RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE VACCARO

Sui sistemi lineari di cubiche per 5 punti di cui 3 allineati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 287-299

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__287_0>

SUI SISTEMI LINEARI DI CUBICHE PER 5 PUNTI DI CUI 3 ALLINEATI

Nota (*) *di* GIUSEPPE VACCARO (a Roma)

È noto che la generica superficie F_4 del 4° ordine con conica doppia può essere rappresentata su un generico piano π, in guisa che le sezioni piane abbiano come immagini ∞^3 cubiche per 5 punti base $A_1, \ldots, A_5$. Viceversa si dimostra che un sistema lineare di ∞^3 cubiche per 5 punti semplici $A_1, \ldots, A_5$ rappresenta il sistema delle sezioni piane di una F_4 con conica doppia.

Ogni particolarizzazione della posizione dei 5 punti $A_1, \ldots, A_5$ si riflette in una particolarizzazione delle F_4.

Uno studio della superficie F_4 con conica doppia ed alcune sue particolarizzazioni, definite da un sistema lineare di cubiche per 5 punti $A_1, \ldots, A_5$, si trova nel volume di F. CONFORTO « *Le Superficie razionali* » [1]); in esso è esaminato pure il caso in cu la conica della F_4 è cuspidale. In questo caso nella sua rappresentazione piana mediante cubiche per 5 punti $A_1, \ldots, A_5$, il punto A_2 è infinitamente vicino ad A_1 ed A_3, A_4, A_5, sono in linea retta, e la conica cuspidale è rappresentata da una C_3 per $A_1, \ldots, A_5$ spezzata in una retta r per A_1 contata due volte e nella retta $A_3A_4A_5$.

Nella presente nota ho voluto riprendere lo studio dei sistemi lineari ∞^3 di cubiche per 5 punti di cui 3 allineati, giacchè essi danno luogo a diversi tipi, ed ognuno di essi è rappresentativo di una particolare superficie F_4 del 4° ordine.

(*) Pervenuta in Redazione il 16 Aprile 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Roma.

1) Cfr. F. CONFORTO, *Le superficie Razionali*, Zanichelli, Bologna, 1945, pp. 134-160.

Ed anche per il caso studiato dal Conforto credo valesse la pena riprendere la questione, giacchè per es. nel citato volume del Conforto, per costruire l'unico sistema lineare ∞^3 di C_3 per $A_1, \ldots, A_5$ con A_2 infinitamente vicino ad A_1 ed $A_3A_4A_5$ allineati, rappresentativo di una F_4 con conica cuspidale rappresentata da una retta r data ad arbitrio per A_1, si costruisce prima il sistema delle quartiche passanti doppiamente per due punti A, B e semplicemente per 4 punti $A_1A_2A_3A_4$ rappresentativo di una F_4 con conica cuspidale e si trasforma poi tale sistema con una trasformazione quadratica che ha punti fondamentali in A, B, A_1, nel voluto sistema di cubiche.

Nella presente nota si perviene direttamente al voluto sistema di cubiche.

Un'analisi approfondita dei sistemi lineari di cubiche in esame permette inoltre di ottenere molte proprietà delle F_4 da essi rappresentate.

1. Supponiamo dati su un piano π 5 punti $A_1, \ldots, A_5$ e siano i punti A_3, A_4, A_5 in linea retta. La conica C_2 per essi, si spezza nella retta $t \equiv A_1A_2$ e nella retta $s \equiv A_3A_4A_5$.

Se i due punti A_1, A_2 sono distinti, le coppie di rette per essi costituiscono un sistema algebrico ∞^2 di indice 2.

Se invece $A_1 \equiv A_2$, le coppie di rette per essi costituiscono un sistema lineare ∞^2 o *rete,* che associata alla retta s, dà una rete di cubiche C_3 per i 5 punti.

