; \tau_\nu}^F(x^0)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} [-R_{\xi+\eta_\nu; \tau_\nu}^F(x^0) + R_{\xi+\eta_\nu; \tau_\nu}^{\tilde{F}}(x^0)] \right\} \\
 &= \lim \{ A_\nu + B_\nu \}.
 \end{aligned}$$

Aus (25) folgt nach Postulat IV

$$A_\nu = \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} R_{\eta_\nu; \tau_\nu}^F(x^0) = \frac{o(\eta_\nu)}{\varepsilon_\nu^2} = o(1).$$

Es gilt also

$$(27) \quad A_\nu \rightarrow 0.$$

Postulat V ergibt für B_ν

$$\begin{aligned}
 (28) \quad |B_\nu| &= \left| \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} [R_{\xi+\eta_\nu; \tau_\nu}^{\tilde{F}}(x^0) - R_{\xi+\eta_\nu; \tau_\nu}^F(x^0)] \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} K_1 \varepsilon_\nu^2 \| \tilde{F}_\xi - F \|_2^{\sigma_\nu} \cdot \| \xi + \eta_\nu \|_2^{\sigma_\nu} \quad ^8).
 \end{aligned}$$

Nun ist auf σ_ν

$$\tilde{F}_\xi - \tilde{F} = \varepsilon(\xi + \eta_\nu)$$

ξ und seine Ableitungen sind beschränkt.

Also bleibt noch die Abschätzung von $|D_i \eta_\nu|$ und $|D_{ik} \eta_\nu|$.

Gemäss (24) ist $\eta_\nu = \frac{U_\nu - U}{\varepsilon_\nu}$, wo U_ν und U die Restglieder dritter Ordnung in der Taylorentwicklung im Punkte x^0 von F_ν bzw. F sind. Die Taylorentwicklung von $D_i F$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ist

$$D_i F = u_i + \sum_{j=1}^n u_{ij} \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n \xi_r \xi_s \overline{D_{rsi} F}.$$

⁸⁾ Auf der linken Seite von (28) tritt $\tilde{\varepsilon}(x^0)$ auf. Dieses feste $\tilde{\varepsilon}(x^0)$ und nicht etwa $\tilde{\varepsilon}(x)$ benutzen wir auch auf der rechten Seite bei Anwendung von Postulat V. Wir schreiben kurz ε .

Also

$$(29) \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{r,s=1}^n \xi_{rs} \widehat{D_{rsi} F} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U_v}{\partial x_i} = \sum_{r,s=1}^n \xi_{rs} \widetilde{\widehat{D_{rsi} F_v}}.$$

wo durch $\widehat{}$ bzw. $\widetilde{}$ Mittelwerte gekennzeichnet seien. Ähnlich erhält man durch Taylorentwicklung von $D_{ik} F$

$$(30) \quad \begin{aligned} D_{ik} F &= u_{ik} + \sum_{j=1}^n \xi_j \widehat{D_{jik} F} = u_{ik} + D_{ik} U \\ D_{ik} U &= \sum_{j=1}^n \xi_j \widehat{D_{jik} F}, \\ D_{ik} U_v &= \sum_{j=1}^n \xi_j \widetilde{\widehat{D_{jik} F_v}}. \end{aligned}$$

Da die Ableitungen von F und der F_v auf ω gleichmässig beschränkt sind, so folgt aus (29) und (30) sofort die Abschätzung

$$\begin{aligned} |D_i U| &> \rho_v^2 M = \epsilon_v^2 M, \\ |D_{ik} U| &< \rho_v M = \epsilon_v M, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} |D_i U|, \quad |D_{ik} U| &= O(\epsilon_v), \\ |\eta_v| &= \left| \frac{U_v - U}{\epsilon_v} \right| = O(1) \end{aligned}$$

(gleichmässig bezüglich x in ω).

