RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sopra il fenomeno dell' azione asincrona

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 353-395

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__353_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOPRA IL FENOMENO DELL'AZIONE ASINCRONA

Memoria (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Padova*)

È ormai da alcuni anni oggetto di studio una classe di fenomeni che risulta quasi inesplicabile ai lumi della ordinaria meccanica delle vibrazioni. Questa classe di fenomeni va spesso sotto il nome di *azione asincrona*. Gli esempi più noti e concreti sono il pendolo di Soulier-Bethenod ed il diapason di Hartley [1]). Volendo subito mettere in evidenza l'aspetto più interessante dal punto di vista più propriamente meccanico, del fenomeno, diremo che in entrambi i casi si sostiene un movimento oscillatorio di un sistema meccanico sulla propria frequenza, semplicemente alimentando un conveniente circuito oscillante, accoppiato col sistema in modo opportuno, con una forza elettromotrice alternata, la cui frequenza può essere qualunque purchè sia più elevata della frequenza propria del sistema meccanico alimentato.

Essendo stato esplicitamente riconosciuto anche nel campo puramente sperimentale che non si può certamente parlare di sincronizzazione sotto-armonica, la spiegazione del fenomeno va ricercata in una condizione che si rivela essenziale e cioè che del sistema faccia parte quelche elemento non-lineare.

Dal punto di vista analitico la questione si presenta di una notevole complessità oltre che nei riguardi più propriamente algoritmici anche e fondamentalmente in una questione di principio.

(*) Pervenuta in Redazione il 28 Aprile 1955.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1) J. BETHENOD, C. R. Ac. Sc., t. 207, nov. 1938, p. 847.
HARTLEY, Bell system Tecnical Journal, juil 1936, p. 424.

Infatti una volta tradotto il problema fisico in forma analitica, con sufficiente generalità, ci si trova di fronte al fatto formalmente riconoscibile che il sistema differenziale non può ammettere soluzioni periodiche di periodo che non sia multiplo di quello della forza impressa, periodo che nei sistemi considerati coincide con il periodo della forza elettromotrice che alimenta il sistema.

Di fronte a questo fatto si pone la seguente alternativa: o non è sufficiente la schematizzazione e quindi non è esatta la traduzione analitica del problema fisico oppure i moti di regime del sistema meccanico non sono periodici nel senso precisamente analitico.

Poichè è da escludere la prima eventualità e non volendo ammettere che la sorgente alimentatrice sia a sua volta influenzata per reazione dal sistema oscillante non resta appunto che pensare che anzichè di soluzioni periodiche si tratti di soluzioni quasi periodiche di un qualche tipo.

Questo del resto è il caso che più frequentemente si realizza nei sistemi che come quelli in esame sono in due gradi di libertà. Usando in linguaggio geometrico ormai in uso diremo che le soluzioni di regime di un sistema oscillante in due gradi di libertà si rappresentano più normalmente nello spazio delle fasi anzichè come cicli semplici chiusi, come traiettorie dello stesso tipo di quelle che nell'ordinario spazio rappresentano le soluzioni di una equazione differenziale sulla superficie di un toro, ivi priva di punti singolari [2]), e che possono quindi non essere chiuse.

In una recente pubblicazione [3]) il prof. N. Minorsky spiega il fenomeno di Bethenod come un caso di *azione parametrica* e mediante il metodo stroboscopico, aiutato dall'intuizione fisica, perviene a determinare una soluzione periodica di prima approssimazione. Ovviamente ad essa non può corrispondere

---

[2]) A. DENJOY, *Sur le courbes definies par les equation differentielle à la surface du tore*, Journal d. Math., vol. II, (1932), p. 333.

[3]) N. MINORSKY, *Sur le phenomene Béthenod*, Actes du Colloque international des vibrations non-linéaires, Ile de Porquerolles 1951, (Publ. Scient. et Techn. du Min. de l'Air, N. 281).

una effettiva soluzione periodica del sistema ma una soluzione che differisce da una soluzione periodica per termini piccoli rispetto al termine periodico, ma che pur tuttavia fanno perdere il carattere di periodicità alla soluzione stessa.

Del resto dal punto di vista sperimentale una distinzione tra soluzioni periodiche o soluzione che ne differiscano per termini piccoli è possibile fino ad un certo punto e quindi essa è inutile oltre un certo limite.

A prescindere da queste considerazioni che rivestono più che altro un interesse matematico, quello che resta invece, dal punto di vista propriamente meccanico, l'aspetto più interessante del fenomeno è come abbiamo già detto il meccanismo di alimentazione.

L'esame dei due sistemi misti meccanici ed elettrici di Bethenod e di Hartley mi ha suggerito la costruzione di meccanismi che pur restando nell'ambito della meccanica propriamente detta, presentano lo stesso interessante fenomeno di *azione asincrona.*

Dallo studio di questi sistemi puramente meccanici si vedrà come si possono sostenere le oscillazioni proprie di un sistema di per se dissipativo, senza che la frequenza propria di questo sia in qualche relazione di razionalità con la frequenza della forza esterna impressa purchè questa forza agisca sul sistema in discorso non direttamente ma per tramite di un altro sistema accoppiato non linearmente col primo. Questa è la proprietà, oltre beninteso all'aspetto dei sistemi differenziali in cui questi sistemi fisici si traducono analiticamente, che avvicina i meccanismi da noi costruiti ai sistemi misti di partenza.

Precisamente considereremo due sistemi dinamici, praticamente realizzabili, in due gradi di libertà, il primo dei quali è ottenuto accoppiando non-linearmente e capacitivamente due oscillatori lineari Ω_1, Ω_2, su uno dei quali, (Ω_2 per fissare le idee) agisce una sollecitazione sinusoidale forzante; il secondo è ottenuto dal primo sostituendo l'accoppiamento non-lineare capacitivo con un accoppiamento ancora non-lineare di capacità e di inerzia.

Il primo sistema richiama il sistema di Hartley, il secondo invece è una opportuna combinazione dei due.

Nei riguardi del primo modello si riesce a dimostrare che se sono soddisfatte opportune condizioni strutturali, se il periodo proprio di Ω_1 è sufficentemente grande, e se il doppio della frequenza n della forza esterna impressa non è un multiplo di quella propria n' di Ω_1, il sistema Ω_1 si muove compiendo, come verrà precisato più avanti, *oscillazioni isocrone stabili.* Questi movimenti in generale non sono moti periodici perchè, pur essendo le oscillazioni del sistema isocrone, le loro ampiezze non sono costanti ma variabili entro certi limiti.

Nel secondo modello la restrizione riguardante il caso eccezionale che $2n$ sia un multiplo di n' viene a cadere.

L'aver a che fare con modelli puramente meccanici è stato utile oltre che per ragioni di maggior semplicità, anche e sopratutto perchè in questi modelli si rende giustificata e spontanea una ulteriore schematizzazione, che permette di trattare nel suo ambito *con rigore* e fino in fondo il fenomeno.

Il meccanismo di alimentazione non è detto che sia precisamente lo stesso per questi meccanismi e per i sistemi misti, perchè questa ulteriore schematizzazione non è in generale razionalmente giustificata nei riguardi dei sistemi misti, almeno nei modelli in cui questi sono stati realizzati e sperimentati.

Mi pare però possibile una realizzazione di un sistema misto più aderente per esempio al secondo meccanismo che forse potrebbe presentare delle caratteristiche, di notevole interesse anche pratico ed applicativo, diverse in parte da quelle che presentano i sistemi di Bethenod e di Hartley.

Rileverò che nel corso del lavoro ho dovuto fare ricorso a certi teoremi di stabilità per equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici che mi risultano nuovi e di cui ho dovuto dare completa dimostrazione.

Inizierò con uno schematico richiamo dei due sistemi di Soulier-Bethenod e di Hartley per ragioni di comodità e per permettere un immediato confronto con i meccanismi che passerò a descrivere subito dopo.

La trattazione analitica di questi sistemi occuperà il resto della memoria.

1. - I sistemi di Soulier-Bethenod e di Hartley.

Cominciamo col richiamare il sistema Soulier-Bethenod. Un pendolo costituito da una massa di ferro dolce oscilla intorno alla sua configurazione di equilibrio stabile. Esso fa variare l'induttanza di una bobina dimensionata e collocata in modo opportuno (vedi fig. 1) [4]). La bobina è uno degli elementi costituenti un circuito oscillante alimentato da una forza elet-

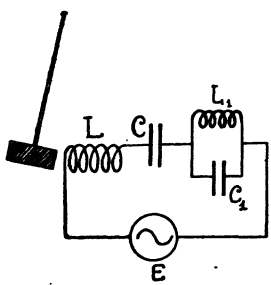

Fig. 1

tromotrice variabile sinusoidalmente. Siano: $\mathfrak{J}$ il momento d'inerzia del pendolo, l la distanza del barientro dall'asse di sospensione, θ l'anomalia contata a partire dalla configurazione di equilibrio, $L(\theta)$ l'induttanza della bobina, q la carica istantanea del condensatore, $2D$ il coefficiente di dissipazione del pendolo, R la resistenza del circuito, E sen ωt la forza elettromotrice che alimenta il circuito. Tenuto conto che l'azione meccanica della bobina sul pendolo si riduce ad una forza applicata al nucleo di ferro dolce di grandezza istantanea $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}L(\theta)\dot{q}^2(t)\right) = \frac{1}{2}L'(\theta)\dot{q}^2$ si stabiliscono secondo i principi classici della meccanica e dell'elettrodinamica, applicate al sisitema in discorso opportunamente schematizzato, le seguenti

---

[4]) Gli schemi di fig. 1), e 2) sono stati tratti dal libro di ROCARD. *Dinamique general des Vibrations*, Masson et C, Paris, 1949, 315. A proposito del sistema di SOULIER-BETHENOD si noti che il circuito L_1C_1 è un circuito filtro di cui nella scrittura delle equazioni 1) si tien conto solo parzialmente attraverso la resistenza R e la capacità C.

equazioni che sembrano possedere una sufficiente generalità,

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{J}\ddot{\theta} + 2D\dot{\theta} + \mathfrak{M}gl\theta = \dfrac{l}{2} L'(\theta)\dot{q}^2, \\ \dfrac{d}{dt}(L(\theta)\dot{q}) + R\dot{q} + \dfrac{1}{C} q = E \operatorname{sen} \omega t . \end{cases}$$

Se la disposizione è all'incirca quella di fig. 1 si può ritenere he la funzione $L(\theta)$ che costituisce l'elemento non lineare, abbia un andamento crescente. Anzi per opportuni dimensionamenti del dispositivo la funzione $L(\theta)$ può subire, nel passaggio del pendolo per la posizione $\theta = 0$, un incremento di notevole entità.

Il sistema di Harley è costituito da un diapason inserito come in fig. 2 in un circuito oscillante in modo che una delle

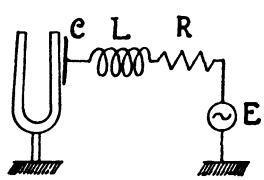

Fig. 2

due branche nel suo moto vibratorio fa variare la capacità del condensatore C. Se denotiamo con x lo spostamento dell'estremità della branca dalla sua configurazione di equilibrio e con q, la carica del condensatore, tenuto conto che la forza esplicata da una delle armature di C sulla branca del diapason è data da $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{2C}\right)$, si perviene con evidente significato degli altri simboli, al sistema

$$(2)\qquad \begin{cases} \ddot{x} + 2D\dot{x} + kx = \dfrac{q^2}{2} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{C(x)}\right) \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{q}{C(x)} = E \operatorname{sen} \omega t . \end{cases}$$

La funzione $\varphi(x) = \dfrac{1}{C(x)}$ è una funzione crescente di x e in generale neppure lineare in x; comunque l'accoppiamento

è certamente non lineare e differisce da quello relativo al sistema di Soulier-Bethenod per il fatto che in quest'ultimo caso esso può dirsi completamente capacitivo mentre nel precedente è piuttosto capacitivo-induttivo.

2. - Un primo sistema dinamico.

Consideriamo dapprima il sistema dinamico rappresentato schematicamente in fig. 3, costituito da due oscillatori, accoppiati in modo opportuno, di cui uno è armonico e l'altro è un oscillatore non-lineare forzato.

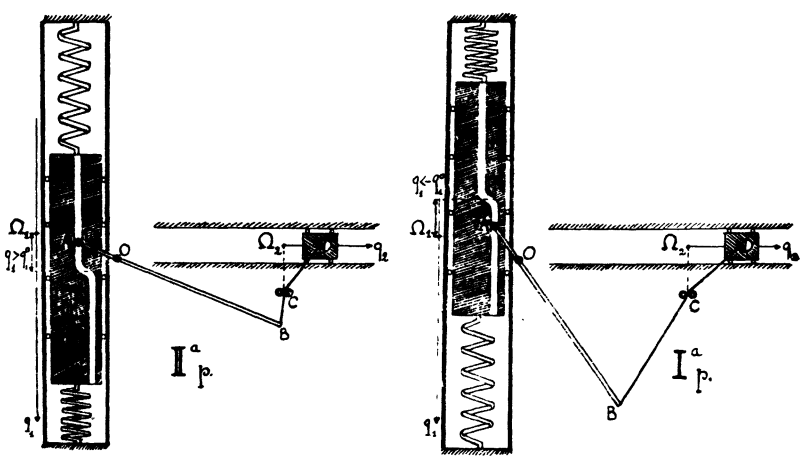

Fig. 3

Precisamente sia $\mathcal{C}_1$ un corpo di massa M, scorrevole lungo una guida rettilinea g_1 e soggetto ad una forza di richiamo elastica di centro Ω_1. Sia q_1 la coordinata ascissa, lungo la guida, che determina la posizione di $\mathcal{C}_1$.