In questa ipotesi, e *dato* un sistema lineare ∞^3 di C_3, $|C_3|$, per i 5 punti questo sistema, o contiene tutta la rete precedente, o, come accadrà in generale, ha in comune con essa un fascio: cioè o tutte le coppie di rette per $A_1 \equiv A_2$ insieme con la retta s appartengono al sistema $|C_3|$, oppure vi è una involuzione di coppie di rette che insieme ad s, danno curve di $|C_3|$.

Dette x, y z le coordinate proiettive omogenee di un punto del piano π, siano $(0, 0, 1)$ le coordinate di A_1, sia $x = 0$ l'equazione della retta $t \equiv A_1A_2$, ed i punti A_3, A_4, A_5 siano definiti su $z = 0$ da $\varphi_3(x, y) = 0$ ove $\varphi_3(x, y)$ è una forma di 3° grado in x, y.

Nel primo caso, per definire il sistema $\infty^3 \mid C_3 \mid$ possono assumersi le curve:

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} &z\varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) = xz^2 \\ &z\psi_2(x, y) = 0 \\ &z\theta_2(x, y) = 0 \\ &z\chi_2(x, y) = 0 \end{aligned}$$

ove φ_2, ψ_2, θ_2, χ_2 sono forme di 2° grado in x, y.

Nel secondo caso per definire il sistema $\infty^3 \mid C_3 \mid$ possono assumersi le curve:

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} &z\varphi_2(x, y) + a\varphi_3(x, y) = z^2x \\ &z\psi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) = 0 \\ &z\theta_2(x, y) = 0 \\ &z\chi_2(x, y) = 0 \end{aligned}$$

ed anzi in questo caso può farsi $a = 0$ ponendo in evidenza la conica non degenere che insieme ad $s \equiv A_3A_4A_5$ $(z = 0)$ appartiene al sistema dato. Anche nel primo caso con opportuna scelta, la rappresentazione del sistema può semplificarsi: si ha così per i due casi:

$$\mathrm{I} \left\{ \begin{aligned} &z^2x - \varphi_3(x, y) = 0 \\ &zx^2 = 0 \\ &zxy = 0 \\ &zy^2 = 0. \end{aligned} \right. \qquad \mathrm{II} \left\{ \begin{aligned} &z^2x - z\varphi_2(x, y) = 0 \\ &z\psi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) = 0 \\ &z\theta_2(x, y) = 0 \\ &z\chi_2(x, y) = 0 \end{aligned} \right.$$

Nel caso I dette x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate omogenee di un punto dello S_3 e posto:

$$(1.3) \qquad x_0 = z^2x - \varphi_3(x, y), \quad x_1 = zx_2, \quad x_2 = zxy, \quad x_3 = zy^2$$

si ha un cono quadrico: $x_1x_3 - x_2^2 = 0$

2. Prendiamo in esame il caso II. In questo caso l'involuzione definita da $\theta_2(x, y) = 0$, $\chi_2(x, y) = 0$ può essere non degenere o degenere.

Se è non degenere, una delle rette doppie è certo diversa da $x = 0$; assumiamola come $y = 0$, quindi si può porre p. es. $\theta_2(x, y) \equiv y^2$. Come $\chi_2(x, y) = 0$ potrà prendersi la coppia costituita da $x = 0$ e dalla sua coniugata nella involuzione: $x + by = 0$, quindi $\chi_2(x, y) \equiv x(x + by)$.

Può porsi:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} x_0 &= z^2x + hzxy \\ x_1 &= kzxy + \varphi_3(x, y) \\ x_2 &= y^2z \\ x_3 &= x(x + by)z \end{aligned}$$

dove:

$$(2.2)\qquad \varphi_3(x, y) = \alpha x_3 + \beta x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3.$$

Le (2.1) rappresentano una superficie F_4 del 4° ordine.

