RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCIO LOMBARDO-RADICE

Su alcuni caratteri dei piani grafici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 312-345

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__312_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SU ALCUNI CARATTERI DEI PIANI GRAFICI

Nota (*) *di* LUCIO LOMBARDO-RADICE (*a Roma*)

PREMESSA — A partire dalla fondamentale memoria [1] di MARSHALL HALL, comparsa nel 1943, le ricerche sui piani grafici (o proiettivi) si sono moltiplicate, e molti significativi risultati nuovi sono stati aggiunti a quelli ormai classici di Hilbert, Veblen, Wedderburn, Moufang ecc. Il fatto è che HALL ha dato, con le sue coordinate generali (anello ternario di HALL), un efficacissimo strumento di ricerca algebrico-geometrico, la cui fecondità crediamo sia ancor lungi dall'essere esaurita.

A quanto ci risulta, una assai minore attenzione è stata rivolta dai ricercatori alla prima metà della memoria di HALL, e precisamente alla costruzione (« stadiale ») dei piani liberi P^n a partire da un « n-punto libero » ($n \geq 4$). Ora, l'idea generale della presente ricerca consiste appunto nella istituzione di un sistematico « confronto » tra un piano libero P^n e un piano grafico, qualsiasi, P. Nello sviluppare questa idea, abbiamo trovato opportuno introdurre il concetto, che crediamo almeno in una certa misura nuovo, sia pure nella sua forma, di « proposizione configurazionale su P^n », al quale è dedicato il n. 2 (il n. 1 è invece un riassunto di alcuni paragrafi della citata memoria di HALL, per comodità del lettore). Il n. 3 illustra con costruzioni ed esempi il concetto introdotto in 2; crediamo tuttavia che alcuni dei risultati esposti in 3, possano avere interesse anche di per sè presi.

(*) Pervenuta in Redazione il 6 Maggio 1955.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Roma.

Nel n. 4, infine, vengono introdotti dei caratteri di un piano grafico P, che non ci risulta siano stati finora presi in esame: il suo k-mo « grado di libertà », inferiore e superiore ($k \geq 1$). Rimandando al testo per una definizione precisa, diremo, in sede di premessa, che si tratta, nel primo caso (gradi di libertà inferiori) di studiare i piani parziali di P isomorfi a uno stadio del piano libero P^n; nel secondo (gradi di libertà superiori) di studiare i piani parziali di P isomorfi a piani parziali « completi » contenuti in una stadio di P^n, e tali che tra i loro punti, in P, siano soddisfatti solo allineamenti « liberi » (il significato da noi dato al termine « completo » è almeno formalmente diverso dall'analogo termine usato da HALL).

In quest'ultima parte, segnaliamo al lettore due risultati particolari. Il primo dice che in un piano nel quale sia universale il teorema « $3 = 0$ » è universale anche D_8, e ogni quaterna di punti tre a tre non allineati genera un piano isomorfo al piano lineare su $GF(3)$. Tale risultato è un pò marginale nella presente ricerca; è stato da noi ripreso in una apposita ricerca sui piani a « caratteristica 3 » (cioè nei quali il teorema grafico « $3 = 0$ » è universale), in corso di pubblicazione (v. Bibliografia, [8]). Il secondo risultato lega la caratteristica p (carattere *algebrico*) di un piano lineare su di un corpo con il suo 1° grado di libertà superiore G, che è invece un carattere *grafico* (geometrico), mediante la formula:

$$p = (G + 2)/2$$

e consente con ciò di estendere la nozione di caratteristica ad un piano grafico qualsiasi, lineare o no.

Su alcune questioni che i concetti e i risultati esposti nel presente lavoro sollevano in modo naturale è esplicitamente fermata l'attenzione del lettore; esse potranno essere oggetto di successive ricerche. Le idee fondamentali del presente studio erano state esposte oralmente il 21 dicembre del 1954 a Padova nel Convegno di geometria, dedicato alla memoria di Giuseppe Veronese, promosso dall'Università di Padova.

1. - *Il piano libero P^n di* HALL *generato da un n-punto libero* $(n \geq 4)$.

Nella prima parte della sua fondamentale memoria del 1943 ([1], pagg. 242) MARSHALL HALL chiama n-punto libero (« free n-point ») la configurazione S_1^n costituita da due rette L_1 ed L_2 e da n punti distinti $(n \geq 4)$, dei quali i primi due, A_1 e A_2, appartengono a L_1 (e non a L_2), i rimanenti $(n-2)$: $A_3, \ldots, A_n$, appartengono a L_2 (e non a L_1). I « punti » $A_1, \ldots, A_n$ sono elementi di natura qualsiasi, e così le « rette » L_1, L_2. Tra punti e rette esiste soltanto una relazione astratta di incidenza (« appartenere a... »). Più punti appartenenti a una medesima retta si dicono allineati e si esprime il loro allineamento scrivendoli successivamente su di una medesima linea, preceduti dal simbolo della retta che li contiene tutti.

La configurazione $S_1^n = P_1^n$ si può allora rappresentare simbolicamente con lo schema:

$$S_1^n = P_1^n \begin{cases} L_1 : A_1A_2 \\ L_2 : A_3A_4 \ldots A_n . \end{cases}$$

Aggiungiamo ora, alla S_1^n, $2(n-2)$ nuove rette $L_{i,j}$ $(i = 1, 2;\ j = 3, \ldots, n)$, definite come le congiungenti il punto A_i di L_1 con il punto A_j di L_2 (degli n punti iniziali, $L_{i,j}$ contiene soltanto A_i e A_j; $L_{i,j}$ è distinta da $L_{h,k}$ quando sia $i \neq h$ oppure $j \neq k$). Si otterrà un nuova configurazione (o piano parziale [1])) $S_2^n = R_1^n$, rappresentata simbolicamente dal seguente quadro:

$$S_2^n = R_1^n \begin{cases} L_1 : A_1A_2 \\ L_2 : A_3 \ldots A_n \\ L_{1,3} : A_1A_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_{2,n} : A_2A_n \end{cases}$$

---

[1]) Ora, e nel seguito, per « configurazione » o « piano parziale » si intenderà un insieme di punti e di rette tale che 2 rette hanno *al più* un punto a comune, mentre due punti appartengono ad una retta *al più*.

Si chiami poi $S_3^n = P_2^n$ la configurazione che si ottiene da S_2^n introducendo un nuovo punto A in corrispondenza ad ogni coppia L, L' di rette di S_2^n prive di punto in comune in S_2^n; A è con ciò il simbolo di un punto che gode della *sola* proprietà di appartenere tanto alla L quanto alla L'. $S_3^n = P_2^n$ è con ciò una configurazione chiusa rispetto alla intersezione di rette (due rette di P_2^n hanno per costruzione uno ed un solo punto in comune), ma *aperta* rispetto alla operazione di unione di punti mediante rette (vi sono coppie di punti di S_3^n, per $n \geq 4$, non congiunti da una retta in S_3^n).

Possiamo ora definire induttivamente le configurazioni (piani parziali) $S_{2k}^n = R_h^n$ e $S_{2k+1}^n = P_{k+1}^n$, $(k > 0)$, al seguente modo:

$S_{2k}^n = R_k^n$ si ottiene da $S_{2k-1}^n = P_k$ aggiungendo (simbolicamente) le rette congiungenti due punti di S_{2k-1}^n privi di congiungente in S_{2k-1}^n, e facendo l'ipotesi che le rette così aggiunte siano tutte distinte tra di loro e delle precedenti;

$S_{2k+1}^n = P_{k+1}^n$ $(k > 0)$ si ottiene da S_{2k}^n aggiungendo simbolicamente i punti di incontro di due rette di S_{2k}^n, prive di intersezione in S_{2k}^n, e facendo l'ipotesi che i punti che così si aggiungono siano distinti tra di loro e dai punti già esistenti.

In P_k^n $(k > 0)$, prese comunque due rette distinte, esse hanno in comune un punto (ed uno soltanto); non tutte le coppie di punti distinti possiedono però una retta che li congiunge. In R_k^n si verifica invece la situazione inversa. S_h^n, se $n \geq 4$, sia per h pari che per h dispari è un piano parziale aperto (nel senso di HALL: non ogni punto è incidente con tre rette, nè ogni retta è incidente con tre punti). I piani parziali S_h^n saranno da noi chiamati, con HALL, le successive *estensioni libere* dell'n-punto libero S_1^n.

Il *rango* ρ di S_h^n, cioè il numero $2(p+r)-i$ (essendo p, r, i rispettivamente il numero dei punti, delle rette e delle incidenze che figurano in S_h^n) è sempre uguale a $n+4$. Infatti, il rango di S_1^n è uguale a $n+4$, giacchè S_1^n contiene n punti, 2 rette, e tra i suoi elementi vi sono n incidenze; pertanto: $2(n+2)-n = n+4$. Il rango di un piano parziale è poi invariante rispetto alla aggiunzione di una nuova retta contenente due punti, e due soltanto, della configurazione di partenza, quanto rispetto alla aggiunzione di un nuovo punto,

appartenente a due rette, e due soltanto (nell'uno e nell'altro caso, il numero degli elementi viene aumentato di uno, quello delle incidenze di due, e con ciò $2(p+r)-i$ resta invariato).