Un'asta AB di massa trascurabile è girevole intorno ad un punto O. L'asta AB è collegata con $\mathcal{C}_1$, per esempio mediante un meccanismo a glifo, in modo che la posizione dell'asta è univocamente determinata dalla posizione di $\mathcal{C}_1$. Tale meccanismo e così dimensionato che quando AB occupa una posizione relativa a valori di $q_1 \leq -q_1^0$ l'asta AB occupa una posizione fissa che denoteremo come posizione I^a, quando $\mathcal{C}_1$

si trova in posizioni corrispondenti a valori di $q_1 \geq q_1^0$ l'asta è nella posizione II^a.

All'estremità B dell'asta è fissato uno dei capi di un filo elastico λ, il quale passando tra due pulegge in C ha l'altro capo fissato in punto D di un corpo $\mathcal{C}_2$ di massa m.

$\mathcal{C}_2$ può scorrere a sua volta lungo una guida rettilinea g_2 di direzione perpendicolare a quella di g_1 ma sempre sullo stesso piano, che è supposto per fissare le idee, orizzontale. La retta r su cui si muove D dista δ da C. Su r si fissi un sistema di ascissa q_2 con l'origine in Ω_2, proiezione di C su r.

I passaggi dell'asta AB dalla prima alla seconda posizione avvengono, per la struttura del meccanismo a glifo, bruscamente. Dal punto di vista energetico diremo subito che mentre nel passaggio dalla posizione I^a alla II^a è il sistema $\mathcal{C}_2$ che attraverso l'asta fornisce energia all'oscillatore $\mathcal{C}_1$ nel passaggio inverso invece l'oscillatore $\mathcal{C}_1$ perde parte della sua energia.

Supporremo inoltre che il dispositivo sia tale da consentirci di trascurare le azioni dissipative dovute all'attrito sulle guide e sugli altri vincoli rispetto a quelle dovute alla resistenza di mezzo che supponiamo siano del tipo viscoso. Infine per realizzare la sollecitazione alimentatrice di tipo armonico agente sulla coordinata q_2 possiamo supporre, per esempio, che tutto il sistema sia animato di moto traslatorio in direzione parallela ad r e che la legge del moto di trascinamento sia del tipo armonico.

L'impostazione delle equazioni dinamiche è relativamente agevole. Denotata con c_1 la costante caratteristica della forza di richiamo elastica agente su $\mathcal{C}_1$ e con c_2 la costante del filo elastico, con l_0 la lunghezza naturale del filo, supposta sufficientemente piccola perchè esso sia costantemente in tensione, il potenziale di quella parte della sollecitazione totale che è conservativa si esprime nella forma

$$U = -\frac{c_1}{2} q_1^2 - \frac{c_2}{2} (\sqrt{q_2^2 + \delta^2} + l(q_1) - l_0)^2, \tag{3}$$

ove si è indicata con $l(q_1)$ la distanza BC dipendente solo dalla coordinata q_1. Trascurando infinitesimi di ordine su-

periore al secondo in q_2, la U assume la forma

$$U = -\frac{c_1}{2} q_1^2 - \frac{c_2}{2} \varphi(q_1) q_2^2 - \frac{c_2}{2} \delta^2 \varphi^2(q_1), \tag{4}$$

ove si è posto

$$\varphi\delta = \delta - l_0 + l(q_1) . \tag{4'}$$

La forza viva, per l'ipotesi ammessa dalla trascurabilità dell'inerzia dell'asta AB e del filo, ha la semplice forma

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} (M\dot{q}_1^2 + m\dot{q}_2^2). \tag{5}$$

La dissipazione per le ipotesi ammessa è caratterizzata dalla funzione del Rayleigh

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (\gamma_1 \dot{q}_1^2 + \gamma_2 \dot{q}_2^2), \tag{6}$$

mentre infine sul sistema agisce ancora una forza, coincidente nel caso specifico con la forza di trascinamento, il cui lavoro virtuale vale

$$\delta L = E \operatorname{sen} \omega t \delta q_2 . \tag{7}$$

In base a ciò le equazioni dinamiche del sistema si scrivono

$$\begin{cases} M\ddot{q}_1 + \gamma_1 \dot{q}_1 + c_1 q_1 = -\dfrac{c_2}{2} \varphi'(q_1) q_2^2 - c_2 \delta^2 \varphi'(q_1) \varphi(q_1), \\ m\ddot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_2 + c_2 \varphi(q_1) q_2 = E \operatorname{sen} \omega t, \end{cases} \tag{8}$$

che con ovvii cambiamenti di simboli si possono più semplicemente scrivere nella forma

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\gamma_1 \dot{q}_1 + \sigma^2 q_1 = -\dfrac{\mu}{2} \Phi'(q_1) q_2^2 - \mu\varepsilon^2 \Phi(q_1) \Phi'(q_1), \\ \ddot{q}_2 + 2\gamma_2 \dot{q}_2 + \Phi(q_1) q_2 = E \operatorname{sen} \omega t. \end{cases} \tag{8'}$$

Per quanto riguarda la funzione $\Phi(q_1)$ possiamo dire che essa è costante all'esterno di un intorno dell'origine $(-q_1^0, q_1^0)$, che è tanto più piccolo quanto più piccolo è il

tratto di sbarretta compreso tra la cerniera O e l'estremità A che è a contatto con $\mathcal{C}_1$. Porremo precisamente

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi(q_1) = \alpha_1^2 & q_1 \leq -q_1^0, \\ \Phi(q_1) = \alpha_1^2 & q_1 \geq q_1^0. \end{cases}$$

Dalla (4) e dall'esame della figura 3, risulta poi chiaramente essere $\alpha_1^2 > \alpha_2^2$. Nell'intervallo $(-q_1^0, q_1^0)$, $\Phi(q_1)$ decresce, con una legge dipendente dalla forma del meccanismo di collegamento, dal valore α_1^2 al valore α_2^2.

3. - Una ulteriore schematizzazione del sistema dinamico considerato nel n. 2.

Costruito così il sistema dinamico che può dirsi equivalente al sistema di Hartley considerato nel n. 1, si ripresenta naturalmente la difficoltà gravissima della sua risoluzione. Ma qui nei riguardi del nostro sistema meccanico, l'osservazione diretta del fenomeno è più agevole, e giustifica, oltre a renderla spontanea, una ulteriore schematizzazione nel cui ambito il fenomeno, pur conservando i suoi aspetti più significativi ammette uno studio matematico rigoroso.

Volendo dunque spingere oltre la schematizzazione supporremo che l'intervallo $(-q_1^0, q_1^0)$, che determina l'insieme delle sole configurazioni di $\mathcal{C}_1$ in corrispondenza alle quali si hanno scambi di energia tra i due oscillatori accoppiati, sia così piccolo da poter ritenere che il fenomeno, negli intervalli di tempo eccezionali in cui $\mathcal{C}_1$ passa attraverso queste configurazioni, intervalli che devono risultare piccoli rispetto al periodo della forza impressa, si svolga con tutte le caratteristiche di un moto impulsivo [5]).

In base a questa assunzione consideriamo un movimento del sistema in corrispondenza al quale $\mathcal{C}_1$ transiti per le configurazioni dell'intervallo eccezionale da $-q_1^0$ a q_1^0 [6]) con

---

[5]) Notiamo che chematizzazioni analoghe sono già state profiquamente adottate per esempio nello studio dell'orologio.

[6]) L'abbiamo supposto simmetrico rispetto all'origine ma questa è una ipotesi puramente semplificativa.

velocità finita e maggiore di un ε arbitrario ma positivo. Se q_1^0 tende a zero, anche la durata τ^0 del passaggio di $\mathcal{C}_1$ da $-q_1^0$ a q_1^0 tende a zero.

Moltiplicando per $\dot{q}_1 dt$ la $(8_1')$ si ha

$$(10) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \sigma^2 q_1^2)\right] = -2\gamma_1 \dot{q}_1 dq_1 - \frac{\mu}{2} q_2^2 \Phi'(q_1) dq_1 - \frac{\mu\varepsilon^2}{2} d\Phi^2(q),$$

e da questa integrando nell'intervallo $(-q_1^0, q_1^0)$, ed applicando il teorema della media, si ottiene

$$(11) \qquad \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2)_{q_1=q_1^0} - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2)_{q_1=-q_1^0} = -4\gamma_1 \dot{q}_1^0 \,|\, \dot{q}_1 \,| +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \,|\, q_1^2 \,|\, (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{\mu\varepsilon^2}{2}(\alpha_1^4 - \alpha_2^4),$$

ove per $|\dot{q}_1|$ e $|q_2^2|$ si intendono rispettivamente i valori di $\dot{q}_1$, q_2^2 calcolati in un certo istante dell'intervallo eccezionale.

Se si passa al limite per $q_1^0 \to 0$ si ottiene infine

$$(12) \qquad (\dot{q}_1^+)^2 - (\dot{q}_1^-)^2 = \mu q_2'^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4),$$

essendo q_2' il valore di q_2 nell'istante eccezionale di transito ed avendo denotato al solito con $\dot{q}_1^-$ e $\dot{q}_1^+$ i limiti sinistro e destro di q_1 per t tendente allo stesso istante.

Dunque possiamo ritenere che ogni qual volta $\mathcal{C}_1$ raggiunge l'origine con velocità positiva transita per essa e la sua velocità subisce un istantaneo aumento fornito dalla (12), potendo quindi eccezionalmente risultare continua.

In questo stesso istante eccezionale la coordinata q_2 presenta una discontinuità sulla sola derivata seconda e successive, discontinuità concomitanti con la discontinuità di $\Phi(q_1)$ nel punto $q_1 = 0$. Basta per questo rifarsi alla $(8_2')$ e tener conto che $\tau^0 \to 0$.

Analogamente si consideri il passaggio di $\mathcal{C}_1$ attraverso l'intervallo eccezionale in senso inverso, cioè da $+q_1^0$ a $-q^0$ e si ragioni come sopra. Si trova così che se $\mathcal{C}_1$ perviene all'origine con velocità q_1^- negativa, e soddisfacente alla

$$(13) \qquad (\dot{q}_1^-)^2 > \mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) q_2''^2 + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4),$$

(q_2'' è il valore di q_2 nell'istante eccezionale), allora esso transita per l'origine e la sua velocità subisce una istantanea diminuzione in modulo fornita dalla seguente eguaglianza

$$(14) \qquad (\dot{q}_1^+)^2 - (\dot{q}_1^-)^2 = -\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)q_2''^2 - \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4),$$

mentre in quello stesso istante la q_2, continua con la derivata prima, presenta ancora una discontinuità nelle derivate successive.

Dunque nel campo di validità dello schema adottato, lo studio del moto del sistema dinamico si riduce a quello del sistema lineare a tratti costituito dall'equazione

$$(15) \qquad \ddot{q}_1 + 2\gamma_1\dot{q}_1 + \sigma^2 q_1 = 0,$$

e dalla

$$16) \qquad \begin{cases} \ddot{q}_2 + 2\gamma_2\dot{q}_2 + \alpha_1^2 q_2 = E \operatorname{sen} \omega t & (\text{per } q_1 < 0), \\ \ddot{q}_2 + 2\gamma_2\dot{q}_2 + \alpha_2^2 q_2 = E \operatorname{sen} \omega t & (\text{per } q_1 > 0), \end{cases}$$

con le condizioni di discontinuità regolate da (12), (14).

Precisando meglio, il problema così schematizzato è ridotto allo studio delle soluzioni $q_1(t)$, $q_2(t)$ delle equazioni (15), (16) che soddisfano alle seguenti proprietà.

a) $q_2(t)$ è continua con la derivata prima in ogni istante,

b) $q_1(t)$ è continua,

c) in ogni istante τ' in cui si annulla q_1 ed è $\dot{q}_1^- > 0$, $\dot{q}_1$ subisce un aumento regolato da (12), mentre in ogni istante τ'' in cui è $q_1 = 0$ e $\dot{q}_1^- < -\sqrt{\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)q_2''^2 + \mu\varepsilon(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)}$, $|\dot{q}_1|$ subisce una diminuzione regolata da (14).

d) Se in un istante τ^* è $q_1 = 0$ e

$$\sqrt{\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)q_2''^2 + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)} \leq \dot{q}_1^- \leq 0,$$

si ha $q_1 \equiv 0$ per ogni $t \geq \tau^*$ mentre per gli stessi valori di t q_2 soddisfa a (16_1).

