Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Aldo Bressan

Sull' impossibilità dinamica di un certo tipo di precessioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 396-399

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__396_0>

SULL'IMPOSSIBILITÀ DINAMICA DI UN CERTO TIPO DI PRECESSIONI

Nota (*) *di* Aldo Bressan (*a Padova*).

G. Grioli ha recentemente segnalato [1]) per il solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un punto O opportunamente scelto, l'esistenza di una classe di moti di precessione consistenti nella composizione di un moto di Mlodzjejowshy con uno di rotazione propria attorno alla retta OG.

Tali moti sono stati caratterizzati come quelli che esauriscono la classe dei movimenti per i quali il momento delle quantità di moto rispetto ad O ha direzione invariabile.

Postomi il quesito se esistono altre precessioni del tipo di cui sopra, non soddisfacenti all'accennata proprietà del momento delle quantità di moto, in questa nota dò risposta negativa nell'ipotesi che O stia su un asse centrale. Dimostrerò precisamente che non sono dinamicamente possibili moti di precessione con asse di precessione orizzontale, asse di figura parallelo ad un asse centrale d'inerzia e nutazione eguale a $\frac{\pi}{2}$.

Considero dunque un solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un punto O. Sia $T \equiv (O, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \equiv (O, x, y, z)$ una terna fissa con c_2 verticale discendente, $\mathcal{T} \equiv (O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3) \equiv (O, \xi, \eta, \zeta)$ la terna principale d'inerzia

---

(*) Pervenuta in Redazione il 6 giugno 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) G. Grioli, *Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, A. XXII, n. 2.

relativa ad O ove ζ sia asse centrale d'inerzia orientato da O verso G.

Risulta, pertanto

$$A' = B' = C' = 0 . \tag{1}$$

Sia

$$OG = l\,\boldsymbol{i}_3 \qquad \text{con} \qquad l > 0$$

Cercherò le precessioni aventi come asse di precessione l'asse orizzontale z, come asse di figura ζ e come nutazione

$$\theta = \widehat{\boldsymbol{c}_3 \boldsymbol{i}_3} = \frac{\pi}{2} . \tag{2}$$

Escluso il caso del giroscopio, si può supporre

$$A > B \tag{3}$$

e porre

$$\alpha = mgl \quad , \quad \rho = \frac{C}{A - B} > 1. \tag{4}$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\left\{ \begin{aligned} & (\cos 2\varphi + \rho)\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\ddot{\psi} = 0, \\ & \rho\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\dot{\psi}^2 = 0, \\ & (A - B)\sin 2\varphi\dot{\varphi}\dot{\psi} + (A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\ddot{\psi} - \alpha\sin\psi = 0. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Da (5,1) si deduce facilmente

$$\dot{\psi} = \lambda \frac{\mathrm{ctg}^{\rho}\,\varphi}{\sin 2\varphi} \equiv \psi_1(\varphi, \lambda), \tag{6}$$

con λ costante abitraria.

Tenendo conto di (6), la (5,2) dà

$$\dot{\varphi}^2 = \mu - \frac{\lambda^2}{4\rho^2}\,\mathrm{ctg}^{2\rho}\,\varphi, \tag{7}$$

con μ altra costante arbitraria.

Si ha dunque

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4\rho^2} \operatorname{ctg}^{2\rho} \varphi} \equiv \varphi_1(\varphi, \lambda, \mu). \tag{8}$$

Eliminando $\ddot{\psi}$ fra le (5,1) e (5,3) si ha, per (6) e (8)

$$\begin{gathered} 2 \{ (\cos 2\varphi + \rho)(A \operatorname{sen}^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) - \\ - (A - B) \operatorname{sen}^2 2\varphi \} \varphi_1 \psi_1 + \alpha \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} 2\varphi \equiv 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Gli integrali del momento verticale delle quantità di moto e dell'energia si esplicitano in

$$\frac{A - B}{2} (\operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} \psi)\dot{\psi} - C \cos \psi \dot{\varphi} = k_\mu, \tag{10}$$

$$\cos \psi = \frac{1}{2\alpha} [2E - (A \operatorname{sen}^2 \varphi + B \cos^2 \varphi)\dot{\psi}^2 - C\dot{\varphi}^2]. \tag{11}$$

Sostituendo in (10) l'espressione di $\operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} \psi$ data dalla (9), per (11) e (4,2) si ha

$$\begin{gathered} \varphi_1(\varphi, \lambda, \mu) \{ \psi_1^2(\varphi, \lambda)[(A \operatorname{sen}^2 \varphi + B \cos^2 \varphi)\left(\cos 2\varphi + \frac{\rho}{2}\right) - \\ - \frac{C}{\rho} \operatorname{sen}^2 2\varphi] - \frac{C\rho}{2} \varphi_1^2(\varphi, \lambda, \mu) + \rho E \} = - \frac{\alpha K_\nu}{A - B} \end{gathered} \tag{12}$$

che per (6) e (7) diviene

$$\begin{gathered} \pm \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4\rho^2}} \operatorname{cotg}^{2\rho} \varphi \{ \lambda^2 \operatorname{cotg}^{2\rho} \varphi \left[\left(\cos 2\varphi + \frac{\rho}{2}\right)(A \operatorname{sen}^2 \varphi + \right. \\ \left. B \cos^2 \varphi) - \frac{C}{\rho} \operatorname{sen}^2 2\varphi \left(-1 + \frac{1}{8}\right)\right] - \frac{\rho}{2}(C\mu - 2E) \operatorname{sen}^2 2\varphi \} = \\ = - \frac{\alpha K_\nu}{A - B} \operatorname{sen}^2 2\varphi. \end{gathered} \tag{13}$$

Per ogni eventuale possibile moto di precessione φ e ψ debbono *essere entrambi* $\neq 0$. Ne segue, per (6)

$$\lambda \neq 0. \tag{14}$$

Basta tale condizione per riconoscere l'impossibilità che la (13) sia identicamente verificata rispetto a φ come invece dovrebbe essere, essendo $\dot{\varphi} \neq 0$. Infatti ciò richiede, fra l'altro, l'annullarsi identico dell'espressione in parentesi quadra nella (13), e, in particolare

$$\rho = -2$$

in contrasto con la (4,2).

Si conclude l'impossibilità dinamica delle supposte precessioni.