Also nach (28)

$$(31) \quad \begin{aligned} |B_v| &\leq K_1 \|F_{\tilde{\epsilon}} - F\|_2^2 \cdot \|\xi + \eta_v\|_2^2 \\ &= K_1 |\tilde{\epsilon}| [\|\xi + \eta_v\|_2^2] = K_1 \cdot O(1) \cdot \tilde{\epsilon}. \end{aligned}$$

(26), (27) und (31) liefern schliesslich

$$a_{k_0 l_0} = 0.$$

Für $(k_0, l_0) = (0, 0)$ erhält man das Gleiche, nur hat man

$$a = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1 - R_{i; \tau \rho}^F}{\rho^2} \quad \text{und} \quad F_v(x^0) - F(x^0) = \epsilon_v$$

zu berücksichtigen. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

5. Aufstellung der Differentialgleichung.

Aus dem Hilfssatz 2 ziehen wir eine wichtige Schlussfolgerung. Die Koeffizienten $a_{ik}(x, F(x), F_i(x), F_{ik}(x))$ können nicht sämtlich in einem Gebiet verschwinden, da sonst die Variationsgleichung daselbst von erster Ordnung wäre. Sei also x^0 ein Punkt, in welchem etwa

$$(32) \quad a_{11}(x^0, u^0, u_i^0, u_{ik}^0) \neq 0$$

ist. Dies gilt wegen der Stetigkeit bei festem x auch noch in einer Umgegend von (u^0, u_i^0, u_{ik}^0) . Es ist bequem u, u_i, u_{ik} , als Koordinaten eines Punktes W anzusehen. Da nachher u_{11} als abhängige Veränderliche auftreten wird, wollen wir für das verkürzte System $u, u_i, u_{12}, \dots, u_{nn}$, in welchem u_{11} fehlt, noch die besondere Bezeichnung U einführen.

Beschränken wir uns des Weiteren auf solche Funktionen, die in einem festen Gebiet ω , das x^0 enthält, regulär und mit ihren ersten bis dritten Ableitungen in $\bar{\omega}$ gleichgradig stetig und gleichmässig beschränkt sind. Wir nennen sie «zulässige Funktionen». Sei $F_0(x)$ eine solche Funktion und $W_0(x^0)$ bzw. $U_0(x^0)$ oder kurz W_0, U_0 das System ihrer Taylorkoeffizienten in x^0 . Dann können wir aus Hilfssatz 2 schliessen, dass eine positive Zahl ε existiert, derart, dass für jedes zulässige F aus $U = U_0$ und

$$|u_{11} - u_{11}^0| < \varepsilon$$

folgt, dass sogar $u_{11} = u_{11}^0$

sein muss. Die Koordinaten von $U(x^0) = U$ sind Taylorkoeffizienten von F in x^0 . Die obere Grenze aller solchen Zahlen ε (die natürlich auch unendlich sein kann) nennen wir kritische Zahl für F_0 in x^0 , und bezeichnen sie mit $\varepsilon_{F_0}(x^0)$, allgemein $\varepsilon_F(x)$. Man kann leicht einsehen, dass $\varepsilon_F(x)$ in einer gewissen Umgebung von x^0 bei festem F über einer positiven Schranke bleibt.

Andernfalls gibt es nämlich eine Folge von zulässigen Funktionen $F_\nu(x)$ und eine gegen x^0 konvergente Folge $\{x_\nu\}$, für welche $u_{11}(x_\nu) \neq u_{11}^0(x_\nu)$, $|u_{11}(x_\nu) - u_{11}^0(x_\nu)| \rightarrow 0$ gälte. Man kann annehmen (nach eventueller Auswahl), dass $F_\nu(x)$ mit

seinen ersten und zweiten Ableitungen in $\bar{\omega}$ gegen $F_0(x)$ konvergiert. Nun müsste bei direkter Anwendung von Hilfssatz 2 x^ν eigentlich fest, nämlich x^0 sein. In den entscheidenden Abschätzungen (26), (27), (28) ändert sich aber nichts, wenn x^0 durch x^ν ersetzt wird. Es kommt statt $a_{k_0 k_0}(x^0, U_0) = 0$ zunächst $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{k_0 k_0}(x^\nu, U_0(x^\nu)) = 0$ heraus, d.h. wegen der Stetigkeit ebenfalls $a_{k_0 k_0}(x^0, U_0) = 0$.