È da rilevare subito che se noi possiamo provare, come effettivamente faremo, l'esistenza di una classe di soluzioni di questo sistema differenziale che godono delle proprietà di stabilità nel senso che ogni altra soluzione, almeno per condizioni

iniziali abbastanza vicine, tende a qualche soluzione di questa classe, potremo ritenere che le soluzioni in discorso rappresentino in modo soddisfacente non soltanto il movimento del sistema in questa ultima schematizzazione ma con buona approssimazione, tenendo conto di come si è passato dalla prima alla seconda schematizzazione, il moto effettivo del sistema dinamico dato, qualora risulti q_1^0 sufficientemente piccolo.

4. - Un secondo sistema dinamico.

Il sistema dinamico che considereremo in questo numero è rappresentato nelle sue parti essenziali in fig. 4 e per quanto riguarda il corpo $\mathfrak{C}_1$, la sbarra AB ed il loro collegamento

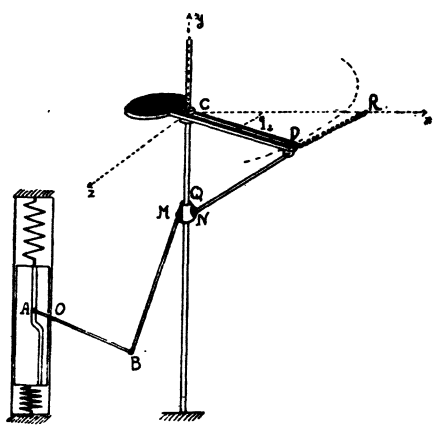

Fig. 4

non differisce punto dal sistema considerato nei precedenti paragrafi.

Un corpo $\mathfrak{C}_2$ per esempio del tipo di un pendolo, è costituito da una massa notevole posta all'estremità di una sbarra la quale recá una scanalatura DD' in cui trova preciso alloggiamento un perno fisso di asse a che supporremo per fissare le idee verticale. $\mathfrak{C}_2$ è vincolato a muoversi parallelamente al piano normale ad a in modo che la retta solidale DD' passa sempre per un punto C di a.

Supposto che la guida g_1 sia parallela ad a, si colleghi l'estremità B dell'asta AB con un supporto Q scorrevole lungo a, con una biella BM recante cerniere cilindriche agli estremi.

Il supporto Q è collegato con la sbarra DD' del pendolo, tramite una sbarretta ND vincolata in N e D con cerniere sferiche al supporto Q ed al pendolo.

Quando l'asta AB è nella posizione I^a e II^a, D è obbligato a muoversi su una circonferenza di centro C e raggio CD e quindi $\mathcal{C}_2$ non può che muoversi di moto rotatorio intorno ad a.

Per quanto riguarda la sollecitazione supponiamo che su $\mathcal{C}_2$ agisca una forza elastica avente il centro in un punto fisso R ed agente per semplicità, nel punto D.

Si supponga, sempre restando invariata la sollecitazione esterna riguardante $\mathcal{C}_1$, che su $\mathcal{C}_2$, (magari per il tramite di un supporto $\mathcal{C}_2'$, di massa trascurabile e girevole, intorno a C, solidalmente con la direzione della retta DD') agisca una coppia di momento variabile sinusoidalmente. Quest'ultima sollecitazione, che è poi quella che alimenta il sistema, di per se dissipativo, si realizza per esempio accoppiando capacitivamente $\mathcal{C}_2'$ con un oscillatore lineare forzato sinusoidalmente, di inerzia e capacità tanto rilevanti da non risentire dell'accoppiamento con il nostro sistema.

Come coordinate lagrangiane del sistema, in due gradi di libertà, assumeremo oltre alla coordinata q_1, l'angolo formato dalla retta fissa CR con la retta solidale DD'. Denoteremo poi con $L(q_1)$ la distanza CD che è funzione della sola q_1, con ρ il giratore di $\mathcal{C}_2$ rispetto all'asse baricentrico parallelo ad a, con δ la distanza DG, con r la distanza CR, supponendola maggiore di $L(q_1)$ per qualunque q_1, con M ed m le masse di $\mathcal{C}_1$ e rispettivamente $\mathcal{C}_2$, con c_1, c_2 le costanti elastiche delle due forze di richiamo agenti su $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

In conformità avremo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\{[M + L'^2(q_1)]\dot{q}_1^2 + m[\rho^2 + (\delta - L(q_1))^2]\dot{q}_2'^2\}, \tag{17}$$

ed inoltre

$$U = -\frac{c_2}{2}\{L^2(q_1) + r^2 - 2L(q_1)r\cos q_2\} - \frac{c_1}{2}q_1^2. \tag{18}$$

Trascurando al solito i termini di ordine superiore al secondo in q_2 si può assumere come potenziale della sollecitazione conservativa il seguente

$$U = -\frac{c_1}{2}q_1^2 - \frac{c_2}{2}[r - L(q_1)]^2 - \frac{c_2}{2}rq_2^2L(q_1). \tag{19}$$

Sia infine

$$\mathfrak{F} = \gamma_1'\dot{q}_1^2 + \gamma_2(q_1)\dot{q}_2^2 \tag{20}$$

la funzione di dissipazione di Rayleigh, e

$$\delta L = \mathfrak{M}\,\mathrm{sen}\,\omega t\delta q_2 \tag{21}$$

il lavoro virtuale della sollecitazione esterna.

Le equazioni di Lagrange diventano in conformità

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\{[M + mL'^2(q_1)]\dot{q}_1\} - \frac{m}{2}\dot{q}_1^2\frac{d}{dq_1}L'^2(q_1) + 2\gamma_1'\dot{q}_1 + c_1q_1 = \\ &= \frac{m}{2}\dot{q}_2^2\frac{d}{dq_1}[\delta - L(q_1)]^2 - \frac{c_2}{2}q_2^2r\frac{dL}{dq_1} + c_2[r - L(q_1)]\frac{dL}{dq_1}, \\ &\frac{d}{dt}\{m[\rho^2 + [\delta - L(q_1)]^2]\dot{q}_2\} + 2\gamma_2(q_1)\dot{q}_2 + c_2rq_2L(q_1) = \mathfrak{M}\,\mathrm{sen}\,\omega t. \end{aligned} \tag{22}$$

Anche in questo modello dinamico $L(q_1)$ è costante all'esterno di un intervallo $(-q_1^0, q_1^0)$ e risulta $L(q_1) = L_1$ per $q_1 \leq -q_1^0$ ed $L(q_1) = L_2$ per $q_1 \geq q_1^0$ essendo $L_2 > L_1$. Lo stesso dicasi per $\gamma_2(q_1)$; poniamo $\gamma_2(q_1) = \gamma_{21}'$ per $q_1 < -q_1^0$, $\gamma_2(q_1) = \gamma_{22}'$ per $q_1 > q_1^0$ e notiamo che $\gamma_{21}' > \gamma_{22}' > 0$ ritenendo, il coefficiente di dissipazione crescente col momento di inerzia di $\mathcal{C}_2$ rispetto ad a. Le equazioni di Lagrange in questi campi di variabilità per q_1 diventano

$$\begin{cases} M\ddot{q}_1 + 2\gamma_1'q_1 + c_1q_1 = 0, & (i = 1,\ 2) \\ m\ddot{q}_2[\rho^2 + (\delta - L_i)^2] + 2\gamma_{2i}'\dot{q}_2 + c_2rL_iq_2 = \mathfrak{M}\,\mathrm{sen}\,\omega t, \end{cases} \tag{23}$$

ove va scelto $i = 1$ per $q_1 \leq -q_1^0$ ed $i = 2$ per $q_1 \geq q_1^0$.

Proseguendo nella schematizzazione come abbiamo fatto per il modello dinamico trattato nei numeri precedenti, supporremo che l'intervallo eccezionale $-q_1^0$, q_1^0 sia estremamente piccolo così che, mentre $\mathcal{C}_1$ transita per le configurazioni relative a tale intervallo con velocità mai nulla, impiegando un tempo brevissimo, si manterrà costante il momento della quantità di moto di $\mathcal{C}_2$ rispetto ad a e quindi risulterà in detti intervalli eccezionali

$$\{\rho^2 + [\delta - L(q_1)]^2\}\,\dot{q}_2 = \{\rho^2 + (\delta - L_i)^2\}\,\dot{q}_{2i}\,, \tag{24}$$

ove $\dot{q}_{2i}$ è il valore di $\dot{q}_2$ all'istante iniziale di transito e va scelto $i = 1$, o 2 a seconda che il passaggio avviene da $-q_1^0$ a q_1^0 o viceversa.

La prima delle (22) moltiplicata per $\dot{q}_1$ diventa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{[M + mL'^2(q_1)]\dot{q}_1^2 + c_1 q_1^2\} = -2\gamma_1'\dot{q}_1 + \tag{25}$$

$$+\frac{m}{2}\dot{q}_2^2\dot{q}_1\frac{d}{dq_1}[\delta - L(q_1)]^2 - \frac{c_2}{2}\dot{q}_2^2 q_1 r\frac{dL}{dq_1} - \frac{c_2}{2}\dot{q}_1\frac{d}{dq_1}[r - L(q_1)]^2.$$

Consideriamo dapprima il transito di $\mathcal{C}_1$ per la posizione $q_1 = 0$ con velocità positiva ed abbastanza grande. Sostituendo nel secondo membro di (25), la $\dot{q}_2$ ricavata da (24) ponendovi $i = 1$, integrando tra $-q_1^0$ e q_1^0 e passando al limite per $q_1^0 \to 0$, si ha infine

$$\frac{M}{2}(\dot{q}_1^{+2} - \dot{q}_1^{-2}) = -\frac{m}{2}\dot{q}_{21}^2\lambda_1^4\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) - \frac{c_2}{2}rq_{21}^2(L_2 - L_1) + \tag{26}$$

$$+\frac{c_2}{2}(L_2 - L_1)(2\tau - L_1 - L_2),$$

avendo indicato ancora con q_{21}, $\dot{q}_{21}$ i limiti sinistri di $q_2(t)$, $\dot{q}_2(t)$ per t che tende all'istante di transito ed avendo posto

$$\lambda_i^2 = \rho^2 + (\delta - L_i)^2\,. \tag{27}$$

Si noti che essendo $\delta > L_2 > L_1$, risulta $\lambda_1^2 > \lambda_2^2$.

Affinchè tale transito avvenga effettivamente bisogna che risulti

$$(28)\qquad M\dot{q}_1^{-2} > m\dot{q}_{21}^2\lambda_1^4\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)+c_2rq_{21}^2(L_2-L_1)-$$
$$-c_2(L_2-L_1)(2r-L_1-L_2).$$

In modo del tutto analogo, si dimostra che nel passaggio di $\mathfrak{C}_1$ per la configurazione relativa al valore nullo di q_1 con velocità negativa ma in modulo sufficientemente grande, si ha

$$(29)\qquad M(\dot{q}_1^{+2}-\dot{q}_1^{-2}) = m\dot{q}_{22}^2\lambda_2^4\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)+c_2rq_{22}^2(L_2-L_1)-$$
$$-c_2(L_2-L_1)\,2r-L_1-L_2).$$

Perchè poi tale transito possa effettivamente verificarsi bisogna che sia soddisfatta la

$$(30)\qquad M\dot{q}_1^{-2} > c_2(L_2-L_1)(2r-L_1-L_2)-m\dot{q}_{22}^2\lambda_2^4\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)-$$
$$-c_2rq_{22}^2(L_2-L_1).$$

In definitiva dunque nella più avanzata schematizzazione, cioè entro i limiti della sua validità, lo studio del movimento del sistema dinamico è ridotto a quello delle soluzioni di un sistema di tipo analogo al sistema relativo al primo modello.

Precisamente si tratta di studiare le soluzioni $q_1(t)$, $q_2(t)$ del sistema (23), ove si assuma $i=1$ per $q_1<0$ ed $i=2$ per $q_1>0$, che soddisfano alle seguenti condizioni

a) $q_1(t)$ e $q_2(t)$ continue.

b) Negli istanti in cui si annulla la q_1 la q_2 subisce un salto regolato dalla

$$(26')\qquad \begin{cases} \dot{q}_2^+ = \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\,\dot{q}_2^- & \text{se} \quad \dot{q}_1>0 \\ \dot{q}_2^+ = \dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\,\dot{q}_2^- & \text{se} \quad q_1<0 \end{cases}$$

in conformità a (24).

c) Se in un'istante τ^* essendo $q_1=0$, $\dot{q}_1>0$ non è soddisfatta la (28), o se essendo $q_1=0$, $\dot{q}_1<0$ non è soddi-

sfatta la (30), si ha $q_1 \equiv 0$ per ogni $t \geq \tau^*$, mentre q_2 da quell'istante in poi soddisfa sempre alla (23), ove si ponga $i \equiv 1$ se nell'istante τ^* è $\dot{q}_1 > 0$ ed $i = 2$ se è $\dot{q}_1 < 0$.

d) In ogni istante τ' in cui si annulla q_1 e $\dot{q}_1 > 0$ e soddisfacente a (28), $\dot{q}_1$ subisce una variazione regolata da (26), ed in ogni istante τ'' in cui si annulla q_1 ed è q_1 ed è $\dot{q}_1 < 0$ e soddisfacente a (30), q_1 subisce una variazione regolata da (29).