Ciò premesso, non è difficile vedere (M. HALL) che l'insieme congiungente dei piani parziali della successione S_1^n, ..., S_k^n, ... è un piano grafico (non desarguesiano) P^n. Esso sarà da noi chiamato, con HALL, il *piano libero generato da un n-punto libero.*

I piani liberi P^n sono alla base di questa nostra ricerca, la quale mira, come si è detto nella premessa, a istituire una sorta di confronto tra un piano grafico qualsivoglia P e i $P^n (n = 4, 5, ...)$; si è voluto perciò, per comodità del lettore, richiamare con qualche dettaglio la definizione dei P^n data da HALL. Dei vari teorema di HALL sui P^n ricordiamo qui soltanto, senza dimostrazione, che:

P^m e P^n sono isomorfi quando e soltanto quando $m = n$.

I piani parziali S_k^n saranno da noi spesso chiamati gli *stadii* di P^n; più precisamente chiameremo $S_{2k}^n = R_k^n$ lo h-mo *stadio di rette,* $S_{2k+1}^n = P_h^n$ lo h-mo *stadio di punti* di P^n.

2. - *Le proposizioni configurazionali su P^n; il loro grado e il loro rango.*

Chiameremo *proposizione configurazionale su P^n* una identificazione di elementi distinti di P^n ottenuta in uno dei seguenti modi:

a) Dati tre punti di P^n, non allineati su di una retta di P^n, e siano A', A'', A''', si identificano le 3 rette $A \cup A'$, $A' \cup A''$, $A \cup A''$;

b) Date tre rette di P^n non concorrenti in un punto di P^n, e siano L, L' L'', si identificano i tre punti $L' \cap L'$, $L' \cap L''$, $L \cap L''$.

Consideriamo più da vicino, e separatamente, i due casi. Nel caso *a*) esisterà bene uno stadio di punti, P_h^n, di P^n, tale che A è un punto di P_h^n ma non di P_{h-1}^n; in modo analogo ad A', A'' corrisponderanno degli stadi di punti $P'_{h'}$, $P''_{h''}$ [2]).

---

[2]) Diremo più brevemente, ora e nel seguito: « il punto A ha *grado* h », e con ciò intenderemo che $A \in P_h^n$, $A \notin P_{h-1}^n$.

Supponiamo, come è sempre lecito, che sia h il più elevato dei numeri h, h', h''; i tre punti A, A', A'' sono allora tutti e tre punti di P_h^n, ma almeno uno di essi non figura tra i punti del precedente stadio di punti, P_{h-1}^n. Ragionando in modo analogo nel caso b), si potrà determinare uno stadio di rette R_k^n al quale appartengono tutte e tre le rette L, L', L'', mentre una almeno di esse (e sia la L) non appartiene al precedente stadio di rette, R_{k-1}^n.

OSSERVAZIONE. Una proposizione configurazionale del tipo b), e cioè una identificazione di punti, può sempre esprimersi come una proposizione configurazionale del tipo a), e cioè come una identificazione di rette in P^n (più precisamente come identificazione di rette in un conveniente stadio di rette di P^n).

Infatti, il punto comune a L, L' è certamente un punto di P_{k+1}^n, stadio di punti immediatamente successivo allo stadio di rette R_k^n; mentre L'', come retta di R_k^n, è certo la congiungente di due punti, e siano A', A'', di P_k^n (stadio di punti immediatamente precedente R_k^n). Presi allora i 3 punti $A = L \cup L'$, A', A'', dire che le tre rette L, L', L'' passano per un medesimo punto val quanto dire che i tre punti A, A', A'' sono allineati; e poichè le tre rette si erano supposte non concorrenti in un punto di P^n, i tre punti A, A', A'' non sono allineati su di una retta di P^n, e il loro allineamento è pertanto una proposizione configurazionale del tipo a).

Potremo perciò d'ora in poi, senza limitazione di generalità, considerare soltanto proposizioni configurazionali del tipo a) su P^n, e cioè proposizioni che predicano la identificazione dei tre lati di un triangolo (proprio) A, A', A'' di P^n.

Può essere ora univocamente assegnato il processo di costruzione dei punti A, A', A'' a partire dagli elementi del primo stadio (dagli elementi generatori di P^n). Esisterà infatti, come si è detto, un numero intero positivo h [3]) tale che A appartiene a P_h^n, ma non a P_{h-1}^n. A è allora univocamente

---

[3]) Il *grado* del punto A in P^n (v. nota precedente).

definito come l'intersezione di due ben determinate rette L_{h-1}, L'_{h-1} di R^n_{h-1} una almeno delle quali, e sia L_{h-1}, non appartiene a stadi di rette precedenti l'$(h-1)$-mo (altrimenti, contro l'ipotesi, $A = A_h$ apparterrebbe a uno stadio di punti precedente quello h-mo). Ciascuna delle rette L_{h-1}, L'_{h-1}, a sua volta, comparirà, nella costruzione stadiale di P^n, per la prima volta, come la congiungente di due ben determinati punti appartenenti a precedenti stadi di punti (interessa notare, per una dimostrazione che verrà svolta al n. **4**, che tra i due punti che definiscono L_{h-1} dovrà comparire almeno un A_{h-1} appartenente allo stadio di punti P^n_{h-1}, ma non a « stadi di punti » precedenti). Iterando il procedimento un numero finito di volte, ed eseguendolo per tutti e tre i punti A, A', A'', si perverrà in definitiva ad alcuni tra i punti iniziali A_i; anzi, almeno, ai punti A_1, A_2 di L_1 e a due tra i punti A_j di L_2 (giacchè, come è facile vedere, partendo da *un solo* punto su L_i, $i = 1$ o 2, e da un certo numero di punti su L_j, $j = 2$ o 1, non si possono ottenere nuovi punti mediante estensioni libere).

Invertendo la costruzione, si ha che A, A', A'' si possono costruire in modo univocamente determinato a partire da A_1, A_2, su L_1, A_{j3}, ..., A_{jr} su L_2 $(4 \leq r \leq n)$ aggiungendo, alternativamente, rette e punti. Si osservi che, nella costruzione, non intervengono mai rette contenenti due soli punti: coppie di rette vengono introdotte via via solo per la definizione del loro punto comune. In altri termini: quando si introduce una retta come la congiungente di due punti, si introduce insieme anche un suo terzo punto, intersezione con un'altra retta, non passante per nessuno dei due punti che definiscono la prima.

Traducendo in simboli il passaggio da A, A', A'' ai punti generatori iniziali prima delineato e univocamente determinato, la proposizione configurazionale che afferma l'allineamento di A, A', A'' ci si presenterà come un « quadro di allineamenti »; il primo è l'« allineamento forzato » $AA'A''$, ed è seguito da allineamenti « liberi » di terne di punti, che due a due, via via, definiscono punti di allineamenti ad essi precedenti:

$$C = \left\{ \begin{array}{l} AA'A'' \text{ (allineamento forzato)} \\ \hline \left.\begin{array}{l} A_{k-1}A'_{k-1}A \\ B \quad B' \quad A \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{k-2}A'_{k-2}A_{k-1} \\ C \quad C' \quad A_{k-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_iA_jX \\ A_rA_sX \end{array}\right\} \text{ allineamenti liberi} \end{array} \right.$$

Il primo allineamento è *forzato,* in quanto non si verifica in P^n; i rimanenti sono *liberi,* giacchè sono validi anche in P^n.

Le proposizioni configurazionali C [4]) si scrivono però usualmente in senso inverso, come successioni di allineamenti liberi *concluse* da un allineamento forzato. Faremo così anche noi, di norma, nel seguito di questo lavoro. In sede di definizione ci è sembrato però opportuno cominciare dall'allineamento che abitualmente si pone come conclusivo, perchè così facendo si mette bene in luce un *carattere* (aritmetico) della C, sul quale non ci risulta si sia finora soffermata l'attenzione degli studiosi, e per il quale proponiamo il nome di *grado.*

Definizione del grado di una proposizione configurazionale C. Data una proposizione configurazionale C, affermante la coincidenza dei tre lati di un triangolo (proprio) di P^n, di vertici A, A', A'', si chiamerà grado della C il numero intero positivo g, indice dello stadio di punti P^n_g, univocamente determinato dalla seguente proprietà: A, A', A'' appartengono a P^n_g, ma non appartengono tutti e tre a P^n_{g-1}.

---

[4]) Dovremo aggiungere, a rigore, « su P^n », data la nostra definizione di proporzione configurazionale. Da ora in poi, sottointenderemo che le C sono proposizioni configurazionali *su* P^n, rinviando ad una eventuale ulteriore ricerca il confronto tra la definizione di proposizione configurazionale da noi adottata e le altre che sono state proposte.

Il rango ρ, *il numero delle rette* r, *il numero dei punti* p *di una proposizione configurazionale* C. Fermiamo ora l'attenzione sul quadro degli allineamenti della C, escluso l'allineamento conclusivo, cioè sugli allineamenti *liberi* della C. Essi definiscono un sub-piano parziale del piano parziale P_g^n, che potremo chiamare, con ovvio significato dei simboli, $C' = C - (AA'A'')$. Poichè C' si ottiene con aggiunzioni libere di punti e rette da:

$$\begin{cases} L_1 : A_1 A_2 \\ L_2 : A_{j_3} \dots A_{j_k} \end{cases}$$

il suo rango $\rho = 2(p + r) - i$ è uguale a quello del piano parziale iniziale cioè a $2(k + 2) - k = k + 4 \leq n + 4$, giacchè $k \leq n$. Se $k < n$, potremo considerare C' anche come un piano parziale di P^t, $k \leq t < n$; quale che sia però il valore di t scelto, il rango di C' è sempre lo stesso.