Um eine Differentialgleichung aufzustellen, benutzen wir eine gut übersehbare Teilschar aller regulären Funktionen, nämlich die Kugelflächenfunktionen nullter bis zweiter Ordnung $S_1, \dots, S_m$ ($m = \binom{n+2}{2} - 1$) als Randfunktionen, d. h. etwas genauer, unter Auslassung des Index 1 die Funktionen

$$1, \xi_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n), \frac{1}{2}(\xi_\mu^2 - \xi_\nu^2) (\mu = 2, \dots, n),$$

$$\xi_\mu \xi_\nu (\mu \neq \nu, \xi_\nu = (x_\nu - x_\nu^0)),$$

betrachtet auf der Oberfläche einer Kugel τ um x^0 von genügend kleinem Radius ρ , welche wir jetzt als Gebiet ω benutzen. Setzen wir mit irgend welchen hinreichend kleinen Parametern t

$$(33) \quad f = \sum_{\nu=1}^m t_\nu S_\nu, \\ F(x) = R_{F_0+f; \tau}(x).$$

Nun wird gleich gezeigt, dass bei hinreichend kleinem ρ zu jedem Parametersystem $(t_1, \dots, t_m)$ genau ein Punkt $U(x^0)$ aus einer gewissen Umgebung von U_0 gehört und umgekehrt. Mittels (33) wird zu jedem Punkt U dieser Umgebung genau ein Koeffizient $u_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^0)$ bestimmt. D. h.

$$(34) \quad u_{11} = \Psi(x, u, u_i, u_{12}, \dots, u_{nn}) = \Psi(x, U).$$

Aus unserer Bemerkung über $\epsilon_F(x)$ kann man nun schließen, dass die Funktion $\Psi(x, U)$ bei (x^0, U^0) und in einer gewissen Umgebung unverzweigt ist.

Gäbe es nämlich für eine Folge $x^\nu \rightarrow x^0$ ausser dem Funktionswert $\Psi(x^\nu, U_0(x^\nu)) = u_n$ noch einen zweiten u_{11}^ν , der für

eine passende zulässige Funktion F_v zu dem gleichen Argument $(x^v, U_0(x^v))$ gehörte, und würde $u_{11}^v(x^v)$ für $x^v \rightarrow x^0$ gegen u_{11}^0 streben, so wäre entgegen dem Bewiesenen

$$\lim \epsilon_F(x^v) = 0.$$

Inwieweit alle regulären Funktionen der Differentialgleichung

$$\Phi(x, W) \equiv u_{11} - \Psi(x, U) = 0$$

genügen, wird im nächsten Paragraphen erörtert.

Jetzt soll der vorweggenommene Satz über den Zusammenhang der Parameter $(t_1, \dots, t_m)$ mit dem Punkt $U(x^0)$ bewiesen werden. Wir setzen (unter Auslassung von u_{11})

$$(35) \quad u = F(x^0) = \varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, u_{nn} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} = \varphi_m(t_1, \dots, t_m).$$

Offenbar existiert für jedes Wertsystem $(t_1^0, \dots, t_m^0)$ aus einer Umgebung von $(0, \dots, 0)$

$$\left[\frac{\partial R_{F_0 + \sum t_\mu S_\mu}}{\partial t_v} \right]_{t_\mu = t_\mu^0} = R_{S_v}^{F_0},$$

wo $F^0 = R_{F_0 + \sum t_v^0 S_v}$. Speziell ist $\left[\frac{\partial R_{F_0 + t_v S_v}}{\partial t_v} \right]_{t_v=0} = R_{S_v}^{F_0}$. Nun wurde in A gezeigt, dass für hinreichend kleines τ die Matrix