Tratteremo nei prossimi numeri il sistema considerato nei paragrafi 2) e 3) e passeremo poi a studiare il sistema considerato qui.

Vogliamo però prima di passare oltre rilevare quella che, nei riguardi del tipo di ragionamento che seguiremo nei prossimi numeri, è la sostanziale differenza tra i problemi analitici ai quali è stato ridotto lo studio del movimento dei due sistemi dinamici. Questa differenza si riscontra nel confrontare le (26), (29) con le (12), (14) che regolano le variazioni di energia cinetica di $\mathcal{C}_1$ negli istanti eccezionali.

Si nota in effetti che al posto del termine nel quadrato del valore istantaneo di q_2 in (12), (14) si ha in (26), (29) la somma di due termini l'uno ancora nel quadrato di q_2 e l'altro nel quadrato di $\dot{q}_2$. Così che, mentre il termine in discorso che compare in (12), (14) può essere eccezionalmente nullo, così non può essere per la somma dei due termini corrispondenti ad esso in (26), (29).

5. - Risoluzione del problema analitico connesso col primo modello.

Rifacendoci dunque al sistema (15), (16) cominciamo a supporre che sia

$$\gamma_1 < \sigma, \tag{31}$$

e scriviamo l'integrale generale di (15)

$$q_1 = Ae^{-\gamma_1 t} \cos(\nu t + \varphi), \quad \nu = \frac{\pi}{T} = \sqrt{\sigma^2 - \gamma_1^2}. \tag{32}$$

Consideriamo l'integrale particolare

$$(33)\qquad \begin{cases} q_1 = \dfrac{y}{\sigma} e^{-\gamma_1(t-\tau)} \operatorname{sen} \sigma(t-\tau), \\ \dot{q}_1 = \dfrac{y}{\sigma} e^{-\gamma_1(t-\tau)}[\sigma \cos \sigma(t-\tau) - \gamma_1 \operatorname{sen} \sigma(t-\tau)], \end{cases}$$

che ovviamente soddisfa alle condizioni

$$(34)\qquad \lim_{t \to \tau^+} q_1(t) = 0, \quad \lim_{t \to \tau^+} \dot{q}_1(t) = y.$$

Supporremo, per fissare le idee, $y > 0$.

Seguendo questa soluzione si ha, nell'istante $\tau + T$,

$$(35)\qquad q_1(\tau + T) = 0, \quad \dot{q}_1(\tau + T) = -ye^{-\gamma_1 T}.$$

Passiamo ora a considerare l'integrale generale di (16) che scriveremo nella forma

$$(36)\qquad q_{2i} = \frac{E \operatorname{sen}(\omega t - \theta_i)}{[(\omega^2 - \alpha_i^2) + 4\gamma_2^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} + f(t),$$

ove θ_i è l'angolo acuto che soddisfa alla

$$(37)\qquad tg\theta_i = \frac{2\gamma_2\omega}{\alpha_i^2 - \omega^2},$$

ed $f(t)$ è una funzione di t e di due cosanti arbitrarie. Di $f(t)$ ci basta per ora sapere che, supposto $\alpha_2^2 > \gamma_2^2$ (onde risulta anche $\alpha_1^2 > \gamma_2^2$), [7]), si mantiene limitato il prodotto $f(t)e^{\gamma_2 t}$ cioè che possiamo scrivere

$$(38)\qquad f(t) = 0(e^{-\gamma_2 t}).$$

Premesso ciò si noti che nell'intervento di tempo $(\tau, \tau + T)$, estremi esclusi, la soluzione (33) di (15) che abbiamo preso in considerazione soddisfa alla condizione $q_1 > 0$ onde la coordinata q_2 soddisfa, in questo stesso intervallo, alla (16_2)

---

[7]) Questa ipotesi non è essenziale ma comoda.

e vale dunque

$$q(t) = \frac{E \operatorname{sen}(\omega t - \theta_2)}{[(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} + 0(e^{-\eta t}); \tag{39}$$

avremo quindi

$$q_2(\tau + T) = q_2'' = \frac{E \operatorname{sen}(\omega(\tau + T) - \theta_2)}{[(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} + 0(e^{-\eta T}). \tag{40}$$

Richiamata la (35), si supponga

$$\dot{q}_1^{-2}(\tau + T) = y^2 e^{-2\eta T} > \mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) q_2''^2 + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4),$$

ovvero in base a (40)

$$y^2 e^{-2\eta T} > \mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \frac{E^2 \operatorname{sen}^2[\omega(\tau + T) - \theta_2]}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} + \\ + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4) + 0(e^{-\eta T}) \tag{41}$$

allora q_1 transita senza arrestarsi per l'origine O e dopo il transito la sua velocità è fornita in base a (14) dalla

$$(q_1^+)^2 = y^2 e^{-2\eta T} - \mu \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) E^2 \operatorname{sen}^2[\omega(\tau + T) - \theta_2]}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} - \\ - \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_1^4) + 0(e^{-\eta T}) \tag{42}$$

ove evidentemente il termine indicato con $O\ (e^{-\eta T})$ non coincide con l'analogo termine che compare nel secondo membro di (41).

Denotando con $-y_1$ il valore di q_1^+ che è fornito dalla radice negativa del secondo membro di (42), certamente reale, perchè per ipotesi è soddisfatta la (41), nell'intervallo $(\tau + T, \tau + 2T)$, q_1 varia seguendo la legge (32), in relazione alle condizioni iniziali $q_1(\tau + T) = 0$, $\dot{q}_1(\tau + T) = -y_1$. Non ci serve scrivere l'espressione esplicita di una tale soluzione; ci basterà invece osservare che nell'istante $\tau + 2T$ si ha

$$q_1^-(\tau + 2T) = 0 \quad , \quad \dot{q}_1^-(\tau + 2T) = y_1 e^{-\eta T}. \tag{43}$$

La (43) fornisce il valore certamente positivo di $\dot{q}_1^-(\tau+2T)$ onde in questo istante si ha il salto di $\dot{q}_1$ dal valore $\dot{q}_1^-(\tau+2T)$ al valore $\dot{q}_1^+(\tau+2T)$, che ci è fornito in base a (12) dalla radice positiva dell'equazione

$$(44) \qquad y'^2 = y_1^2 e^{-2\eta T} + \mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) q_2'^2 + \mu\varepsilon(\alpha_1^4 - \alpha_2^4).$$

Per la valutazione di $q_2'^2$ rifacciamoci a (36), notando che, poichè nell'intervallo $(\tau+T,\ \tau+2T)$ è $q_1 < 0$, bisognerà assumere $i = 1$.

Si ottiene così

$$(45) \qquad q_2'^2 = \frac{E^2 \operatorname{sen}^2(\omega(\tau+2T) - \theta_1)}{(\omega^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} + 0(e^{-\eta_2 T})$$

e quindi finalmente in base a (44), (42),

$$(46) \qquad y'^2 = y^2 e^{-4\eta T} + \mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)E^2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2[\omega(\tau+2T) - \theta_1]}{(\omega^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-2\eta T} \operatorname{sen}^2[\omega(\tau+T) - \theta_2]}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} \right\} + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)(1 - e^{-2\eta T}) + 0(e^{-\eta_2 T}).$$

Dall'istante $\tau+2T$, all'istante $\tau+4T$ il fenomeno si evolve secondo le stesse leggi che lo hanno regolato nell'intervallo $(\tau,\ \tau+2T)$. Supposta quindi soddisfatta la (41) ove si ponga al posto di y la y' data da (46), ed al posto di τ, $\tau+T$, la (46) stessa ci fornisce il valore y''^2 di $\dot{q}$, dopo il secondo transito per l'origine con velocità positiva, qualora nel secondo membro della stessa (46) si sostituisca al posto di y^2 la y'^2 ed al posto di τ il valore $\tau+2T$, oltre che nei termini di (46) in cui compare esplicitamente anche nel termine in $O(e^{-\eta_2 T})$, in cui compare implicitamente.

Il moto oscillatorio di C_1 si estingue in quell'istante in cui non vale più la (41) valutata per $y^2 = y^{(n)2}$ e ponendo al posto di τ il valore $\tau + 2nT$.

Si può dunque dire che la (46) con la condizione (41) ci fornisce a meno dei termini indicati in $O(e^{-\eta_2 T})$ la completa soluzione del sistema. Non riteniamo inutile il grafico di

fig. 5 rappresentante nel piano delle fasi q_1, $\dot{q}_1$ il moto di $\mathcal{C}_1$. L'arco ABC corrisponde alla prima semioscillazione, il segmento CC' al primo transito con vedocità negativa ed eventuale perdita di forza viva, l'arco $C'DE$ alla seconda semio-

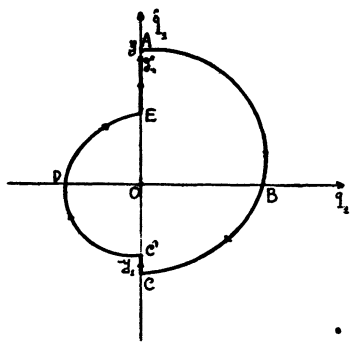

Fig. 5

scillazione, ed infine il segmento EE' al primo transito per l'origine con velocità positiva ed eventuale incremento di forza viva. Se il punto C cade in un intorno sinistro dell'origine nell'asse q_1, di ampiezza δ data, a meno di termini dell'ordine di $O(e^{-\gamma_2 T})$, da

$$\delta = \frac{\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)E^2}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4) \tag{47}$$

la traiettoria può arrestarsi e ciò in relazione al valore q_2'' che in quell'istante ha il parametro q_2.

Concluderemo questa prima parte della trattazione analitica del problema rilevando che i parametri γ_1, γ_2, T, ω^2, α_1^2, α_2^2, μE^2, ε^2 che intervengono in (45), (41) sono tutti indipendenti, dovendo per essi sussistere la sola relazione

$$\gamma_2^2 < \alpha_2^2 < \alpha_1^2, \tag{48}$$

e rileviamo che i termini indicati semplicemente col simbolo $O(e^{-\gamma_2 T})$ non dipendono dagli elementi che caratterizzano l'oscillatore $\mathcal{C}_1$ ed il suo moto che per il tramite di T.

6. - Studio di una particolare trasformazione piana.

Nel numero precedente abbiamo visto come, sostanzialmente, lo studio del moto del sistema dinamico comporti quello della corrispondenza $\mathcal{C}$ tra la coppia di numeri positivi (y, τ) e la coppia (y', τ') ottenuta da (y, τ) mediante la (46) scegliendo la radice positiva e mediante la

$$\tau' = \tau + 2T. \tag{49}$$

La $\mathcal{C}$ è definita per tutte le coppie (y, τ) che soddisfano alla (41).

Per la presenza in (46), (41) dei termini ivi indicati non conviene permettere allo studio di $\mathcal{C}$ lo studio della corrispondenza $\mathcal{C}'$ che associa a ciascuna coppia (y, τ) di numeri positivi, soddisfacenti alla

$$y^2 e^{-2\eta T} > \frac{\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\, E \operatorname{sen}^2 [\omega(\tau + T) - \theta_2]}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4), \tag{50}$$

la coppia (y', τ') ottenuta da (y, τ) mediante ancora la (49) e mediante la

$$\begin{aligned} y'^2 = y^2 e^{-4\eta T} + \mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)E^2 \Bigg\{ & \frac{\operatorname{sen}^2 [\omega(\tau + 2T) - \theta_1]}{(\omega^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} - \\ & - \frac{e^{-2\eta T} \operatorname{sen}^2 [\omega(\tau + T) - \theta_2]}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} \Bigg\} + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)(1 - e^{-2\eta T}) \end{aligned} \tag{51}$$

ove si scelga la radice positiva.

Siano $(y^2, \omega\tau = \theta)$ e raggio vettore anomalia di un generico punto P di un piano π in cui si è stabilito un riferimento polare. Ad ogni coppia di numeri (y^2, τ) corrisponde così un punto P e ad ogni coppia di numeri (y'^2, τ') un punto P'. Le equazioni (49), (51) definiscono quindi una trasformazione piana nella regione in cui è soddisfatta la (50), che è quella esterna ad una curva chiusa F simmetrica rispetto all'origine, del sesto ordine.

Dalla (49) si deduce subito che ai punti di un raggio r uscente dall'origine corrispondono punti di un altro raggio r'

pure uscente dall'origine e ruotato rispetto ad r in senso orario dell'angolo $2\omega T$.

Dunque elementi uniti in T o in qualche $T^{(n)}$ possono esistere solo se $2\omega T$ è commensurabile con 2π.