Chiameremo *rango della proposizione configurazionale* C il rango del piano parziale $C' = C - (AA'A'')$; assumeremo come *numero dei punti della* C il numero dei punti p della C', come *numero delle rette* della C, invece, il numero delle *rette* distinte [5]) della C', aumentato di uno se l'allineamento forzato conclusivo non ha due punti in comune con un allineamento della C' (v. OSSERVAZIONE alla fine di questo numero).

Riassumiamo quello che siamo venuti dicendo dal principio di questo numero:

Chiamiamo proposizione configurazionale C *la affermazione dell'allineamento di* 3 *punti* A, A', A'' di P^n *non allineati in* P^n, *cioè la identificazione dei lati di un triangolo proprio di* P^n. *Se* A, A', A'' *appartengono a* P_g^n, *ma non tutti e tre a* P_{g-1}^n, g *si dirà il grado della* C. *Alla* C *si può associare univocamente un subpiano parziale libero* C' *di* P_g^n; *si chiamerà allora rango della* C *il rango di* C', $\leq n + 4$, *men-*

---

[5]) Delle *rette*, e non degli allineamenti, in quanto due o più allineamenti della C' possono ben rappresentare una medesima retta di P (ciò accade, per le regole seguite nella scrittura degli allinamenti, quando e solo quando hanno due punti in comune).

tre si assumeranno come numero dei punti e numero delle rette di C risp. il numero dei punti della C' e il numero delle rette della C', aumentato di uno se l'allineamento conclusivo non ha due punti in comune con un allineamento di C'.

La scrittura: $C(\rho, g; p, r)$ indicherà d'ora in poi una proposizione configurazionale di rango ρ, grado g, con p punti ed r rette. Nella letteratura sui piani grafici, è d'uso corrente il simbolo $C(\rho; p, r)$, cioè la considerazione dei tre caratteri ρ, p, r; mentre, come si è accennato prima, non ci risulta che il quarto carattere, e cioè il grado, sia stato finora preso in considerazione.

OSSERVAZIONE. Nella definizione generale di *proposizione configurazionale su P^n* da noi data in questo numero, l'allineamento forzato conclusivo $AA'A''$ è aggiunto *formalmente* agli allineamenti liberi che definiscono A, A', A'' in P^n, e non vi è luogo perciò alla formulazione di ipotesi limitative sulla scelta dei punti A, A', A'' in P^n. Se però l'insieme degli allineamenti che rappresentano la configurazione C (compreso quello conclusivo), non viene più considerato formalmente ma viene pensato come insieme di allineamenti *effettivamente verificati* in un piano P (non libero), allora si presenta naturale distinguere due casi:

a) l'allineamento conclusivo $AA'A''$ è indipendente dai precedenti allineamenti liberi, costituenti il piano parziale libero prima chiamato C'; e cioè: le coppie AA', AA'', $A'A''$ non figurano mai in un allineamento di C';

b) esiste un allineamento di C' contenente una delle predette coppie, e sia la AA', ed inoltre un punto A''' ($\neq A''$, in quanto si sono supposti i tre punti A, A', A'' non appartenenti a una medesima retta di P^n).

Nel caso *b*) i due allineamenti $AA'A''$, $AA'A'''$ sono allora da identificare nell'unico allineamento $AA'A''A'''$, se, appunto, la C si considera come insieme di allineamenti effettivamente verificati in un piano grafico; l'allineamento conclusivo non è indipendente da quelli liberi che ne definiscono i punti.

Definizione di teorema proiettivo. Diremo che una proposizione configurazionale è non degenere, oppure che essa è

un *teorema proiettivo,* quando l'allineamento conclusivo forzato è indipendente dagli allineamenti liberi che ne definiscono i punti.

Nel seguito di questa ricerca, salvo contrario avviso, si considerano esclusivamente teoremi proiettivi; parlando di proposizioni configurazionali si sottintenderà spesso la precisazione: « non degeneri ».

3. - *La classificazione delle proposizioni configurazionali di dato rango secondo il loro grado, e il calcolo del grado di una proposizione configurazionale: qualche esempio notevole.*

N. B. - Abbiamo ritenuto opportuno raccogliere in questo numero alcune applicazioni dei concetti introdotti nel numero

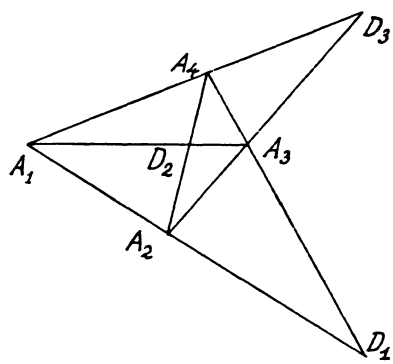

Fig. 1

precedente, relativamente a proposizioni configurazionali (non degeneri) particolarmente significative per il seguito del nostro studio.

1) *Le proposizioni configurazionali su* P^4 *di rango* 8, *e di grado* 2 *e* 3. Il secondo stadio di punti, P_2^4, non è altro che il quadrangolo piano completo, avente per vertici i punti A_1, A_2, A_3, A_4, generatori di P^4, e per punti diagonali i tre punti D_1, D_2, D_3 (appartenenti a P_2^4, ma non a P_1^4; vedi fig. 1). Una proposizione configurazionale di grado 2 dovrà predicare l'allineameno di tre punti, uno almeno dei quali appartiene a P_2^4 ma non a P_4^1; uno almeno dei quali è, in altri termini, un punto diagonale D. Proposizioni che pre-

dichino l'allineamento di un punto D e di due punti A sono necessariamente degeneri, e così quelle che predichino l'allineamento di un punto A e due punti D (giacchè tutte le coppie DA figurano nei due allineamenti liberi che definiscono un dato D). Non resta che la proposizione affermante l'allineamento dei 3 punti D, la quale è effettivamente un teorema proiettivo: $C(8, 2; 7, 7)$, di rango 8, grado 2, relativo a 7 punti e a 7 allineamenti distinti (compreso quello conclusivo). L'insieme dei punti e degli allineamenti di questo teorema è la ben nota *configurazione di* FANO, denotata spesso con il simbolo 7_3, isomorfa al piano lineare finito sopra il campo di Galois con due elementi, $GF(2)$.

$$C(8, 2; 7, 7) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{D_1D_2D_3} \\ A_1A_2D_1 \\ A_3A_4D_1 \\ A_1A_3D_2 \\ A_2A_4D_2 \\ A_1A_4D_3 \\ A_2A_3D_3 \end{array} \right.$$

Se vogliamo introdurre coordinate di HALL [6]) nel piano libero P^4 generato da $A_1, \ldots, A_4$, dovremo scegliere i punti generatori come vertici del quadrangolo fondamentale di riferimento, Sia, ad es., $A_1 = (0, 0)$; $A_2 = (1, 1)$; $A_3 = Y^\infty$; $A_4 = X^\infty$. Si ha allora (vedi fig. 2): $D_1 = Z^\infty$; $D_2 = (0, 1)$; $D_3 = (1, 0)$. La proposizione C predica la coincidenza delle tre rette D_1D_2, D_1D_3, D_2D_3.

L'equazione della D_1D_3 è:

$$y = x \cdot 1^0 1 = x + 1 \text{ [7])}$$

quella della D_1D_3 è:

$$y = x \cdot 1^0 1_d,$$

---

6) Vedi [1], pag. 244 sgg. Vedi anche il riassunto del metodo di HALL in [3].

7) Per definizione di «addizione naturale» ([1], pag. 249), $a + b = a \,.\, 1^0 b$. Porremo con definizione ricorrente: $2 = 1 \,.\, 1^0 1$; $3 = 1 \,.\, 1^0 2 = 1 + 2$; — —; $n = 1 \,.\, 1^0 (n-1)$.

essendo 1_d l'opposto destro della unità ($1 + 1_d = 0$). L'ipotesi della coincidenza di D_1D_2 con D_1D_3 (e quindi di D_2 D_3 con l'una e l'altra retta) si traduce perciò algebricamente nella uguaglianza:

$$1 = 1_d, \text{ il che significa:}$$

$$\boxed{1 + 1 = 0}.$$

La proposizione configurazionale in questione potrà perciò essere da noi chiamata, in forma concisa ed espressiva, « teorema $1 + 1 = 0$ ».

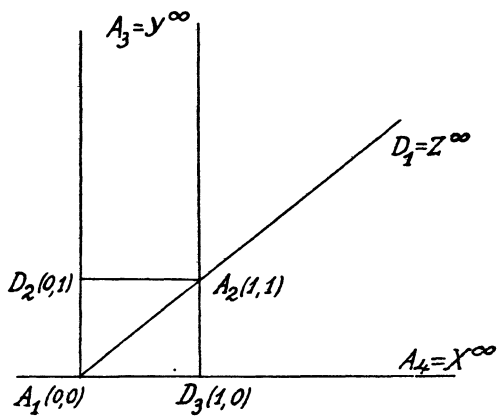

Fig. 2

b) Il terzo stadio di punti, P^4_3, di P^4, è costituito da 13 punti e da 9 allineamenti, così come è illustrato dalla fig. 3. Si ottiene dal precedente stadio di punti aggiungendo le rette DD congiungenti due a due i punti diagonali del quadrangolo iniziale, e le loro intersezioni E con i lati AA.