$$\left(R_{S_v}^{F_0}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} R_{S_v}^{F_0} \right)$$

den Rang m hat. Und zwar ist jede Determinante ungleich Null, die durch Streichung einer Spalte mit einem Differentiationsindex entsteht, für welchen der entsprechende Koeffizient der Differentialgleichung ungleich Null ist. In unserem Falle ist also wegen $a_{11} \neq 0$ bei der obigen Wahl der S_v die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(t_1, \dots, t_m)}$$

ungleich Null. Die Gleichungen (35) sind also in einer hinreichend kleinen Umgebung von $t_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, m$) eindeutig nach den t_ν auflösbar. Nun sind die φ_i stetige Funktionen der t_ν , wie aus den Hauptungleichungen leicht folgt. Damit ergibt sich aber aus Postulat V (Lipschitzbedingung) die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_\nu}$ ⁹⁾. Daraus wiederum folgt die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen des invertierten Systems

$$(36) \quad t_\nu = \Phi_\nu^{-1}(U).$$

Betrachten wir jetzt die Funktion $u_{11} = \Psi(x^0, U)$. Wir können den Punkt U vermöge (35) durch die Parameter $t_1, \dots, t_m$ darstellen. Wegen (36) ist der Punkt U in einer hinreichend kleinen Umgebung von U^0 beliebig wählbar. $\Psi(x^0, U)$ ist also in einer Vollumgebung von U^0 definiert.

Aber mehr: $u_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(F = R_{F_0 + \epsilon \eta; \tau})$ ist nach den t_ν differenzierbar. Dies folgt aus dem Differenzierbarkeitspostulat III, insbesondere aus der Vertauschbarkeit der Differentiation nach x und ϵ (jetzt t_ν). Aus der Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_\nu}$ bei festem x folgt die Existenz des totalen Differentials von $u_{11} = \Psi$ nach den t_ν . Da weiterhin die t_ν stetig nach den Koordinaten von U differenzierbar sind, so ergibt sich schliesslich, dass $u_{11} = \Psi(x^0, u, u_i, u_{12}, \dots, u_{nn})$ nach den freien Variablen der rechten Seite stetig differenzierbar ist.

Nun betrachten wir die durch

$$F_\epsilon = R_{F_0 + \epsilon \eta; \tau}$$

definierte Schar von regulären Funktionen. η sei dreimal stetig differenzierbar auf $Rd\tau$. Dann ist

$$\Phi\left(x^0, F_0, \frac{\partial F_0}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_k \partial x_l}\right)$$

⁹⁾ Für $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_\nu}$ folgt es direkt aus V. Für die Ableitungen folgt es aus Funktionaleigenschaften der Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen. Genauereres hierzu in der am Schluss der Arbeit erwähnten Ergänzung.

eine Funktion $H(\varepsilon)$, die etwa für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ identisch verschwindet. Da, wie eben bewiesen $H(\varepsilon)$, stetig differenzierbar ist, so folgt

$$(37) \quad (H'(\varepsilon))_{\varepsilon=0} = (\Phi_n)_{\varepsilon=0} \cdot v + \sum_i (\Phi_{u_i})_{\varepsilon=0} \cdot v_i + \sum_{i,k} (\Phi_{u_{ik}})_{\varepsilon=0} \cdot v_{ik} = 0,$$

wo

$$R_{\eta;\tau}^{F_0} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = v_i, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} = v_{ik}$$

gesetzt wurde. Anderseits gilt

$$a(x^0) + \sum_i a_i(x^0)v_i + \sum_{i,k} a_{ik}(x^0)v_{ik} = 0^{10}.$$

Setzen wir der Reihe nach $\eta = S_v$ ($v = 1, 2, \dots, m$), so folgt aus dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(t_1, \dots, t_m)}$$

die eindeutige Bestimmtheit der Grössen

$$\frac{a}{a_{11}}, \quad \frac{a_i}{a_{11}}, \quad \frac{a_{ik}}{a_{11}},$$

die also mit

$$(\Phi_u)_{\varepsilon=0}, \quad (\Phi_{u_i})_{\varepsilon=0}, \quad (\Phi_{u_{ik}})_{\varepsilon=0}$$

übereinstimmen müssen. Damit ist gleichzeitig bewiesen, dass die Differentialgleichung

$$\Phi(x, u_i, u_{ik}) = 0$$

elliptisch ist.