Premesso ciò cominciamo a supporre

$$\omega T = \frac{n\pi}{2} + \alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \tag{52}$$

e consideriamo la trasformazione $\mathcal{T}^{(2)}$ le cui equazioni sono fornite dalla

$$\left\{\begin{aligned} &\tau'' = \tau + 4T \\ &y''^2 = y^2 e^{-8h} - \frac{\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)e^{-2h}E^2}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2}\{\operatorname{sen}^2[\omega(\tau + T) - \theta_2]e^{-4h} + \\ &\qquad + \operatorname{sen}^2[\omega(\tau + 3T) - \theta_2]\} + \\ &\quad + \frac{\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)E^2}{(\omega^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2}\{\operatorname{sen}^2[\omega(\tau + 2T) - \theta_1]e^{-4h} + \\ &\quad + \operatorname{sen}^2[\omega(\tau + 4T) - \theta_1]\} + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)(1 - e^{-2h} + e^{-4h} - e^{-6h}) \end{aligned}\right. \tag{53}$$

ove si è posto $h = \gamma_1 T$. La $\mathcal{T}^{(2)}$ è definita per tutti i punti del piano per cui è soddisfatta non solo la (50), ma anche quella disuguaglianza che si ottiene da (50) ponendo al posto di y^2 la y'^2 fornita da (51) e ponendo al secondo membro al posto di τ, $\tau + 2T$. Condizione sufficiente perchè, in un punto $P(y^2, \omega\tau)$, *qualunque sia* τ, sia definita la $\mathcal{T}^{(2)}$ è che y^2 soddisfi alla seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned} y^2 e^{-6h} > {} & \frac{(1 + e^{-4h})\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)E^2}{(\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} + \\ & + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)(1 - e^{-2h} + e^{-4h}) + \delta_1^2. \end{aligned} \tag{54}$$

Osserviamo ora intanto che qualunque sia $h > 0$ esiste un y_2 ed un δ_0 tali che per ogni $y \geq y_2$ *e, qualunque sia* τ, risulta $y''^2 < y^2 - \delta_0^2$.

Inoltre si osservi che y''^2 è funzione crescente di y^2.

Si consideri ora la funzione di

$$f(\tau) = e^{-4h}\operatorname{sen}^2\omega\tau + \operatorname{sen}^2(\omega\tau + 2\alpha) \tag{55}$$

si ha con facili calcoli

$$(56)\quad \begin{cases} \min f(\tau) = \frac{1}{2}(e^{-4h}+1) - \frac{1}{2}(e^{-8h}+1+2\cos 4\alpha e^{-4h}) = i(\alpha, h) \\ \max f(\tau) = \frac{1}{2}(e^{-4h}+1) + \frac{1}{2}(e^{-8h}+1+2\cos 4\alpha e^{-4h}) = s(\alpha, h) \end{cases}$$

e si nota subito che per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ è $i(\alpha, h) > 0$.

In base a (53), supposta soddisfatta la (54), si ottiene

$$(57)\quad y''^2 > y^2 e^{-8h} + \mu E^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\left\{ \frac{i(\alpha, h)}{(\omega^2-\alpha_1^2)^2 + 4\gamma_2\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{s(\alpha h)}{(\omega^2-\alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} \right\} + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)(1 - e^{-2h} + e^{-4h}) - e^{-6h}).$$

Imponiamo ora la ulteriore condizione che per qualche y risulti $y''^2 > y^2 + \delta_2^2$, *qualunque sia* τ, ed otteniamo la seguente

$$(58)\quad y^2(1 - e^{-8h}) < \mu E^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\left\{ \frac{i(\alpha, h)}{(\omega^2-\alpha_1^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{s(\alpha, h)}{(\omega^2-\alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} \right\} + \mu\varepsilon^2(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)(1 - e^{-2h} + e^{-4h} - e^{-6h}) - \delta_2^2.$$

La compatibilità di (58) con (54) comporta l'esistenza di almeno un δ^2 per cui valga la seguente

$$(59)\quad \frac{i(\alpha, h)}{(\omega^2-\alpha_1^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2} > \frac{1}{(\omega^2-\alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2}\{ s(\alpha, h) +$$

$$+ e^{6h}(1 + e^{-4h})(1 - e^{-8h}) \} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\frac{\varepsilon^2}{E^2}(1 + e^{4h})(1 - e^{2h}) + \delta^2$$

che può essere sostituita con l'altra

$$(60)\quad \frac{\left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\omega^2}\right) + \frac{4\gamma_2^2}{\omega^2}}{\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\omega^2}\right) + \frac{4\gamma_2^2}{\omega^2}} > \frac{s(\alpha, h) + (1 + e^{-4h})(1 - e^{-8h})e^{6h}}{i(\alpha h)} +$$

$$+ \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\varepsilon^2[(\omega^2-\alpha_2^2)^2 + 4\gamma_2^2\omega^2]}{E^2 i(\alpha, h)}(1 + e^{4h})(e^{2h} - 1)$$

le quali, assieme alla (48), definisce per ogni α un certo dominio di variabilità per i parametri h, ω^2, α_1^2, α_2^2, γ_2^2 certamente non vuoto.

Dunque, supposte soddisfatte le (48), (60) esistono certamente un δ^2 (e quindi un δ_1^2 ed un δ_2^2) ed un y_1 tali che per essi risulti soddisfatta la (54) ed inoltre che sia $y_1''^2 > y_1^2 + \delta_2^2$ in base a (58).

Ciò equivale a dire che supposto soddisfatte le (48), (60) si può determinare una corona circolare R, nel piano π, di raggio interno y_1^2 ed esterno y_2^2 tali che per ogni punto P di questa corona il punto $P'' = \mathcal{T}^{(2)}(P)$ esiste e cade entro una corona R' che ha lo stesso centro ed è tutta interna ad R.

Infatti, ricordando anche le osservazioni fatte più sopra, basta pensare che per ogni fissato τ, y''^2 è funzione crescente di y^2 e che *qualunque sia* τ, per $y^2 = y_1^2$ è $y_1''^2 < y_1^2$ ed ancora *per qualunque* τ e $y^2 = y_2^2$ è $y_2''^2 < y_2^2$. Di qui è facile, ragionando per assurdo dimostrare l'asserto.

Dunque concludiamo intanto con il seguente

LEMMA: *Se i parametri, h, α, ω^2, α_1^2, α_2^2, soddisfano alle condizioni* (48), (60) *è possibile determinare una corona circolare R del piano $(y^2, \omega\tau)$ tale che $\mathcal{T}^2(R)$ è una regione omotopa ad R, concatenata con l'origine, contenuta in una corona circolare R' tutta interna ad R.*

Prima di passare oltre facciamo le seguenti osservazioni che ci saranno utili nel prossimo numero.

OSSERVAZIONE I. - Le condizioni (48), (50) non riguardano T che tramite $h = \gamma_1 T$ ed altresì tramite α in base a (52). Noi possiamo dunque far tendere T all'infinito, facendo tendere γ_1 a zero, in modo tale che il prodotto $\gamma_1 T$ resti costante e che si mantengano costanti assieme a α tutti gli altri parametri.

OSSERVAZIONE II. - Si consideri l'equazione a coefficienti periodici

$$(61) \qquad \ddot{q}_2 + 2\gamma_2 \dot{q}_2 + \alpha(t) q = 0 \quad \begin{cases} \alpha(t) = \alpha_1^2 & 2nT \leq t < (2n+1)T \\ \alpha(t) = \alpha_2^2 & (2n+1)T \leq t < 2(n+1)T \end{cases}$$

ove γ_2, α_1^2, α_2^2 soddisfano alle condizioni (48). I suoi espo-

nenti caratteristici per T sufficientemente elevato (in relazione ad ogni scelta di α_1^2, α_2^2, sono a parte reale negativa [8]).

Quindi le soluzioni dell'equazione

$$\ddot{q}_2 + 2\gamma_2 q_2 + \alpha(t) q_2 = E \operatorname{sen} \omega t \tag{62}$$

sono tutte limitate superiormente con le loro derivate ed anzi per $t \to +\infty$ tendono tutte alla unica soluzione periodica di (62).

---

[8]) Infatti ponendo

$$a) \qquad \tau = \frac{2\pi}{T} t, \quad y(\tau) = q(\tau) e^{\frac{\gamma_2 T}{2\pi}\tau}$$

la (61) diventa

$$b) \qquad y'' + \frac{T^2}{4\pi^2}(\alpha(\tau) - \gamma_2^2) y = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha(\tau) - \gamma_2^2}{4\pi^2} = \nu_1^2 & 0 \leq \tau < \pi \\[2ex] \dfrac{\alpha(\tau) - \gamma_2^2}{4\pi^2} = \nu_2^2 & \pi \leq \tau < 2\pi . \end{cases}$$

Gli esponenti caratteristici e_i sono legati, come è ben noto, alle radicii λ_i dell'equazione

$$c) \qquad \lambda^2 - 2\mathfrak{J}\lambda + 1 = 0$$

ove è (vedi Krall — Meccanica Tecnica delle vibrazioni — Bologna, Zanichelli, 1940, p. I, p. 109)

$$d) \qquad \mathfrak{J} = \cos \pi\nu_1 T \cos \pi\nu_2 T - \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \operatorname{sen} \pi\nu_1 T \operatorname{sen} \pi\nu_2 T,$$

dalla relazione $e_i = \dfrac{1}{2\pi} \lg \lambda_i$.

Siccome la d) porge

$$|\mathfrak{J}| < 1 + \frac{1}{2}\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{\nu_1 \nu_2},$$

ed inoltre

$$|\lambda_i| < \frac{1}{2\pi} \lg |2\mathfrak{J}|,$$

l'eventuale esponente caratteristico positivo di b) non supera il valore, indipendente da T, $\dfrac{1}{2}\pi \lg 2 \left| \dfrac{1 + \nu_1^2 + \nu_2^2}{\nu_1 \nu_2} \right|$ ed esendo $q = y e^{-\frac{\gamma_2 T}{2\pi}}$ risulta senz'altro che per T sufficientemente grande gli esponenti caratteristici di (61) sono a parte reale negativa c. d. d.

In base a queste considerazioni è facile valutare i termini indicati in (46), (41) con $O(e^{-\gamma_2 T})$.

Precisamente fissati che siano α_1^2, α_2^2, γ_2^2, ω^2 soddisfacenti a (48) e fissati inoltre i valori istantanei $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$, si può determinare in corrispondenza ad un ε positivo arbitrario un $T'(\varepsilon)$ tale che per $T > T'$ risulti $|O(e^{-\gamma_2 T})| < \varepsilon$. Questo $T'(\varepsilon)$ dipenderà oltre che da ε dai valori $q_2(\tau)$, $q_2(\tau)$ ma, in base al teorema dimostrato qui sopra, certamente per ogni fissato ε esistono due numeri $\bar{q}_2$, $\dot{\bar{q}}_2$ positivi ed un T^* tali che, in corrispondenza ad una generica soluzione soddisfacente alle condizioni

$$|q_2(\tau)| < \bar{q}_2 \quad , \quad |\dot{q}_2(\tau)| < \dot{\bar{q}}_2 \tag{63}$$

oltre ad essere

$$|O(e^{-\gamma_2 T})| < \varepsilon \tag{64}$$

appena $T > T^*$, è inoltre per ogni n

$$|q_2(\tau + 2nT)| < \bar{q}_2 \quad , \quad |\dot{q}_2(\tau + 2nT)| < \dot{\bar{q}}_2 . \tag{65}$$

7. - Soluzioni oscillatorie isocrone stabili di $\mathcal{C}_1$ nel primo modello.

Per concludere lo studio del primo modello dinamico, consideriamo la trasformazione $\mathcal{T}^*$ che si ottiene dalla $\mathcal{T}$ sostituendo alla (51) la (46) ed alla (50) la (41), sempre supponendo soddisfatte le condizioni (48), (60).

Questa $\mathcal{T}^*$ ed il suo campo di definizione dipende dai valori $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$ attraverso i termini indicati brevemente con $O(e^{-\gamma_2 T})$ in (46), (41), ciò che non succede per la $\mathcal{T}$; comunque però, in base alle considerazioni svolte nella osservazione II del numero precedente, se $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$ soddisfano a (63), per ogni σ arbitrariamente piccolo esiste un T^* dipendente solo da σ, tale che le infinite $\mathcal{T}^*$, costituenti l'insieme I^*, che si hanno in corrispondenza a tutte le possibili scelte di $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$ soddisfacenti a (63), risulta $|\mathcal{T}^*(P) - \mathcal{T}(P)| < \sigma$ per qualunque P di una qualunque regione finita in cui siano entrambe definite.

Denotiamo con $\mathcal{T}^*_{(n)}(P)$ la trasformazione che fa corrispondere al punto P il punto $P^{(n)} \equiv (y^{(n)}, \omega\tau^{(n)})$ ove $y^{(n)}$ è calcolato in base a (46), con le condizioni (41), applicata n volte alle successive coppie tasformate e valutando volta a volta effettivamente i termini indicati in $O(e^{-\gamma_2 T})$ mediante i valori successivamente assunti negli istanti $\tau + 2rT$, $\tau + (2r+1)T$, $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$, dalle funzioni $q_2(t)$, $\dot{q}_2(t)$ soluzione di (62), relativa a certi valori $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$ soddisfacenti a (63).