Una proposizione configurazionale su P^4_3 predicherà l'allineamento di un punto E e di due altri punti di P. Si presentano le seguenti possibilità:

I. *Allineamento di un punto E e di due punti A.* Giacchè un punto E è definito come intersezione di una retta DD e di una retta AA:

$$DDE$$
$$AAE$$

per avere una proposizione configurazionale non degenere occorrerà prendere, insieme a un punto E, i due punti A che non compaiono nella sua definizione. Si ha allora (a prescindere da una permutazione sugli indici iniziali dei punti A), la situazione illustrata dalla fig. 3: l'allineamento conclusivo è quello di $E_1(1,\ 2)$ $(2 = 1 \cdot 1^0 1)$; $A_1(0,\ 0) = 0$; $A_4 = X^\infty$.

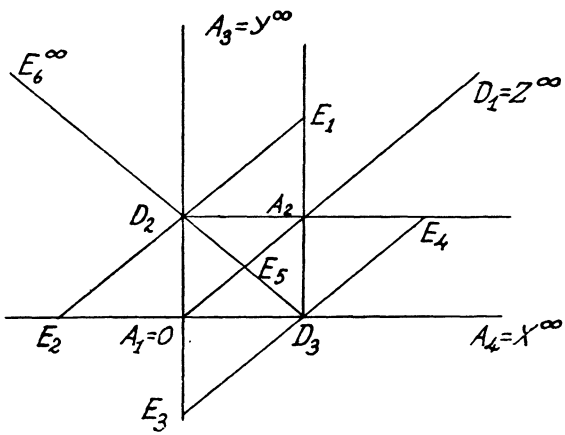

Fig. 3

Si deve imporre cioè la coincidenza di due tra le tre rette E_1O, E_1X, OX, per esempio delle ultime due. Esse hanno rispettivamente le equazioni:

$$y = 2 \quad ; \quad y = 0 .$$

Otteniamo così la proposizione configurazionale (di grado 3), che potremo chiamare il « teorema $2 = 0$ », e che, più esplicitamente, sarà rappresentata dal quadro:

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots \\ D_1 D_2 E_1 \\ A_2 A_3 E_1 \\ \hline E_1 A_1 A_4 \end{array}$$

(si sono omessi i primi allineamenti, cioè quelli che definiscono D_1, D_2; D_3 non interviene nella costruzione).

Nota Bene. L'insieme degli allineamenti (compreso quello conclusivo) costituenti la prop. conf. « $2 = 0$ » è una configurazione isomorfa a quella ottenuta in relazione al teorema « $1 + 1 = 0$ », e cioè ancora una volta la configurazione di FANO. Tuttavia, dal punto di vista dal quale ci siamo messi, si tratta di proposizioni configurazionali distinte, in quanto predicano l'allineameno di terne *diverse* di punti di P^4 (i quadrangoli iniziali sono diversi). Questa differenza si riflette nel diverso grado delle due proposizioni (la prima di secondo, la seconda di terzo grado) e nella loro formulazione algebrica, *equivalente sì*, ma lievemente diversa. Nel primo caso si ha infatti la coincidenza delle rette $y = x \cdot 1^0 1$ e $y = x \cdot 1^0 1_d$, e di conseguenza: $1 = 1_d$; nel secondo la coincidenza delle rette $y = 2$, $y = 0$, e di conseguenza $2 = 0$.

II. *Allineamento di un punto E, di un punto D, e di un terzo punto.* Non può dar luogo a prop. conf. non degeneri diverse dalla precedente (teorema « $2 = 0$ »). Infatti si dovrà scegliere il punto D, e uno dei punti A, che non intervengono nella definizione di E; ma allora dall'allineamento EDA discende l'allineamento EAA conclusivo del teorema « $2 = 0$ » (cioè la coincidenza di E_1 e D_3, che è poi un modo di esprimere il teorema « $2 = 0$ »).

III. *Allineamento di due punti E e un punto A.* Occorrerà scegliere una coppia di punti E nella definizione dei quali non intervengano tutti e quattro i punti A. Ciò si otterrà prendendo due distinti E « adiacenti ad un medesimo A », intendendosi, ora e dopo, con questa locuzione, che il punto A interviene tanto nella definizione del primo, quanto del secondo punto E. A meno di una permutazione degli indici iniziali degli A, potremo supporre che i punti E in questione siano $E_1(1, 2)$, E_4 adiacenti al punto $A_2(1, 1)$. Resta allora a nostra disposizione solo $A_1(0, 0)$, che è l'unico punto A che non intervenga nella definizione di E_1, E_4.

E_4 ha le coordinate $(2', 1)$, ove con $2'$ si intende la soluzione della $1 = x + 1_d$. Se E_4 appartiene alla A_1E_1, di equazione $y = x \cdot 2^0 0$, dovrà essere $1 = 2' \cdot 2^0 0 = 2' \cdot 2$, che è un equivalente algebrico « locale » del teorema in esame. Cambiando

opportunamente il riferimento (v. [8]) si ottiene la relazione, più espressiva, « $3 = 0$ ».

Più esplicitamente, il teorema in questione è dato dal quadro:

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots \\ D_2D_1E_1 \\ A_2A_3E_1 \\ D_3D_1E_4 \\ A_2A_4E_4 \\ \hline E_1E_4A_1 \end{array}$$

IV. *Allineamento di tre punti E.* Sono da distinguere alcuni casi.

α) Due dei punti E appartengono alla congiungente due punti diagonali D_i, D_j. La prop. conf. che si ottiene è degenere. (V. la nota all'osservazione che conclude il numero 2).

β) I tre punti E non si trovano nella situazione di cui in α) e non sono adiacenti ad un medesimo punto A · A meno di una permutazione degli indici iniziali degli A, potremo sempre supporre che si tratti dei tre punti E_1, E_4, E_6 = punto « all'infinito » della retta D_2D_3. Si ottiene allora un teorema (prop. conf. non degenere) rappresentato dal quadro:

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots \\ D_1D_2E_1 \\ A_2A_3E_1 \\ D_1D_3E_4 \\ A_2A_4E_4 \\ D_2D_3E_6 \\ A_3A_4E_6 \\ \hline E_1E_4E_6 \end{array}$$

La configurazione che si ottiene (includendo l'ultimo allineamento) è quella del ben noto teorema D_8, cioè di quel caso particolare del teorema di Desargues che si ha quando i ver-

tici di uno dei due triangoli omologici giacciono, tutti e tre, ciascuno su di un lato dell'altro. Per convincersi di ciò basta prendere come triangoli prospettivi:

$$A_2A_3A_4$$
$$D_1D_2D_3$$

(vertici corrispondenti, scritti in colonna, sono allineati con A_1); osservare che D_1 è situato su A_3A_4; D_2 su A_2A_4; D_3 su A_2A_3 e che i punti d'incontro di lati corrispondenti sono precisamente E_1, E_4, E_6, cioè i tre punti il cui allineamento è predicato dalla nostra proposizione configurazionale.

Tale proposizione sarà perciò da noi chiamata il « teorema D_8 »; ad evitare possibili confusioni con altri teoremi di rango 8 ma di grado diverso, indicati da alcuni autori con lo stesso simbolo, useremo anche il simbolo più preciso: $D_8(3)$.

La configurazione relativa a $D_8(3)$ si può anche esprimere, come è noto, come un caso particolare del « piccolo teorema di Desargues » (asse e centro di omologia incidenti), e cioè il caso che si ottiene supponendo che due vertici di un triangolo appartengano a lati dell'altro. (Si considerino i triangoli corrispondenti $D_2A_1D_3$, $E_1A_2E_4$: vertici corrispondenti sono allineati con D_1, punto improprio, mentre lati corrispondenti sono paralleli; D_3 sta su E_1A_2, mentre D_2 sta su E_4A_2).

γ) Resta ancora da considerare il caso in cui l'allineamento conclusivo è composto da tre punti E adiacenti ad un medesimo punto A (un medesimo punto A interviene nella definizione di ogni E). A prescindere da una eventuale permutazione degli indici dei punti iniziali, possiamo supporre che i tre punti in questione siano $E_1E_4E_5$ e che la proposizione configurazionale sia rappresentata dal quadro:

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots \\ A_1A_2E_5 \\ D_2D_3E_5 \\ \hline E_1E_4E_5 \end{array}$$

(per gli allineamenti che definiscono i punti diagonali e i punti E_1, E_4 si rinvia alle precedenti tabelle).

Questa proposizione esprime l'allineamento dei punti diagonali del quadrangolo che ha per vertici $D_1D_2D_3A_2$. È però una proposizione configurazionale profondamente diversa dal « teorema $2 = 0$ » del quale si è precedentemente discorso: se in un piano essa è verificata, relativamente a una quaterna A, i punti diagonali della quaterna iniziale *non* sono allineati, mentre lo sono quelli di una seconda quaterna, ottenuta con aggiunzioni libere da essa. La proposizione configurazionale in questione sarà da noi indicata con il simbolo: T'^2.