6. Schlussbemerkungen.

Das Vorangegangene bedarf noch einer Ergänzung. In Hilfssatz 2 wurde nur bewiesen, dass es innerhalb einer gewissen Klasse von regulären Funktionen nicht geschehen kann, dass neben einer Funktion F_0 weitere Funktionen F der

¹⁰⁾ die Abhängigkeit der a, a_i, a_{ik} von U^0 ist nicht zum Ausdruck gebracht.

Klasse mit gleichem U in x^0 existieren, für welche zwar $u_{11} - u^0_{11} \neq 0$ ist, sonst aber beliebig klein sein darf. Gibt es mindestens eine zweite Funktion mit gleichem U , aber verschiedenem u_{11} , so sei ε_{F_0} die untere Grenze aller Zahlen $|u_{11} - u^0_{11}|$ ¹¹⁾. Gibt es keine solche Funktion, so werde $\varepsilon_{F_0} = \infty$ gesetzt. Nun ist an sich folgendes Vorkommnis denkbar, das durch die Aussage des zweiten Hilfssatzes nicht ausgeschlossen wird. Es könnte nämlich eine Folge F_v geben, für welche ε_{F_v} gegen Null strebt. Man könnte also keine feste Umgebung

$$|U - U_0| < C$$

$$(|U| = |u| + \sum_i |u_i| + \sum_{\substack{l, k \\ (l, k) \neq (1, 1)}} |u_{lk}|)$$

angeben, derart dass alle zulässigen regulären Funktionen der Differentialgleichung $u_{11} - \Psi(x, U) = 0$ genügen. Ohne auf eine genauere Beweisführung an dieser Stelle einzugehen, sei hier nur bemerkt, dass alle diese Schwierigkeiten behoben werden können. Zunächst reichen die beim Beweise des zweiten Hilfssatzes benutzten Methoden völlig aus um zu zeigen, dass es keine Folge mit $\varepsilon_{F_v} \rightarrow 0$ gibt. damit lässt sich dann schliesslich unter Benutzung des Monodromiesatzes bei der Funktion $\Psi(x, U)$ ¹²⁾ das folgende Resultat herleiten:

Sei $a_{11}(x^0, W_0) \neq 0$ (a_{11} wie in (14) definiert) und F_0 in der Umgebung von x^0 regulär. Sind dann die Konstanten $A < M_{F_0}$ und δ so gewählt, dass für $|x - x^0| < \delta$ und $|W - W_0| < A$

$$|a_{11}(x, W)| \geq \frac{1}{2} |a_{11}(x^0, W_0)| > 0,$$

so genügen alle in x^0 regulären Funktionen mit gleichgradig

¹¹⁾ Diese ist natürlich mit der im vorigen Paragraph definierten und gleichbedeutenden identisch, nur formal etwas anders erklärt.

¹²⁾ Deren Unverzweigtheit im Kleinen wurde im vorigen Paragraph bewiesen.

stetigen dritten Ableitungen, welche der Abschätzung

$$\|F - F_0\|_{\bar{\omega}}^3 < A$$

(ω ein Regularitätsgebiet¹³⁾ von F)

genügen, der elliptischen Differentialgleichung

$$u_{11} - \Psi(x, U) = 0.$$

Die Durchführung dieses Beweises wird ebenso wie die Verifizierung der Postulate bei Differentialgleichungen Gegenstand einer ergänzenden Note seine, die vermutlich in den *Annali di Pisa* erscheinen wird.

¹³⁾ Die Regularitätsgebiete dürfen beliebig klein sein.