Poichè la soluzione di (62) considerata dipende dai valori $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$ tale $\mathcal{T}^*_{(n)}$ dipende, come la $\mathcal{T}^*$, da questi valori, ma la $\mathcal{T}^*_{(n)}$ relative a certi valori di $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$, non è la potenza ennesima della $\mathcal{T}^*$ relativa agli stessi valori, perchè la trasformazione $\mathcal{T}^*_{(n,n+1)}$, che fa passare da $\mathcal{T}^*_{(n)}(P)$ a $\mathcal{T}^*_{(n+1)}(P)$, sempre in relazione al valori prefissati di $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$, non coincide con la $\mathcal{T}^*$ relativa agli stessi valori, ma con la $\mathcal{T}^*$ relativa ai valori $q_2(\tau + 2nT)$, $\dot{q}_2(\tau + 2nT)$, che sono generalmente diversi da $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$, calcolati in corrispondenza alla considerata soluzione di (62).

Siccome però in relazione ad una generica soluzione di (62) per $q_2(\tau)$, $\dot{q}_2(\tau)$ soddisfacenti a (63) è anche soddisfatta la (65) così risulta $\mathcal{T}^*_{(n,n+1)} \subset I^*$ e quindi esiste certamente un T^* tale che per $T > T^*$ risulta

$$\left| \mathcal{T}^*_{(2n,\,2(n+1))}(P) - \mathcal{T}^{(2)}(P) \right| < \sigma$$

per ogni punto P di ogni regione finita in cui sono definite ambedue le trasformazioni.

Dunque per $T \to \infty$ e $\gamma_1 \to 0$ in modo tale che il prodotto $\gamma_1 T = h$ resti costante e resti costante, assieme a tutti gli altri parametri, anche α calcolato in base a (52), mentre la regione R resta costante, la generica trasformazione $\mathcal{T}^* < I^*$ tende a $\mathcal{T}$ e tendono a coincidere i loro campi di definizione.

Quindi, poichè è $\mathcal{T}^{(2)}(R) \subset R$, per il lemma del numero precedente, esiste un T^* ed un certo γ_1 tali che per $T > T^*$ e $\gamma_1 < \gamma_1^*$, sarà per qualunque $\mathcal{T}^*$ di I^*, $\mathcal{T}^*_{(2)}(R) \subset R''$, essendo R'' una corona circolare tutta contenuta in R e magari contenente R', e quindi infine, essendo $\mathcal{T}^*_{(2n)}$, prodotto di n trasformazioni tutte del tipo di $\mathcal{T}^*_{(2)}$ per $\mathcal{T}^* \subset I^*$, così risulterà $\mathcal{T}^*_{(2n)}(R) \subset R''$.

È così finalmente provato che per $\alpha \neq 0$ ed $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, se i parametri soddisfano alle condizioni (48) (60), ed inoltre è $T > T^*$ e $\gamma_1 > \gamma_1^*$ la generica trasformazione $\mathcal{T}^*_{(2n)}$ con $\mathcal{T} \subset I^*$, trasforma la regione R facendo corrispondere ai punti del segmento AB (vedi fig. 6) comune ad R ed al generico raggio r uscente da O i punti di un segmento $A^{(n)}B^{(n)}$ appartenenti al segmento CD comune ad R ed al raggio r', che si ottiene da r con una rotazione intorno ad O dell'angolo $4n\omega T$.

Ci si può chiedere come risulterà la regione $\mathcal{T}^*(R)$ per $\mathcal{T}^* \subset I^*$. Essa non sarà in generale contenuta in R ma in una corona circolare $\overline{R}$, in cui poi saranno contenute tutte le $\mathcal{T}^*_{(2n+1)}(R)$, che ha lo stesso centro di R ma che la contiene.

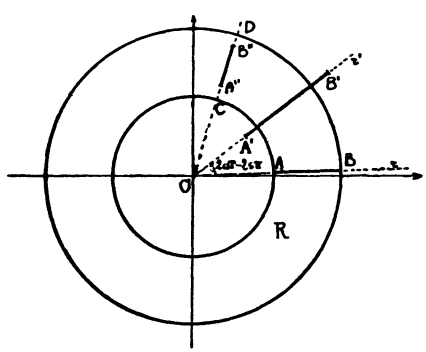

Fig. 6

Sarebbe anche facile determinare i raggi di una tale corona $\overline{R}$ ma per il nostro ragionamento non è essenziale.

Ritornando al sistema dinamico considerato nei paragrafi 2), 3), prendiamo in esame, supposte soddisfatte le ipotesi sotto le quali valgono le considerazioni svolte qui sopra, quell'insieme $\mathcal{J}$ di movimenti in relazione ai quali sono soddisfatte la (34) con τ qualunque, con $y_1^2 \leq y^2 \leq y_2^2$, ed inoltre la (63), avendo in special modo di mira, il movimento di $\mathcal{C}_1$ e quindi per esso la funzione $q_1(t)$.

Richiamando le considerazioni fatte alla fine del n. 5 e le qui sopra rilevate caratteristiche delle trasformazioni $\mathcal{T}^*$, discendono rapidamente le seguenti proprietà per le funzioni $q_1(t)$ relative ad uno generico dei movimenti di $\mathcal{J}$:

a) Le funzioni $q_1(t)$ sono continue e si annullano negli istanti $\tau + 2nT$ con derivata destra e sinistra positive, e negli istanti $\tau+(2n+1)T$ con derivata destra e sinistra negativa.

b) Le $q_1(t)$ hanno, tra due zeri, non solo massimo oppure un solo minimo ed i massimi e minimi sono compresi tra due numeri fissi indipendenti dalle soluzioni considerate.

Per questo tipo di soluzioni noi proponiamo il nome di *soluzioni oscillatorie isocrone.*

Rileviamo che i due numeri di cui si parla nella enunciazione della proprietà b) si calcolano rapidamente in funzione dei raggi di R.

Risulta anche chiarito, sempre in base alle proprietà della $\mathcal{T}^*$ ed alle a) e b), in quale senso dette soluzioni possono dirsi *stabili* e quindi ne risulta il loro interesse concreto.

Per quanto riguarda la condizione necessaria affinchè esistano soluzioni del tipo considerato, ricordiamo quella riguardante il periodo T, condizione che rivela in sostanza la necessità che la frequenza della forza impressa sia più elevato della frequenza delle oscillazioni di $\mathcal{C}_1$.

Inoltre va rilevata la condizione (60), la quale tenuto conto di (48), è tanto meglio soddisfatta quanto più piccolo è h, quanto più grande è E, quanto più α è prossimo a $\frac{\pi}{4}$. Si osservi infine che per $\alpha \to 0$ il dominio nello spazio dei parametri, in cui sono valide tutte le condizioni imposte tende a zero.

Concludiamo prima di passare a trattare il secondo modello con le seguenti osservazoni.

OSSERVAZIONE I. - la condizione $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ che si rivela essenziale per la condizione (60), risulta, nel tipo di schematizzazione da noi adottato, essenziale per un'altra ragione.

Si riscontra infatti, trattando il caso $\alpha = 0$, caso che risulta molto più semplice, l'esistenza di soluzioni periodiche sotto condizioni relativamente semplici per i parametri ma, e questo e essenziale, soltanto quando la fase $\omega\tau$ appartiene a certi intervalli. Infatti da (49), (50), (51), (52) per $\alpha = 0$ si ha che ogni raggio uscente da O è unito nella trasformazione $\mathcal{T}^{(2)}$, mentre sotto opportune condizioni qualitative per i parametri, sui raggi appartenenti a certi angoli γ la $\mathcal{T}^{(2)}$ equivale a una con-

trazione intorno ad un punto U, unito, che non appartiene alla regione finita S delimitata da Γ, invece su qualche altro raggio qualunque successione di punti $P_s = \mathcal{T}^{(2s)}(P)$ finisce per entrare e restare in S.

I punti uniti U sono stabili in senso forte nella direzione del raggio a cui appartengono, ma non lo sono in almeno una direzione eccezionale lungo la quale non si ha contrazione. Sia infatti $U(r)$ l'unico punto unito appartenente al raggio r interno ad un angolo γ e sia l l'arco di curva, i cui estremi cadono su Γ, descritta da U al variare di r in γ. Lungo l la $\mathcal{T}^{(2)}$ equivale all'identità.

In questo modo si prova che non esiste nessun campo D che completamente si contragga in una sua parte. Questa ultima proprietà si trasferisce poi alle $\mathcal{T}^*_{(2)}$ perchè anche in $\mathcal{T}^*_{(2)}$ i raggi uscenti da O sono uniti, in quanto nel passaggio da $\mathcal{T}$ a $\mathcal{T}^*$ la (49) non muta.

È appunto questo fatto che restringe l'interesse di queste soluzioni al campo teorico in quanto non è più lecito ritenere, che queste soluzioni del sistema (15) (16) con le condizioni a) b) c), rappresentino con buona approssimazione soluzioni effettive del sistema dinamico di partenza, come invece succede per le soluzioni oscillatorie isocrone.

Vedremo come nel secondo modello dinamico, trattato nel n. 4, tale caso singolare non ha più luogo.

OSSERVAZIONE II. - L'ipotesi che inizialmente sia $\dot{q}_1 \geq y_1$ comporta, nei riguardi di $\mathcal{C}_1$, che esso sia inizialmente eccitato. Senza questa iniziale eccitazione, $\mathcal{C}_1$ non oscilla.

8. - Risoluzione del problema analitco connesso col secondo modello.

Riprendendo lo studio del sistema dinamico trattato nel paragrafo 4, facciamo le seguenti posizioni

$$
(66) \quad \begin{cases} \gamma_{2i} = \dfrac{\gamma'_{2i}}{\mathfrak{M}}, \quad \dfrac{c_2 r L_i}{\mathfrak{M}} = \alpha_i^2, \quad \mathfrak{M}' = \dfrac{\mathfrak{M}}{m}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad E_0 = \dfrac{c_2}{M}(L_2 - L_1)(2r - L_1 - L_2) \\ \gamma_1 = \dfrac{\gamma_1'}{M}, \quad \dfrac{c_1}{M} = \sigma^2, \quad \mu = \dfrac{m}{M} \end{cases}
$$

Allora le (23) si scrivono, ricordando anche la posizione (27),

$$(23') \begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\gamma_1 q_1 + \sigma^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 \lambda_i^2 + 2\gamma_{2i}\dot{q}_2 + \alpha_i^2 q_2 = \mathfrak{M}' \operatorname{sen} \omega t. \quad (i=1,\ q_1<0\ ;\ i=2,\ q_1>0). \end{cases}$$

Dall'integrale generale di (23') si ottiene la soluzione (33) soddisfacente alle condizioni (34), sempre che sia soddisfatta la (31). Si ha ancora inoltre la (35).

Supposto poi $\alpha_i^2\lambda_i^2 - \gamma_{2i}^2 > 0$, dall'integrale generale di $(23_2')$ si ha

$$(67) \quad \begin{cases} q_{2i}^2(t) = \dfrac{\mathfrak{M}'^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \theta_i)}{(\lambda_i^2\omega^2 - \alpha_i^2) + 4_{2i}^2\omega^2} + O(e^{-\gamma_{2i}t}) \\ \dot{q}_{2i}(t) = \dfrac{\mathfrak{M}'^2\omega^2 \cos^2(\omega t - \theta_i)}{(\lambda_i^2\omega^2 - \alpha_i^2) + 4\gamma_{2i}\omega^2} + O(e^{-\gamma_{2i}t}) \end{cases}$$

ove poichè non ne avremo bisogno in seguito non esplicite-remo ne θ_i ne i termini indicati con $O(e^{-\gamma_{2i}t})$, volendo solamente con questi simboli rilevare la proprietà dell'integrale generale di una equazione lineare del tipo $(23_2')$.

In relazione alla soluzione (33) nell'intervallo $(\tau,\ \tau + T)$ risulta $q_1 > 0$. Si consideri ora la soluzione di $(23_2')$ ove (essendo $q_1 > 0$ nell'intervallo $(\tau,\ \tau + T)$) si scelga $i = 2$, soddisfacente a condizioni iniziali $q_2(\tau) = q_2^0$, $\dot{q}_2(\tau + 0) = \dot{q}_2^0$.

nell'istante $\tau + T$ possiamo scrivere

$$(67') \quad \begin{cases} q_2^{-2}(\tau + T) = q_{22}^2 = \dfrac{\mathfrak{M}'^2 \operatorname{sen}^2[(\omega(\tau + T) - \theta_1]}{(\lambda_2^2\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_{22}^2\omega^2} + O(e^{-\gamma_{22}T}) \\ \dot{q}_2^{-2}(\tau + T) = \dot{q}_{22}^2 = \dfrac{\mathfrak{M}'^2\omega^2 \cos^2[(\omega(\tau + T) - \theta_2]}{(\lambda_2^2\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_{22}^2\omega^2} + O(e^{-\gamma_{22}T}) \end{cases}$$

ove, per prefissati q_2^0, $\dot{q}_2^0$ i termini indicati con $O(e^{-\gamma_{22}T})$ tendono a zero per $T \to +\infty$ come $e^{-\gamma_{22}T}$.