Riassumiamo, raggruppando insieme in un elenco i simboli introdotti:

Le proposizioni configurazionali non degeneri (teoremi proiettivi) su P^4 di grado 3, sono, a meno di permutazioni sugli indici dei punti generatori di P^4, le seguenti quattro:

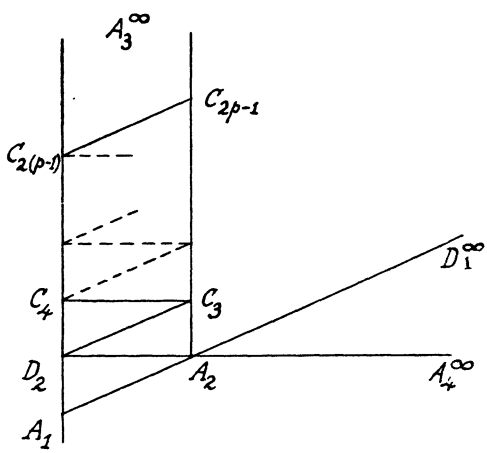

Fig. 4

1) $T^2(3)$, *o « teorema* $2 = 0$ » (si ottiene imponendo l'allineamento di un punto di grado 3 e dei due punti di grado 1 che non intervengono nella sua definizione in P^4);

2) $T^3(3)$, *o « teorema* $3 = 0$ »: si ottiene imponendo l'allineamento di due punti di grado 3 nella definizione dei quali intervengono solo 3 punti di grado 1, e del rimanente punto di grado 1;

3) $D_8(3)$, *ossia il caso particolare del teorema di Desargues sui triangoli omologici, che si presenta quando ogni ver-*

tice di uno dei due triangoli è situato su di un lato dell'altro: si ottiene imponendo l'allineamento di tre punti di grado 3, *dei quali mai due giacciono su di un lato del quadrangolo generatore, non adiacenti tutti e tre ad un medesimo punto di grado* 1;

4) T'^2: *si ottiene imponendo l'allineamento di tre punti di grado* 3 *adiacenti ad un medesimo punto* A *di grado* 1.

2) *I teoremi* « $p = 0$ ».

Chiameremo teorema « $p = 0$ » la proposizione configurazionale su P^4 rappresentata dal seguente quadro di allineamenti (ved fig. 4):

$$
\begin{array}{l}
A_1A_2D_1 \\
A_3A_4D_1 \\
A_1A_3D_2 \\
A_2A_4D_2 \\
D_1D_2C_3 \\
A_2A_3C_3 \\
A_4C_3C_4 \\
A_1A_3C_4 \\
\cdots\cdots\cdots \\
C_{2(p-1)}D_1C_{2p-1} \\
A_2A_3C_{2p-1} \\
\hline
C_{2p-1}A_1A_4
\end{array}
$$

Il grado di C_i è i, e perciò il grado del teorema « $p = 0$ » è $2p - 1$; il numero dei punti è $2p + 3$, e $2p + 3$ è anche il numero degli allineamenti, compreso quello conclusivo; il rango è 8, e pertanto il teorema « $p = 0$ » è una $C(8, 2p - 1; 2p + 3, 2p + 3)$. Si introducano cordinate generali di HALL ponendo $A_1(0, 0)$; $A_2(1, 1)$; $A_3 = Y^\infty$; $A_4 = X^\infty$. Sarà allora: $C_3(1, 1 \cdot 1^0 1 = 2)$; $C_4(0, 2)$; $C_5(1, 1 \cdot 1^0 2 = 1 + 2 = 3)$; $C_6(0, 3)$; ...; $C_{2h}(0, h)$; $C_{2h+1}(1, h + 1)$; ...; $C_{2(p-1)}(0, p - 1)$; $C_{2p-1}(1, p)$. Imporre l'allineamento conclusivo significa identificare le rette A_1A_4 e $C_{2p-1}A_4$, le quali hanno rispettivamente equazione:

$$y = 0 \quad ; \quad y = p;$$

perciò « $p = 0$ » è una relazione algebrica che traduce l'allineamento forzato conclusivo.

4. - *L'n-mo grado di libertà, inferiore e superiore, di un piano grafico P. La caratteristica di P.*

Dato, a piacere, un piano grafico P, supponiamo che in esso esista un n-punto nel senso di HALL, cioè un piano parziale $\bar{S}_1^n = \bar{P}_1^n$ isomorfo alla configurazione $S_1^n = P_1^n$, primo stadio di P^n. Sarà:

$$\bar{S}_1^n = \bar{P}_1^n \begin{cases} \bar{L}_1 : \bar{A}_1\bar{A}_2 \\ \bar{L}_2 : \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n . \end{cases}$$

Imitando il procedimento seguito nella costruzione di ..., S_{2h}^n, S_{2h+1}, ... a partire da S_1^n in P^n, si potranno costruire, *in P*, i piani parziali ..., $\bar{S}_{2h}^n = \bar{R}_h^n$, $\bar{S}_{2h+1}^n = \bar{P}_{h+1}^n, \dots$, a partire da $\bar{S}_1^n$; e precisamente:

a) se in $\bar{S}_{2h-1}^n = \bar{P}_h^n$ vi sono due punti A, A' ma non la loro congiungente r in P. $\bar{S}_{2h}^n = \bar{R}_h^n$ si ottiene aggiungendo a $\bar{P}_h^n$ le rette r;

b) se in $\bar{R}_h^n$ vi sono due rette r, r' ma non il loro punto d'incontro A in P, $\bar{P}_{h+1}^n$ si ottiene da $\bar{R}_h^n$ con l'aggiunta dei punti A.

La corrispondenza iniziale tra $P_1^n = S_1^n$ e $\bar{P}_1^n = \bar{S}_1^n$ (all'elemento E_i, punto o retta, di S_1^n, corrisponde l'elemento $\bar{E}_i$ di $\bar{S}_1^n$), può essere prolungata ai successivi stadi, facendo corrispondere punti d'incontro di rette corrispondenti, rette congiungenti punti corrispondenti. Supponiamo ora che la corrispondenza così ottenuta tra S_k^n e $\bar{S}_k^n$ sia ancora biunivoca, e che quella tra S_{k+1}^n e $\bar{S}_{k+1}^n$ cessi dall'essere tale. Ciò significa che almeno due elementi di S_{k+1}^n (anzi, come vedremo tra un momento, almeno tre) hanno la stessa immagine in $\bar{S}_{k+1}^n$; $\bar{S}_{k+1}^n$ si ottiene da S_{k+1}^n con l'identificazione di un certo numero di elementi di S_{k+1}^n / S_k^n [8]). Esprimeremo questo fatto dicendo che la prima identificazione di elementi, a partire da S_1^n, si verifica al $(k+1)$-mo stadio. Supponiamo, per comodità di esemplifi-

---

[8]) Gli elementi di S_{k+1}^n / S_k^n sono gli elementi di S_{k+1}^n che non figurano già in S_k^n (elementi di grado $k+1$).

cazione, che $k = 2h - 1$ sia dispari, e che quindi S_k^n sia lo « stadio di punti » P_h^n. Se si impone la coincidenza di due rette dello stadio successivo R_h^n, e siano la A_hX, B_hY, si impone con ciò la coincidenza con le due rette indicate almeno della terza retta A_hB_h. Su ciascuna delle due rette, definite da due punti di P_h^n, deve infatti figurare almeno un punto di grado h, chè altrimenti esse non sarebbero rette di R_h^n / P_h^n; siano risp. A_h e $B_h \cdot A_h$ e B_h si possono supporre distinti, giacchè, se identificassimo le due rette A_hX, A_hY, con X, Y punti di grado inferiore ad h, si avrebbe che la retta XY di P_h^n passerebbe per A_h, e quindi una identificaziane in P_h^n, contrariamente alla potesi fatta. In conclusione, $\bar{R}_h^n$ si ottiene da R_h^n con l'identificazione forzata in R_h^n dei lati di almeno un triangolo A_hB_hX, cioè supponendo verificata almeno una proposizione configurazionale di grado h.

DEFINIZIONE DEL GRADO DI LIBERTÀ INFERIORE.

1) *Diremo che il piano parziale $\bar{S}_1^n$ del piano grafico P, isomorfo all'n-punto di* HALL S_1^n, *ha grado di libertà inferiore uguale ad h, se esiste un intero positivo h tale che $\bar{S}_h^n$ è isomorfo a S_h^n, mentre $\bar{S}_{h+1}^n$ e S_{h+1}^n non sono isomorfi. Porremo poi per definizione il grado di libertà inferiore di $\bar{S}_1^n$ uguale a $+\infty$, se $\bar{S}_1^n$ genera, in P, un piano P^n isomorfo al piano libero P^n.*

2) *Chiameremo $(n-3)$-mo grado di libertà inferiore del piano grafico P il numero* (positivo, nullo, o infinito) $g_{n,P}$ *definito nel seguente modo:*

a) $g_{n,P} = 0$ *se in P non esistono piani parziali isomorfi a S_1^n;*

b) $g_{n,P} = h_{n,P}$ *se esiste un massimo grado di libertà inferiore finito $h_{n,P}$ per i piani parziali $\bar{S}_1^n \subset P$ isomorfi a S_1^n;*

c) $g_{n,P} = +\infty$, *se l'insieme dei gradi di libertà dei piani parziali $\bar{S}_1^n$ di P ha per estremo superiore l'infinito.*

DEFINIZIONE DI SEGNATURA DEI GRADI DI LIBERTÀ INFERIORI DI UN PIANO GRAFICO P (« prima segnatura di P »).

Chiameremo segnatura dei gradi di libertà inferiori di un piano grafico P, o prima segnatura di P, la successione dei

suoi gradi di libertà inferiori, cioè la successione:

$$(g)_P = (g_{4,P}\,;\ g_{5,P}\,;\ \dots\,;\ g_{n,P}\,;\ \dots)$$

nella quale $g_{n,P}$ *è l'*$(n-3)$*-mo grado di libertà inferiore di* P (e perciò un numero positivo o nullo, o l'infinito).

Osservazioni ed esempi.