Il piano $x_2 = 0$ taglia tale superficie in una conica ($x = z^2$, $x_1 = \alpha x^2$, $x_2 = 0$, $x_3 = xz$) da contarsi due volte finchè sia $\alpha \neq 0$, cioè finchè sulla $y = 0$ non cada un altro punto base p. es. A_5. Supponendo quindi $\alpha \neq 0$, può porsi $\alpha = 1$, ed allora le C_3 assunte ad individuare il sistema $|C_3|$ sono:

1) La C_3 spezzata nella retta s, nella retta t, ed in un'altra retta $z + hy = 0$ per $R \equiv r \cdot s$ essendo $r(y = 0)$ una retta per A_1.

2) La C_3 con un punto doppio (almeno) in A_1 e con tangenti ivi le rette r e t e passante per A_3, A_4, A_5 (è la C_3 del fascio definito da queste condizioni appartenente a $|C_3|$).

3) La C_3 spezzata in s e nella retta r per A_1 contata due volte.

4) La C_3 spezzata in s, t, ed in un'altra retta per $A_1(x + by = 0)$.

Quindi dati $t \equiv A_1A_2$, $s \equiv A_3A_4A_5$ ed r (ed i punti A_i) per definire un sistema $|C_3|$ del tipo voluto occorre ancora fissare una retta nel fascio 1), una retta nel fascio 4) ed una cubica nel fascio 2).

Si può pertanto concludere:

Dati i punti A_i ed r vi sono ∞^3 sistemi $|C_3|$ del tipo voluto.

3. Sempre nell'ipotesi che stiamo esaminando, ad $x = 0$ corrisponde sulla superficie (2.1) la retta $x_0 = x_3 = 0$.

Consideriamo un piano generico $x_0 = \mu x_3$ per questa retta e cerchiamone la intersezione con la superficie.

Si ha:

$$zx(z+hy)=\mu xz(x+by). \tag{3.1}$$

Quindi tolto $x=0$ (cioè la retta $x_0=x_3=0$) e $z=0$ (che dà il punto 0, 1, 0, 0 comune alla retta $x_0=x_3=0$ ed alla conica doppia), si ha:

$$z+hy=\mu x+\mu by$$

cioè:

$$z=\mu x+(\mu b-h)y.$$

Per studiare questa ulteriore intersezione proiettiamola p. es. su $x_0=0$. Si ha:

$$\begin{aligned} x_1&=k\{\mu x+(\mu b-h)y\}xy+\varphi_3(x,y)\\ x_2&=y^2\{\mu x+(\mu b-h)y\}\\ x_3&=x(x+by)\{\mu x+(\mu b-h)y\} \end{aligned}$$

Per studiare l'ulteriore punto di intersezione di questa cubica con la conica corrispondente a $y=0$, facciamo $x=1$ (i due parametri x, y entrano omogeneamente) e introduciamo le coordinate non omogenee $X=x_2/x_1$, $Y=x_3/x_1-\mu$; si ha:

$$X=\frac{\mu y^2+(b\mu-h)y^3}{1+(\beta+k\mu)y+\ldots}=\mu y^2+[\mu(b-\beta)-h-k\mu^2]y^3+\ldots$$

$$Y=\frac{\mu+(2b\mu-h)y+b(\mu b-h)y^2}{1+(\beta+k\mu)y+[k(\mu b-h)+\gamma]y^2+\delta y^3}-\mu=$$
$$=[2b\mu-h-\mu(\beta+k\mu)]y+[2]_y.$$

In generale dunque, questa sezione tocca il piano $x_2=0$ nel punto μ^2, 1, 0, μ. Ma questo punto diviene una cuspide per la sezione se risulta $Y=[2]_y$ cioè se:

$$2b\mu-h-\mu(\beta+k\mu)=0$$

ossia:

$$h+(\beta-2b)\mu+k\mu^2=0$$

e se ciò deve accadere per ogni μ, deve essere: $h=k=0$, $\beta=2b$.