Nell'istante $\tau + T$ supposta soddisfatta la (30), che ora si scrive,

$$(68) \qquad y^2 e^{-\gamma_1 T} > E_0 - \mu \dot{q}_{22}^2 \lambda_2^4 \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) - \mu q_{22}^2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$$

si ha

$$(69)\qquad \dot{q}_2^{+2} = y^2 e^{-\gamma_1 T} + \mu \dot{q}_{22}^2 \lambda_2^4 \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) + \mu q_{22}^2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2, \; - E_0 .$$

Nell'istante $\tau + 2T$ si ha $q_1(\tau + 2T) = 0$ e

$$(70)\qquad \dot{q}_1^{-2}(\tau + 2T) = y^2 e^{-4\gamma_1 T} +$$

$$+ \left\{ \mu \dot{q}_{22}^2 \lambda_2^4 \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) + \mu q_{22}^2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \right\} e^{-2\gamma_1 T}.$$

In base alle condizioni a) e b), e per questo alla $(26_2')$ si determini ora la funzione $q_2(t)$, nell'intervallo $(\tau + T, \tau + 2T)$, tenendo conto che in questo intervallo risulta $q_1 < 0$ e si ponga ancora

$$(71)\qquad \begin{cases} q_2^{-2}(\tau + 2T) = q_{21}^2 = \dfrac{\mathfrak{M}'^2 \operatorname{sen}^2 [\omega(\tau + 2T) - \theta_1]}{(\lambda_1^2 \omega^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\gamma_{21}^2 \omega^2} + O(e^{-\gamma_1 T}) \\ \dot{q}_2^{-2}(\tau + 2T) = \dot{q}_{21}^2 = \dfrac{\mathfrak{M}'^2 \omega^2 \cos^2 [\omega(\tau + 2T) - \theta_1]}{(\lambda_1^2 \omega^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\gamma_{21}^2 \omega^2} + O(e^{-\gamma_1 T}). \end{cases}$$

Supposta soddisfatta la (28) nell'istante $\tau + 2T$ tenuto conto di (70) e (71), (67') si ha infine

$$(72)\qquad y'^2 = \dot{q}_1^{+2}(\tau + 2T) = y^2 e^{-4\gamma_1 T} + \left\{ \mu \dot{q}_{22}^2 \lambda_2^4 \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \mu q_{22}^2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) - E_0 \right\} e^{-2\gamma_1 T} + E_0 - \mu \dot{q}_{21}^2 \lambda_1^4 \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) - \mu \dot{q}_{21}^2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2).$$

Per questo riguardo la q_2, nell'istante $\tau + 2T$, $\dot{q}_2$ subisce una variazione regolata da (26'). Dall'istante $\tau + 2T$ all'istante $\tau + 4T$ si ripete il processo di determinazione di $q_1(t)$, $q_2(t)$.

OSSERVAZIONE. - In base alle considerazioni fatte qui sopra e tenendo conto delle condizioni a), b) date alla fine del n. 4, la funzione $q_2(t)$ è una soluzione continua della seguente equazione lineare a tratti.

$$(73)\qquad \ddot{q}_2 \lambda_i^2 + 2\gamma_{2i} \dot{q}_2 + \alpha_i^2 q_2 = \mathfrak{M}' \operatorname{sen} \omega t$$

$$\begin{cases} i = 1 \quad \tau + (2n + 1)T < t < \tau + 2(n + 1)T \\ i = 2 \quad \tau + 2nT < t < \tau + (2n + 1)T \end{cases}$$

che soddisfa inoltre alle seguenti condizioni

$$(74)\qquad \begin{cases} \dot{q}_2^+(\tau + 2nT) = \dot{q}_2^-(\tau + 2nT)\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \\ \dot{q}_2^+[\tau + (2n+1)T] = \dot{q}_2^-[\tau + (2n+1)T]\dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \end{cases} \qquad (\lambda_1^2 > \lambda_2^2).$$

È fondamentale per il seguito il seguente teorema di stabilità. Se T è sufficientemente elevato si può determinare un numero M positivo ed un numero k pure positivo, tali che per ogni soluzione soddisfacente alle condizioni

$$(75)\qquad q_2^{+2}(\tau) + \dot{q}_2^{+2}(\tau) < M^2,$$

è per ogni $t > \tau$ e per qualunque n

$$(75')\qquad q_2^2(t) + \dot{q}_2^2(t) < kM^2, \quad q_2^2(\tau + 2nT) + \dot{q}_2^2(\tau + 2nT) < M^2$$

qualunque sia τ.

Si consideri infatti la seguente equazione

$$(76)\qquad \ddot{q}_2\lambda_1^2 + 2\gamma_{2i}\dot{q}_2 + \alpha_i^2 q = \mathfrak{M}' \operatorname{sen} \omega t$$

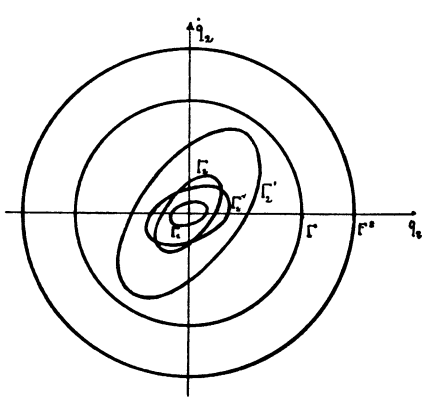

Fig. 7

e sul piano delle fasi q_2, $\dot{q}_2$ il ciclo Γ_i che rappresenta la soluzione q_{2i}^* limite di ogni altra di (76), per $t \to +\infty$. Sia inoltre Γ_i' il ciclo omotetico di Γ_i rispetto all'origine nel rapporto di omotetia uguale a 2 (vedi fig. 7).

Sia Γ il minimo cerchio con centro nell'origine il cui raggio denoteremo con R, che contiene ambedue i Γ_i', e Γ^* il cerchio di raggio $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} R$. Denoteremo con S_Γ, $S_{\Gamma_i'}$, S_{Γ^*} le regioni finite del piano delimitate dalla curva chiusa Γ e rispettivamente Γ_i' e Γ^*.

Consideriamo la generica soluzione di (76) soddisfacente a (75), per τ generico ed $M = M^* = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} R$. Sia $P(t)$ il punto che descrive la traiettoria corrispondente. Per le proprietà di cui godono le soluzioni di (76) esisterà un T_i^* tale che per $t > \tau + T_i^*$ e, si noti bene, per τ generico, $P(t)$ appartiene a $S_{\Gamma_i'}$. Sia poi T^* il maggiore dei due T_i^*.

Torniamo ora a considerare l'equazione lineare a tratti (73), (74) ove però supponiamo $T > T^*$ e consideriamo una sua soluzione $P(t) \equiv (q_2(t), \dot{q}_2(t))$ soddisfacente alle condizioni $P(\tau) = Q_0 \subset S_{\Gamma^*}$. Denotiamo inoltre con $\gamma_{(Q_0,\tau)}$ la traiettoria descritta da $P(t)$. Poichè $Q_0 \subset S_\Gamma$ si ha $P(\tau + T) \subset S_{\Gamma_2}$, e quindi $P^-(\tau + T) \subset S_\Gamma$.

Nell'istante $\tau + T$ il punto $P(t)$ passa dal punto $P^-(\tau + T)$ al punto $P^+(\tau + T)$ descrivendo un segmento parallelo all'asse $\dot{q}_2$ e poichè è $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} < 1$, è $P^+(\tau + T) \subset S_\Gamma$. Nel successivo intervallo $(\tau + T, \tau + 2T)$, anche se P esce da S_Γ esso finisce per rientrare in $S_{\Gamma_1'}$, in modo che $P^-(\tau + 2T)$ è ancora in $S_{\Gamma_1'}$ e quindi in S_Γ. Il passaggio da $P^-(\tau + 2T)$ a $P^+(\tau + 2T)$ è regolato da (74_1), ed essendo per costruzione $M^* = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} R$, sarà $P^+(\tau + 2T) \subset S_{\Gamma^*}$. Da questo istante si può ripetere il ragionamento, assumendo $\tau = \tau + 2T$ e $Q_0 = P^+(\tau + 2T)$, ricordando che tutte le regioni S sono indipendenti da τ, e dal punto Q_0 purchè $Q_0 \subset S_{\Gamma^*}$. Così si vede che $P^+(\tau + 2nT) \subset S_{\Gamma^*}$ e $P^+(\tau + (2n+1)T) \subset S_\Gamma$ per ogni n interno positivo.

Denoteremo con $\gamma^{Q_0}_{(\tau,\tau+2T)}$ l'arco di $\gamma_{(Q_0,\tau)}$ che va da Q_0 a $P^+(\tau + 2T)$ e con $\mathfrak{J}$ l'insieme degli archi suddetti al variare di Q_0 in S_{Γ^*} e di τ nell'intervallo $0, \frac{2\pi}{\omega}$. Si noti ora che

$\gamma^{Q_0}_{(\tau,\tau+2T)} \equiv \gamma^{Q_0}_{\left(\tau+\frac{2n\pi}{\omega},\,\tau+\frac{2n\pi}{\omega}+2T\right)}$ (n intero) e quindi ogni $\gamma_{(Q_0,\tau)}$ è formato da una successione di archi di $\mathfrak{J}$.

Ora gli archi di $\mathfrak{J}$ costituiscono un insieme di archi del piano rinchiudibili in un cerchio $\overline{\Gamma}$ di centro l'origine e raggio kM^* con k opportuno e quindi tutta la $\gamma_{(Q_0,\tau)}$, per $Q_0 < S_{\Gamma^*}$ e τ generico, è contenuto in questo $\overline{\Gamma}$. Ciò completa la dimostrazione.

9. - Studio di una particolare corrispondenza.

Si consideri dapprima la corrispondenza $\mathfrak{C}'$ tra le coppie (y, τ) e (y', τ') di equazioni

$$(77)\qquad \begin{cases} \tau' = \tau + 2T \\ y'^2 = y^2 e^{-4\eta T} + \end{cases}$$

$$+ \frac{\mu\mathfrak{M}'^2 e^{-2\eta T}}{(\lambda_2^2\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_{22}^2\omega^2} \left\{ \lambda_2^4\omega^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \operatorname{sen}^2[\omega(\tau + T) - \theta_2] + \right.$$

$$\left. + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\cos^2[\omega(\tau + T) - \theta_2] \right\} -$$

$$- \frac{\mu\mathfrak{M}'^2}{(\lambda_1^2\omega^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\gamma_{21}^2\omega^2} \left\{ \lambda_1^4\omega^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \operatorname{sen}^2[\omega(\tau + 2T) - \theta_1] + \right.$$

$$\left. + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\cos^2[\omega(\tau + 2T) - \theta_1] \right\} + E_0(1 - e^{-2\eta T}).$$

Questa corrispondenza si intende definita per le coppie (y, τ) che soddisfano alla seguente disuguaglianza

$$(78)\qquad y^2 > e^{2\eta T}\left\{ E_0 - \frac{\mu\mathfrak{M}'^2}{(\lambda_2^2\omega^2 - \alpha_2^2) + 4\gamma_{22}^2\omega^2} \left[\lambda_2^4\omega^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \operatorname{sen}^2[\omega(\tau + T) - \theta_2] + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\cos^2[\omega(\tau + T) - \theta_2] \right] \right\}$$

ed ovviamente alla ulteriore, che si ottiene imponendo che il secondo membro di (77_2) sia positivo.

Da (77_2) si ottiene subito che y'^2, per ogni fissato τ e nel campo in cui è definita la corrispondenza, cresce al crescere di y^2 e che per y^2 sufficientemente elevato e per τ qualunque risulta senz'altro $y'^2 < y^2 - \delta_0^2$. Basta infatti assumere per y^2

un valore maggiore di y_2^2 dato dalla

$$y_2^2 = \frac{H^2 + \delta_2^2}{1 - e^{-4\eta T}} \tag{79}$$

ove con H^2 si è indicato il massimo della somma degli ultimi tre termini del secondo membro di (77_2), se questo massimo è positivo; altrimenti basta assumere $y_2 = 0$.

Vogliamo ora dare una condizione sufficiente perchè, esista un y_1 ed un δ_1^2 tali che per τ qualunque e per $y^2 = y_1^2$ sia $y_1'^2 > y_1^2 + \delta_2^2$.

Supponiamo, per ora, che sia

$$\lambda_2^4\omega^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \geq \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \tag{80}$$

che comporta di conseguenza anche l'altra (essendo $\lambda_1^2 > \lambda_2^2$)

$$\lambda_1^4\omega^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \geq \alpha_2^2 - \alpha_1^2. \tag{81}$$

Allora perchè sia soddisfatta la (78), per un certo y_1 e per qualunque τ, basta che sia soddisfatta la seguente disuguaglianza [9])

$$y_1^2 > e^{2\eta T}\left\{E_0 - \mu\frac{\mathfrak{M}'^2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{(\lambda_2^2\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_{22}^2\omega^2}\right\} \tag{82}$$

la quale è ovviamente verificata per ogni y_1^2, oltre che per qualunque τ, se si ha

$$\mathfrak{M}'^2 > \frac{E_0}{\mu(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}[(\lambda_2^2\omega^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\gamma_{22}^2\omega^2]. \tag{83}$$

Notiamo che nel secondo membro non compare il parametro $\mathfrak{M}'$, e quindi per la (66) il parametro $\mathfrak{M}$, onde la (83) può essere interpretata come una condizione sull'ampiezza della sollecitazione sinusoidale esterna.