OSSERVAZIONE 1. *Piani degeneri e piani finiti.*

a) Nel caso di un piano degenere, finito o infinito, il primo grado di libertà $g_{n,P}$ è nullo, e con esso tutti i successivi; non esistono infatti quaterne di punti tre a tre non allineati (non vale il cosiddetto postulato di FANO), e perciò non esistono piani parziali isomorfi a S_1^4.

b) Nel caso di un piano finito non degenere di rango n (su ogni retta, $n+1$ punti), l'$(n-1)$-mo grado di libertà, $g_{n+2,P}$, è diverso da zero, in quanto si possono prendere su una retta $\bar{L}_1$ due punti, su di una seconda retta L_2 n punti distinti tra di loro e dal punto $\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2$; l'n-mo grado di libertà inferiore, $g_{n+3,P}$, è invece zero. Viceversa, se $g_{n+3,P} = 0$, mentre $g_{n+2,P}$ è diverso dallo zero, si vede subito che P è un piano finito di rango n; si può includere anche il caso di P degenere, se si conviene, come è del resto naturale, di dire che *un piano degenere ha rango* 1 (un piano è infatti degenere quando e soltanto quando esistono in esso rette contenente due soli punti) [9]. Perciò:

In un piano finito il rango è l'indice del minimo grado inferiore di libertà nullo; viceversa, se n *è l'indice del più piccolo grado di libertà che si annulla in un piano grafico* P, P *è di rango* n (*intendendosi allora di rango* 1 *un piano degenere qualsivoglia, finito o infinito*).

Esempi relativi all'Osservazione 1.

a) *Piano sul campo di Galois* $GF(2)$. Esiste un 4-punto isomorfo a S_1^4; l'isomorfismo può essere prolungato fino al 3° stadio (quadrangolo piano completo con punti diagonali); nel 4° stadio invece si debbono far coincidere in una unica retta

[9]) Vedi ad es., B. SEGRE, [6], pag. 105.

le tre rette che congiungono due a due i punti diagonali (nel caso in esame, la configurazione di FANO ha validità universale); pertanto $g_{4,P} = 3$. Non esiste invece nessun 5-punto isomorfo a S_1^5; pertanto $g_{5,P} = 0$, e così $g_{6,P}, \ldots, g_{n,P}, \ldots$. La segnatura dei gradi di libertà inferiori è nel nostro caso:

$$(3,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots).$$

b) *Piano sul campo di Galois* $GF(3)$. Il primo grado di libertà è, come vedremo più avanti, uguale a 5. Esiste poi un 5-punto isomorfo a S_1^5; si può sempre supporre che esso sia (a meno di una trasformazione di coordinate) costituito dalla retta all'infinito con i punti all'infinito dell'asse y, Y^∞, e della retta unitaria, Z^∞, e dall'asse x con i punti $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(2, 0)$. Le 6 rette congiungenti un punto dell'asse x e un punto improprio sono tutte distinte; e così sono tutti distinti tra di loro e dai punti iniziali i punti di intersezione di due tra dette rette non uscenti da un medesimo punto iniziale. Quindi il « terzo stadio » (secondo «stadio di punti») è isomorfo all'S_3^5 libero. Non così il 4° stadio, nel quale vi sono necessariamente identificazioni di rette. Il 2° grado di libertà è pertanto 3, il 3° è invece 0 (vedi la precedente osservazione). La segnatura dei gradi di libertà inferiori è:

$$(5,\ 3,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots).$$

c) *Piano sul campo di Galois* $GF(p)$. Estendendo il ragionamento or ora sviluppato in b), si vede senza difficoltà che $g_{p+3,P} = 0$, mentre $g_{p+2,P} = 3$.

OSSERVAZIONE 2: *se* $n > n'$, $g_{n,P} \leq g_{n',P}$.

Infatti, se $n > n'$, ogni n-punto $\bar{S}_1^n$ di P contiene qualche n'-punto $\bar{S}_1^{n'}$; se $\bar{S}_{g_n}^n$ è libero, tale è certamente anche $\bar{S}_{g_n}^{n'}$, e perciò $g_{n,P} \leq g_{n',P}$. La segnatura dei gradi di libertà è quindi una successione di numeri non crescente (il simbolo $+\infty$ va naturalmente considerato come un numero maggiore di ogni numero intero positivo o nullo).

Il problema: « determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una successione di numeri interi, positivi o nulli, incluso convenzionalmente tra di essi $+\infty$, rappresenti

la segnatura dei gradi di libertà di un piano grafico? », si presenta a priori di difficile soluzione, e non sarà da noi affrontato in questa ricerca.

Piani n-omogenei ed n-nonomogenei.

Se $g_{n,P} > 1$ (e non infinito) è l'$(n-3)$-mo grado di libertà inferiore di un piano grafico $P (n \geq 4)$, due casi possono a priori presentarsi (ed effettivamente si presentano):

1°) $g_{n,P}$ è l'$(n-3)$-mo grado di libertà inferiore di *tutti* gli $\bar{S}_1^n$ di P isomorfi a S_1^n;

2°) Esiste un $\bar{S}_1^n \subset P$ il cui grado di libertà g_n è minore di $g_{n,P}$.

Se si verifica il caso 1°) diremo che il piano P è *n-omogeneo*; se si verifica il caso 2°) diremo che P non è n-omogeneo, ovvero che P è *n-nomogeneo.*

Esempio di piano 4-nonomogeneo. H. LENZ (1953), M. HALL (1954), H. NEUMANN (1954) hanno dimostrato l'esistenza di piani su « algebre di Veblen-Wedderburn » (pseudocorpi, ted. « Quasikörper ») nei quali la proposizione configurazionale $1 + 1 = 0$, di grado 3 e rango 8, vale per alcuni quadrangoli, ma non per tutti. Nella nostra terminologia, ciò significa che vi sono degli $\bar{S}_1^4$ il cui grado di libertà inferiore è 3, mentre vi sono altri $\bar{S}_1^4$ il cui grado di libertà inferiore è maggiore di 3. I piani studiati dagli Autori citati sono perciò certamente 4-nonomogenei.

Due esempi di piani 4-omogenei, per i quali $g_{4,P} = 5$.

a) *Il piano razionale.* Preso un 4-punto nel piano razionale (cioè i vertici di un quadrangolo proprio, e due lati opposti), $\bar{S}_1^4$, si vede senza difficoltà che il 5° stadio (3° « stadio di punti ») è isomorfo al 5° stadio del piano libero P^4 (v. fig. 3). Poichè nel piano razionale vale universalmente il teorema D^8 (vedi n. **3**, 1, teorema conclusivo), in $\bar{S}_6^4$ vengono identificate rette corrispondenti a rette distinte di S_6^4. Pertanto, per ogni 4-punto del piano razionale il grado di libertà inferiore è 5.

È da notare che $\bar{S}_6^4$ si ottiene da S_6^4 eseguendo tutte, *e sole,* le identificazioni imposte dal teorema D_8 (in corrispondenza a permutazioni degli indici dei punti iniziali); infatti, mentre $D_8(3)$ è universale nel piano razionale, gli altri teoremi

proiettivi di grado 3 su P^4, elencati alla fine di **3**, 1, non sono *mai* verificati nel piano razionale.

b) *Il piano finito sul campo di Galois* $GF(3)$. Anche in questo caso, il 5° stadio, $S_5^4 = \overline{P}_3^4$ di un $\overline{S}_1^4$ è isomorfo al 5° stadio del piano libero P^4 (ciò è dovuto al fatto che, nel piano in esame, il teorema $1 + 1 = 0$, di grado 2, non è mai verificato). Sono ora universali *due* teoremi proiettivi di grado 3, e precisamente il teorema $T^3(3)$ (teorema « $3 = 0$ »), e, di nuovo, il teorema D_8. Osserviamo anzi di passaggio che:

Se in un piano P è universale il teorema T^3, *in esso vale incondizionatamente il teorema* D_8.

Infatti, introducendo l'allineamento conclusivo di T^3 a partire da ogni permutazione degli indici dei vertici del quadrangolo iniziale, otteniamo il seguente quadro di 13 allineamenti distinti di 13 punti distinti (i primi 9 allineamenti sono liberi, gli ultimi quattro sono imposti dalla ipotesi della validità universale di T^3):

$$\left.\begin{array}{l} A_1A_2D_1E_5 \\ A_1A_3D_2E_3 \\ A_1A_4D_3E_2 \\ A_2A_3D_3E_1 \\ A_2A_4D_2E_4 \\ A_3A_4D_1E_6 \\ D_1D_2E_1E_2 \\ D_1D_3E_3E_4 \\ D_2D_3E_5E_6 \end{array}\right\} \text{liberi}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1E_1E_4E_6 \\ A_2E_2E_3E_6 \\ A_3E_2E_4E_5 \\ A_4E_1E_3E_5 \end{array}\right\} \text{conseguenza di } T_3$$

(vedi ancora fig. 3).

Insieme al teorema T^3, è allora universalmente verificato anche il teorema D_8. I 13 punti e i 13 allineamenti ora scritti non sono altro che i punti e gli allineamenti del piano lineare su $GF(3)$; quindi:

Se in un piano è universalmente verificato il teorema T^3, *in esso ogni quaterna di punti* (*tre a tre non allineati*) *genera un piano finito di rango* 3, *isomorfo al piano lineare su* $GF(3)$.

Nota Bene. I due esempi ora addotti mostrano l'opportunità di suddividere i piani n-omogenei di dato grado h di libertà in due classi, a seconda che, a partire da ogni loro $\bar{S}_1^n$, in $\bar{S}_{h+1}^n$ sia verificata sempre una ed una sola proposizione configurazionale (caso dell'esempio a)), oppur no, (caso dell'esempio b)), mentre $\bar{S}_h^n$ è « libero ». Su questo problema però non ci tratterremo nella presente nota.

L'n-mo grado di libertà superiore di un $\bar{S}_1^n \subset P$ *e di un piano* P.

PREMESSA. Diremo che un piano parziale $C \subset P_h^n$ è *completo* in P_h^n quando sono soddisfatte le seguenti condizioni: 1) se il punto $A \in C$, allora appartengono a C anche le due rette di P_h^n che definiscono A nella costruzione stadiale di P_h^n (vedi n. **1**); 2) se la retta $r \in C$, allora appartengono a C anche i due punti che definiscono la r nella costruzione stadiale di P_h^n.

Diremo inoltre che un piano parziale completo C di P_h^n è di grado h, e useremo il simbolo C_h, se contiene almeno un punto di grado h, e non punti di grado superiore.

Consideriamo in P un $\bar{S}_1^n = \bar{P}_1^n$ e i successivi stadi di punti da esso dedotti: $\bar{P}_2^n, \dots, \bar{P}_h^n, \dots$. Sia $\bar{C}$ un piano parziale di $\bar{P}_h^n$. Chiameremo $\bar{C}$ un *piano parziale libero di grado h su* $\bar{P}_1^n$, o una *configurazione di grado h dedotta da* $\bar{P}_1^n$ *con ampliamenti liberi*, quando accada che:

a) $\bar{C}$ *è* isomorfo a un piano parziale completo $C \subset P_h^n$, di grado h;

b) presi comunque tre punti $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ di $\bar{C}$, essi sono allineati in P quando e soltanto quando il loro allineamento figura tra quelli di $\bar{C}$ (in altri termini: i punti di $\bar{C}$ non danno luogo ad allineamenti forzati in P).

DEFINIZIONE. Chiameremo n-mo grado di libertà superiore di P_1^n in P l'estremo superiore dei gradi (eventualmente infinito) dei piani parziali liberi su P_1^n; chiameremo n-mo

grado di libertà superiore del piano P l'estremo superiore (eventualmente infinito) dei gradi di libertà superiori dei $P_1^n \subset P$.

Chiameremo *segnatura dei gradi di libertà superiori di P* (« seconda segnatura di P ») la successione dei gradi di libertà superiori di P.

OSSERVAZIONE. Ci siamo limitati alla considerazione degli stadi di punti, perchè ciò presenta, come si vedrà tra poco, qualche vantaggio nello studio di un caso particolarmente importante (piani lineari a caratteristica diversa da 0). Se si vuole però confrontare l'n-mo grado di libertà superiore con quello inferiore, conviene ricordare che $P_h^n = S_{2h-1}^n$. Posto allora $k = 2h - 1$, risulta in modo ovvio dalle due definizioni di n-mo grado di libertà inferiore e superiore di un n-punto libero di P (del piano P stesso) che, essendo h il grado di libertà superiore di un n-punto libero di P (di P), il numero $k = 2h - 1$ è maggiore, o tutt'al più uguale, al suo grado di libertà inferiore. È ben possibile però che valga la disuguaglianza in senso stretto, cioè che $P_h^n = \bar{S}_{2h-1}$ non sia isomorfo al $(2h-1)$-mo stadio libero S_{2h-1}^n, ma che un piano parziale, di grado h, $\bar{C} \subset \bar{P}_h^n$, sia invece « libero » nel senso prima chiarito (condizioni a) e b)). Ciò risulta, ad esempio, dalla seguente osservazione:

In un piano lineare P sopra un corpo a caratteristica p il grado di libertà superiore di una S_1^4 *è* $\geq 2(p-1)$.

A partire da un 4-punto $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_4$ si considerino infatti gli allineamenti corrispondenti a quelli del teorema « $p = 0$ » su P^4 (vedi **3**, 2), tranne l'allineamento forzato finale e gli ultimi due allineamenti liberi. Avremo allora (vedi anche fig. 4), per quanto a suo luogo si è detto, un piano parziale in P isomorfo a un piano parziale completo in P^4 di grado $2(p-1)$ (tale è il grado del punto $C_{2(p-1)}$, punto di grado massimo del piano parziale considerato). D'altra parte è facile vedere che anche la condizione b) è verificata. Infatti, i punti del piano parziale in questione sono i punti dell'asse y di coordinate $(0, i)$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, e i punti della retta $x = 1$ di coordinate $(1, j)$, $j = 1, \ldots, p-1$; le rette del piano parziale sono la retta impropria, le rette $x = j$, $j = 1, \ldots,$

$p-1$, e le rette $y-x=k$, $k=0, 1, \ldots, p-2$, congiungenti i punti $(0, k)$ e $(1, k+1)$.

Dobbiamo far vedere, per dimostrare la validità della b), che la retta:

$$(0, i) \cup (1, j)$$

non continene un terzo punto del piano parziale, a meno che la retta stessa non sia tra quelle elencate del piano parziale e il passaggio per un terzo punto non risulti dagli allineamenti (liberi) di esso. Ora, ciò è subito visto, perchè la $(0, i) \cup (1, j)$ ha l'equazione:

$$y-j=(j-i)(x-1);$$

punti del piano paziale fuori delle rette $x=0$ e $x=1$ sono soltanto X^∞, Y^∞, Z^∞; la retta ora scritta non può mai passare per Y^∞; passa per X^∞ se $j-i=0$, ma allora si tratta di uno degli allineamenti già previsti nel piano parziale in questione; passa per Z^∞ se $j-i=1$, cioè se $j=i+1$, ed allora si tratta di nuovo di un allineamento (libero) del piano parziale in esame.

Dimostreremo ora il teorema più forte:

In un piano lineare P sopra un corpo a caratteristica $p \neq 0$ il grado di libertà superiore di ogni $\overline{P}_1^4$ (e allora anche il primo grado di libertà superiore di P) è uguale a $2(p-1)$.

Dedurremo il teorema ora denunciato come evidente corollario del seguente teorema più generale (e dell'osservazione prima fatta):

Se un 4-punto di un piano P genera un piano finito di rango p, il suo grado di libertà superiore non può superare $2(p-1)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\overline{P}_1^4$ il 4-punto in questione, $\overline{C}$ una configurazione di grado h da esso dedotta con ampliamenti liberi. Ciò significa, come si è detto, che: a) $\overline{C}$ è isomorfa a una configurazione libera C_k di grado k dedotta da un 4-punto libero P_1^4 generatore di un piano libero P^4 (C_k è *completa*); b) i punti di $\overline{C}$ in P non verificano altri allineamenti all'infuori di quelli corrispondenti agli allineamenti dei punti di C_k in P^4. Per comodità di notazione useremo per un momento

gli stessi simboli per gli elementi di $\overline{C}$ e quelli di C_k, il che, visto l'isomorfismo, è lecito.

Il fatto che C_k sia di grado k significa poi che in C_k esiste almeno un punto A_k appartenente al k-mo stadio di punti P_k^4, e non al $(k-1)$-mo, mentre non esistono nè rette appartenenti allo stadio di rette R_k, e non a uno stadio precedente, nè punti appartenenti allo stadio di punti P_{k+1}, e non a uno stadio precedente. In C_k, allora, figurano soltanto *due* allineamenti distinti contenenti A_k: quelli che servono a definirlo (e questi ultimi figurano certamente in C_k, giacchè si tratta per ipotesi di un piano parziale *completo* di P). Poichè A_k non appartiene a stadi di punti precedenti il k-mo, delle due rette che lo definiscono una almeno, e sia L_{k-1}, appartiene allo stadio di rette R_{k-1}, e non a stadi precedenti. Ciò vuol dire che L_{k-1} è definita, nella costruzione stadiale di P^4, come la retta congiungente un punto X di grado non maggiore di $k-1$ con un punto A_{k-1} di grado *esattamente* uguale a $(k-1)$. A sua volta A_{k-1} sarà definito da due rette delle quali almeno una, L_{k-2}, dovrà appartenere a R_{k-2} e non a stadi precedenti, ed allora L_{k-2} è definita da due punti, uno almeno dei quali, A_{k-2}, appartiene a P_{k-2} e non a stadi precedenti. Quando, iterando il ragionamento, si perviene a un punto A_3 appartenente a P_3 e non a stadi precedenti, si potrà addirittura affermare che esso è definito da due rette, una delle quali, L_2, contiene *due* punti, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$ del secondo stadio e non del primo (la cosa è quasi immediata, ma risulta comunque da quanto esposto in **3**, 1, b); v. anche la fig. 3).

Riassumendo, si ha che C_k contiene certamente perlomeno le seguenti k rette, tutte distinte tra di loro, e i seguenti $(k+4)$ punti, tutti distinti tra di loro:

$$C_k : \left\{ \begin{array}{l} L_{k-1} : A_k A_{k-1} \ldots \\ L_{k-2} : A_{k-1} A_{k-2} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_3 : A_4 A_3 \ldots \\ L_2 : A_3 A_{2,1} A_{2,2} \\ L_{1,1} : A_{1,1} A_{1,2} A_{2,1} \\ L_{1,2} : A_{1,3} A_{1,4} A_{2,1} . \end{array} \right.$$

Osserviamo che, per $h \geq 3$, i tre punti A_h, A_{h+1}, A_{h+2} *non possono mai essere* allineati in C_k, chè altrimenti verrebbero a coincidere la due rette L_h, L_{h+1}.