Supposte quindi soddisfatte le (80), (81), (83) perchè esista un y_1^2 tale che $y_1'^2 > y_1^2$ qualunque sia τ, tenuta presente la (77_2) e l'osservazione fatta in nota [9]), occorre e basta che sia, al-

---

[9]) E' quasi superfluo osservare che il massimo ed il minimo di una espressione del tipo $a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x$ coincide con il più grande ed il più piccolo dei due numeri a^2, b^2.

meno per qualche δ_1^2,

$$(84)\qquad (1-e^{-4h})y_1^2 < \mu\,\mathfrak{M}'^2 \left\{ \frac{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)e^{-2h}}{(\lambda_2^2\omega^2-\alpha_2^2)^2+4\gamma_{22}^2\omega^2} - \frac{\lambda_1^4\omega^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)}{(\lambda_1^2\omega^2-\alpha_1^2)^2+4\gamma_{21}^2\omega^2} \right\} + E_0(1-e^{-2h}) + \delta_1^2$$

ove si è posto $h=\gamma_1 T$.

Se ora supponiamo che sia

$$(85)\qquad \frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{(\lambda_2^2\omega^2-\alpha_2^2)^2+4\gamma_{22}^2\omega^2} > \frac{\lambda_1^4\omega^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)}{(\lambda_1^2\omega^2-\alpha_1^2)^2+4\gamma_{21}^2\omega^2}$$

la (84) è certamente risolubile in y_1^2 per qualche δ_1^2 appena h sia sufficientemente piccolo.

Notiamo che nella (85) non compare $\mathfrak{M}'$ e quindi (vedi 66) $\mathfrak{M}$, e che in (80), (83), (85), non compare il parametro h; basterà quindi mostrare che le (80) e (85) non sono incompatibili tra loro perchè, per h sufficientemente piccolo ed $|\mathfrak{M}'|$ opportunamente grande, risultino soddisfatte anche le (83) e (84).

Tenuto conto che ω^2 è un parametro indipendente dagli altri, se riusciamo a provare che per

$$(86)\qquad \omega^2 = \frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\lambda_1^4\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_2^2}\right)}$$

la (85) non è assurda, risulterà provato l'asserto.

Sostituendo dunque (86) in (85), questa diventa

$$(87)\qquad \frac{[\lambda_1^4(\alpha_2^2-\alpha_1^2)-\alpha_1^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_2^2]^2+4\gamma_{21}^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{[\lambda_2^4(\alpha_2^2-\alpha_1^2)-\alpha_2^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_1^2]^2+4\gamma_{22}^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} > \frac{\lambda_1^4}{\lambda_2^2}.$$

Dovremo tener presenti ora la (27), le (66), le condizioni $\alpha_i^2\lambda_i^2 > \gamma_{2i}^2$, la $L_2 > L_1$ che comporta $\lambda_1^2 > \lambda_2^2$ e $\alpha_2^2 > \alpha_1^2$. Infine tenendo presente che γ_2, si può supporre crescente col momento d'inerzia di $\mathfrak{C}_2$ rispetto ad a possiamo porre, in

base a (27), $\gamma_{2i} = \nu\lambda_i^2$. La (87) posto $m = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} > 1$ e $k = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} < 1$ diventa

$$(88) \qquad k^2[(m^2 + m - 1)^2 - m^2] - \\ - 4m^2(m^2 - 1)k + m^3(m - 1)(2 - m^2 + m) > 0$$

che è soddisfatta, pe esempio, per

$$(89) \qquad 1 < m < 2\,0\,, \quad < k < \frac{m(2 - m^2 + m)}{4(m + 1)}\,.$$

Ciò prova l'esistenza del valore richiesto $y_1{}^2$ di y^2.

10 - Soluzioni oscillatorie isocrone stabili nel secondo modello.

Si ragioni ora, come abbiamo fatto nel n. 6, nel piano π in cui y^2 e $\omega\tau$ siano raggio vettore ed anomalia di un generico punto P. Supposte soddisfatte tutte le condizioni che assicurano l'esistenza di un y_1^2, che gode della proprietà sopra accennata, la legge di corrispondenza $\mathfrak{C}'$ espressa dalle formule (77), associa ad ogni punto $P = (y^2, \omega\tau)$ della corona R di raggi y_1^2, y_2^2 un punto P appartenente ad una corona R' tutta interna ad R. Denoteremo con $\mathfrak{T}$ questa trasformazione piana. Si ha che essa fa corrispondere ai punti del segmento AB comune ad R e ad un raggio r uscente da O i punti di un segmento $A'B'$ appartenente al segmento CD che il raggio r', ottenuto da r mediante una rotazione di $2\omega T$ in verso antiorario, ha in comune con r.

Osserviamo ora, anche qui come nella osservazione I. del n. 6, che l'esistenza della regione R è assicurata da condizioni che non involgono il parametro T che attraverso il parametro $h = \gamma_1 T$.

Premesso ciò si definiscano, come nel n. 7, le $\mathfrak{T}^*_{(n)}(P)$ sostituendo alla (77_2) la (72) e, come nel n. 7, si ragioni su di esse confrontandole con le $\mathfrak{T}^{(n)}$. Tenuto conto del teorema di stabilità, per la generica soluzione $q_2(t)$ di (73), con la condizione (74), soddisfacente alla (75), si ha che in ogni $\mathfrak{T}^*_{(n)}$ come in $\mathfrak{T}^{(n)}$ per T sufficientemente elevato e γ_1 suffi-

cientemente piccolo è $\mathcal{T}^*_{(n)}(R) \subset R''$ ove R'' è tutta interna ad R.

Risulta così provato che sotto le condizioni sopra esposte il sistema $\mathcal{C}_1$, in corrispondenza a condizioni iniziali per cui risulti: $q_1(\tau) = 0$ e $\dot{q}_1(\tau) = \dot{q}_1^0$ $(0 < y_1 < \dot{q}_1^0 < y_2)$; ed inoltre $\dot{q}_2(\tau)$, $q_2(\tau)$ soddisfacenti a (75) e τ qualunque, si muove *compiendo oscillazione isocrone stabili* ed, a differenza del caso precedente, ciò avviene qualunque sia la relazione intercedente fra la frequenza della forza impressa e la frequenza di $\mathcal{C}_1$ senza nessuna eccezione.

OSSERVAZIONE I. - Le condizioni $\gamma_{2i} = \nu\lambda_i^2$, le $\alpha_i^2\lambda_i^2 < \gamma_{2i}^2$ e le (89) sono condizioni strutturali per il sistema dinamico; la condizione (80) si può riguardare come una condizione sulla frequenza della forza impressa e la (83) come una condizione sulla sua ampiezza; è necessario che esse siano sufficientemente elevate. Queste condizioni assieme a quella che richiede che T sia sufficientemente grande e γ_1 sufficientemente piccolo, bastano ad assicurare l'esistenza di questa classe di soluzioni.

OSSERVAZIONE II. - Per avere un'idea più chiara del moto di $\mathcal{C}_1$ nel secondo meccanismo può essere utile studiare ancora più a fondo la trasformazione $\mathcal{T}$, della regione R del piano π, di equazioni (77).

Per quello che a noi qui serve scriveremo le equazioni di questa trasformazione sotto la forma

$$(90) \qquad \begin{cases} \omega\tau' = \omega\tau + 2\omega T \\ y'^2 = \alpha y^2 + f(\omega\tau) \end{cases}$$

ove è $0 < \alpha < 1$, ed $f(\omega\tau)$ è periodica di periodo π (e quindi anche di periodo 2π). Inoltre si sa che per $y_1^2 \leq y^2 \leq y_2^2$ e qualunque sia τ è $y_1^2 < y'^2 < y_2^2$.

Si consideri una generica curva chiusa γ di equazione $y^2 = \varphi(\omega\tau)$ con $\varphi(\omega\tau)$ continua con tutte le derivate come lo è la $f(\omega\tau)$, e periodiche di periodo 2π, e tale che $y_1^2 \leq \varphi(\omega\tau) \leq y_2^2$.

Applicando il noto teorema di contrazione di Caccioppoli alla equazione funzionale

$$\varphi(\omega\tau + 2\omega T) = \alpha\varphi(\omega\tau) + f(\omega\tau)$$

nello spazio delle funzioni φ soddisfacenti alle condizioni suesposte, si dimostra esistere una ed una sola curva chiusa γ^* unita in $\mathcal{T}$. Ogni altra curva chiusa tende nelle successive trasformazioni a γ^*.

Se $2\omega T$ è commensurabile con 2π una opportuna potenza di $\mathcal{T}$ coincide con l'indentità, altrimenti la successione $\mathcal{T}^n(P)$ se P è un punto di γ^*, è un insieme ovunque denso su γ^*.

Se si considera la successione $\mathcal{T}^n(P)$ essendo P un punto di R non appartenente a γ si ha che o $\mathcal{T}^n(P)$ tende per $n \to \infty$ ad un punto unito di γ^* (caso che $\frac{\omega T}{\pi}$ sia razionale) oppure la successione $\mathcal{T}^n(P)$ tende a confondersi con una successione $\mathcal{T}^n(P)$ relativa ad un punto P di γ^*.

Ciò vuol dire, nei riguardi del moto di $\mathcal{C}_1$, che, a meno dei termini trascurati in $O(e^{-nT})$, un generico movimento di $\mathcal{C}_1$ corrisponde alle condizioni iniziali accennate più sopra o è periodico o è quasi periodico o infine tende ad un movimento di questo tipo.

11. - Osservazioni conclusive.

Finiremo con qualche osservazione di raffronto tra il meccanismo di alimentazione nei modelli puramente meccanici che abbiamo ora studiato e quello relativo ai modelli misti di Bethenod ed Hartley.

Nel sistema di Bethenod l'alimentazione del sistema meccanico vibrante viene spiegata dal prof. Minorsky [10]) come un tipo di *azione parametrica*. Con opportuni accorgimenti di calcolo e trascurando i termini di disturbo si riduce sostanzialmente l'azione del sistema elettrico oscillante S_E sul sistema meccanico S_M a quello di mutare periodicamente, con il periodo doppio di quello proprio di S_M, la capacità di S_M. Per un tale tipo di alimentazione si rivela essenziale la presenza di un circuito filtro che assorba quella parte, della corrente che lo percorre, che, dotata di una certa frequenza, avrebbe un effetto frenante sul sistema meccanico vibrante.

---

10) Vedi lavoro citato in 8).

Nel meccanismo considerato da noi (ci riferiamo per maggior semplicità al secondo modello) si tratta invece di una alimentazione che per certi riguardi richiama il tipo di alimentazione ordinariamente usato, per esempio, nei vari tipi di orologi meccanici a pendolo o a bilanciere, con la differenza che, mentre in questi ultimi la forza esterna che agisce in certi istanti è costante, nel nostro meccanismo varia sinusoidalmente.

A prima vista sembrerebbe impossibile pretendere che qualunque sia la relazione tra il periodo del sistema da alimentare e quello della forza alimentatrice si possa conseguire l'effetto desiderato. Nel nostro caso succede che accoppiando $\mathcal{C}_1$ con $\mathcal{C}_2$ mediante un accoppiamento non-lineare di capacità e di inerzia si può trasferire, dimensionando opportunamente il sistema, energia a $\mathcal{C}_1$ per tramite di $\mathcal{C}_2$.

Sostanzialmente si può dire che il meccanismo di alimentazione avviene nella seguente maniera:

Mentre $\mathcal{C}_1$ si trova da una banda delle posizioni di equilibrio la capacità e l'inerzia di $\mathcal{C}_2$ hanno un valore tale da porre $\mathcal{C}_2$ in condizioni prossime a quelle di risonanza con la forza esterna. Quando $\mathcal{C}_1$ si trova dall'altra banda rispetto ad O, $\mathcal{C}_2$ è invece lontano da queste condizioni.

Gli scambi di energia tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ avvengono nel passaggio di $\mathcal{C}_1$ per O. Quando $\mathcal{C}_1$ passa per O in un certo verso è $\mathcal{C}_1$ che fornisce energia a $\mathcal{C}_2$, quando passa nel verso opposto invece ne riceve. Poichè la quantità di energia che si scambiano $\mathcal{C}_1$ con $\mathcal{C}_2$ dipende anche dalle condizioni istantanee di moto di $\mathcal{C}_2$ (che per la ragione sopra esposta sono diverse a secondo che il passaggio avviene in un verso o nell'altro) si può fare in modo, dimensionando opportunamente il sistema che l'energia erogata da $\mathcal{C}_1$ sia sempre minore di quella che egli riceve nel successivo passaggio per O. Così si riintroduce in $\mathcal{C}_1$ l'energia dissipata dalla resistenza del mezzo.

Finiremo rilevando che in questo sistema dinamico non si rivela necessaria la presenza di sistemi vibranti che abbiano l'ufficio di filtri come invece succede nel sistema di Bethenod.