Prendiamo ora in esame la seconda (ed ultima) retta di C_k per A_k, e denotiamola con L. Varie ipotesi si possono fare:

a) L coincidente con una retta L_1; b) coincidente con una retta L_i, $i \geq 2$; c) distinta da tutte le $(k+1)$ rette prima elencate.

a) In questa ipotesi sulla L *non* possono essere situati: due tra i punti $A_{1,r}$; uno dei due punti $A_{2,s}$; il punto A_3 (giacchè altrimenti si avrebbe $L_2 \equiv L_1 \equiv L$); il punto A_{k-1} (altrimenti sarebbe $L \equiv L_{h-1}$).

Due punti A_1, un punto A_2 e il punto A_k appartengono invece certamente, per l'ipotesi fatta, alla L. Resta perciò da decidere quanti tra i $k-5$ punti rimanenti:

$$A_4, \dots, A_{k-2}$$

possono appartenere alla L. Distinguiamo per un momento i casi di k dispari e k pari.

a_1) Se k è dispari $(k = 2h-1)$, $k-5$ è pari. Se A_h $(h \geq 4)$ è sulla $L = L_1$, A_{h+1} non può essere situato sulla L (chè in tal caso verebbe $L_{h+1} \equiv L_1$); dunque i detti $k-5$ punti possono essere presi, al più « uno sì ed uno no » su L; potranno perciò appartenere ad L al più $(k-5)/2$ tra i $(k-5)$ punti prima scritti. Possiamo ora calcolare il massimo numero dei $(k+4)$ punti di C_k prima elencati che possono trovarsi su rette di C_k per A_k:

su L, al più $(k-5)/2 + 4 = (k+3)/2$;

su L_{k-1} al più due distinti dai precedenti (L_{k-1} contiene esattamente tre punti di C_k; $A_k A_{k-1} X$; X può eventualmente essere uno degli A_i; A_k è stato già computato tra i punti di L).

Dei detti $k+4$ punti, al più

$$(k+3)/2 + 2 = (k+7)/2$$

appartengono allora a rette di C_k per A_k.

Vi sono quindi perlomeno:

$$(k+4) - (k+7)/2 = (k+1)/2 = h$$

punti della C_k non situati su rette della C_k per A_k.

a_2) Se k è pari ($k = 2h$), $k - 5$ è dispari. Ricordando che i $k - 5$ punti $A_4, \ldots, A_{k-2}$ possono essere presi su L, al più, uno sì ed uno no, a cominciare per esempio da A_4, abbiamo che, di detti punti, $(k-6)/2 + 1$ al più, e cioè $(k-4)/2$, possono appartenere alla L. Ragionando come sopra, si ha che, in totale, su rette della C_k passanti per A_k possono trovarsi al più:

$$(k-4)/2 + 4 + 2 = (k+8)/2$$

tra i $(k+4)$ punti della C_k presi in esame; e perciò, fuori di siffatte rette, si troveranno ancora:

$$(k+4) - (k+8)/2 = h \quad \text{punti almeno.}$$

b), c) Questi due casi possono essere trattati insieme, e assai più succintamente. Ordiniamo infatti gli eventuali punti A_i situati sulla L secondo gli indici non decrescenti:

$$L : A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_k$$

Se $i_3 = 2$, $i_1 = i_2 = 1$, o si tratta del caso a) già esaminato, ed allora $A_{i_3+1} = A_3$ non può appartenere alla L oppure dev'essere $A_{i_1} = A_{1,1}$; $A_{i_2} = A_{1,3}$; $A_{i_3} = A_{2,2}$, e ancora A_3 non può appartenere alla L, giacchè, se così fosse, sarebbe $L \equiv L_2$, alla L apparterrebbe anche $A_{2,1}$, e la L coinciderebbe con la $L_{1,1}$ e con la $L_{1,2}$, per ipotesi distinte. Viceversa, se A_{i_3+1} può essere situato sulla L, dev'essere $i_3 \geq 3$ A_{k-1} non può mai trovarsi sulla L, giacchè in tal caso essa coinciderebbe con la L_{k-1}; rimane comunque da decidere sulla appartenenza o meno alla L di $(k-5)$ al più tra i punti A_i (se $i_3 \geq 3$, si tratta dei punti $A_{i_3+1}, \ldots, A_{k-2}$). Rispetto al caso a), insomma, il numero massimo dei punti A_i su rette di C_k per A_k non potrà aumentare, quello dei punti di C_k fuori dalle due rette L_{k-1}, L contenenti A_k non potrà diminuire.

Ritornando alla considerazione della configurazione $\overline{C}$ di P isomorfa a C_k ($k = 2h$ oppure $= 2h - 1$), esistono dunque certamente almeno h punti di $\overline{C}$ non situati su rette di $\overline{C}$ per $\overline{A}_k$. Nella nostra ipotesi iniziale, e cioè che $\overline{C}$ sia un

piano parziale di un piano finito di rango p, per $k = 2p - 1$ esisteranno p punti (distinti) di $\overline{C}$ non appartenenti alle due rette di $\overline{C}$ per $\overline{A}_k$. Congiungendo in P tali punti con $\overline{A}_k$, si ottengono p rette per A_k, oltre alla L e alla L_{k-1}; ma poichè per un punto in P passano soltanto $p + 1$ rette distinte, due tra la nominate $p + 2$ rette debbono coincidere; e ciò implica l'allineamento in P di tre punti: $\overline{A}_k$ e due punti fuori di L, L_{k-1}, il cui allineamento non figura tra quelli di $\overline{C}$. Questo vuol dire che $\overline{C}$ non è un piano parziale libero su $\overline{P}_1^4$ nel senso della nostra definizione (vedi la condizione b), in questo caso non verificata); si conclude perciò con l'affermare che, se $\overline{P}_1^4$ in un piano P genera un piano finito di rango p, il grado di libertà superiore di $\overline{P}_1^4$ è minore, o uguale, a $2p - 2$, che è quanto si voleva dimostrare.

Definizione geometrica della caratteristica di un piano grafico. Quando si dice che un piano lineare sopra un corpo K è a caratteristica p si intende dire, seguendo la definizione abituale, che p è la caratteristica del corpo K delle coordinate. Poichè il concetto algebrico di caratteristica si riferisce all'addizione di K, si potrà in taluni casi (corpi alternativi, sistemi di Veblen-Wedderburn) parlare della caratteristica di K anche quando K, anello delle coordinate rispetto a un opportuna scelta del riferimento, non è un corpo, ma è tuttavia un gruppo abeliano elementare rispetto alla « addizione naturale » (tutti gli elementi hanno il medesimo periodo rispetto alla addizione).

I teoremi or ora da noi dimostrati permettono di dare una definizione geometrica intrinseca (indipendente cioè dall'introduzione di coordinate) alla caratteristica di un piano lineare su di un corpo, purchè alla locuzione (del resto convenzionale): « caratteristica zero », si sostituisca la locuzione « caratteristica infinita ». Per quanto si è sopra visto si ha infatti che la caratteristica p di un piano lineare P sopra un corpo è legata al 1° grado di libertà superiore G di P dalla relazione:

$$G = 2(p - 1);$$

e che pertanto essa si può definire, a partire dall'*invariante geometrico G*, con la seguente formula:

$$p = (G + 2)/2$$

qualora si ponga $p = \infty$ per $G = \infty$.

Sarà allora lecita, e naturale, la seguente definizione di caratteristica per un piano grafico P in generale:

DEFINIZIONE. Chiameremo caratteristica di un piano grafico p il numero

$$p = (G + 2)/2$$

essendo G il 1° grado di libertà superiore di P, e convenendo di porre $p = \infty$ se $G = \infty$.

Anche questa definizione, come altre prima date in questo lavoro, suggerisce in modo del tutto naturale alcuni problemi; per esempio quello della « omogeneità » o meno del piano P rispetto alla caratteristica, dipendente dal fatto che p sia, o meno, la caratteristica di tutti i 4-punti di P. Ci proponiamo di affrontare in successive ricerche problemi di questo tipo, ed altri che dal presente studio sono suggeriti, avendo ritenuto opportuno mettere a fuoco in questo primo lavoro soprattutto alcuni concetti, alcune definizioni di invarianti geometrici di un piano grafico (comunque scelto), che fino ad oggi crediamo non fossero stati presi in considerazione.

BIBLIOGRAFIA

Per i « piani liberi » e l'anello ternario delle coordinate vedi:

[1] MARSHALL HALL, *Projective planes*, Trans. of the Am. Math. Soc., 54, (1943), 229-277.

[2] L. A. SKORNIAKOV, *Proektivnye ploekosti*, Uspechi mat. Nauk, 5 (46), 1951, 112-154 (in particolare i nn. 2 e 3, dedicati risp. ai piani liberi e all'anello ternario di HALL).

[3] LUCIO LOMBARDO-RADICE, *Assiomi algebrici e postulati geometrici*, Archimede, fasc. 5, 1951 (esposizione del metodo delle coordinate di HALL).

[4] DUBREIL-JACOTIN; LESIEUR; CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis* ecc., Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[5] GÜNTER PICKERT, *Projektive Ebenen*, Lange e Springer, 1955 (in corso di pubblicazione).

Per una esposizione trattatistica in lingua italiana dei fondamenti della teoria dei piani grafici:

[6] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, I, Zanichelli, Bologna, 1948.

[7] G. ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, Liguori, Napoli, 1952.

Per piani a caratteristica 3:

[8] L. LOMBARDO-RADICE, *Sul rango dei piani grafici finiti a caratteristica* 3, Bollettino U.M.I., 1955 (in corso di pubblicazione).