In questo caso la conica corrispondente a $y=0$ sulla superficie è cuspidata e per la F_4 si hanno le equazioni:

$$
(3.2)\qquad \begin{aligned} x_0 &= xz^2 \quad , \quad x_1 = x^3 + 2bx^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3 \,, \\ x_2 &= y^2 z \quad , \quad x_3 = x(x+by)z \,. \end{aligned}
$$

Ciò pone in evidenza che il sistema $|C_3|$ contiene le seguenti curve (ed è determinato da esse):

1) La cubica ts^2; 2) la terna di rette per A_1 e per gli ulteriori tre punti base $A_3A_4A_5$; 3) la cubica r^2s; 4) la cubica spezzata in s, t ed in una retta per A_1 che è determinata dalla terna di rette 2) (cioè dai punti base) e da r. Infatti la polare seconda di r rispetto alla terna è la retta $x + \frac{2}{3} by = 0$; il birapporto di questa, della $x + by = 0$, di $y = 0$ e di $x = 0$ *vale* $\frac{2}{3}$ e definisce la seconda retta. Sicchè: *Date t con il punto $A_1 \equiv A_2$, s coi punti $A_3A_4A_5$ ed r per A_1 (ma non per A_i con $i \geq 3$) è unico il sistema ∞^3 C_3 rappresentativo di una F_4 con conica cuspidale (rappresentata su r contata due volte).*

L'altra retta doppia dell'involuzione definita da $y^2 = 0$ e $x(x+by) = 0$, retta data da $x + \frac{b}{2} y = 0$, rappresenta pure una conica di F_4 da contarsi due volte sul suo piano $x_3 + \frac{b^2}{4} x_4 = 0$. Essa è rappresentata parametricamente da:

$$
(3.3)\qquad \begin{aligned} x_0 &= -\frac{b}{2} z^2, \quad x_1 = \left(\frac{3}{8} b^3 - \gamma \frac{b}{2} + \delta\right) y^2, \quad x_2 = yz, \\ x_3 &= -\frac{b^2}{4}\, yz \,. \end{aligned}
$$

L'equazione della F_4 si ottiene per eliminazione di $x = u$, $y = v$, $z = 1$ da:

$$
X = \frac{x_1}{x_0} = u^2 + 2buv + \gamma v^2 + \delta \frac{v^3}{u} \,, \quad Y = \frac{x_2}{x_0} = \frac{v^2}{u} \,,
$$

$$
Z = \frac{x_3}{x_0} = u + bv
$$

e si ha, dopo facili calcoli:

$$B^2Y^2Z^2 = B(b^2Y+2Z)(bX-\delta YZ-bZ^2)Y-(bX-\delta YZ-bZ^2)^2 \tag{3.4}$$

ove $B = b\gamma - \delta - b^3$; o di nuovo in coordinate omogenee:

$$\begin{aligned} B^2x_2^2x_3^2 &= B(b^2x_2 + 2x_3)(bx_0x_1 - \delta x_2x_3 - bx_3^2)x_2 - \\ &- (bx_0x_1 - \delta x_2x_3 - bx_3^2)^2 . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Secando tale supeficie (3.5) con $x_0 = 0$ o con $x_1 = 0$ si ottengono su ciascuno 4 rette segate dai piani $x_3 = 0$ e

$$B^2x_2^2x_3 + B(b^2x_2 + 2x_3)x_2(\delta x_2 + bx_3) + (\delta x_2 + bx_3)^2x_3 = 0.$$

Sulla rappresentazione piana si consideri una conica per $A_1A_2A_3A_4$ e una retta per A_5: fissata la conica, al variare della retta si ha un fascio di C_3 in $|C_3|$. Cioè fissata una conica per $A_1 \dots A_4$ viene fissata una retta per A_5, e retta e conica formano una C_3 immagine di una sezione piana. Tanto la conica quanto la retta sono immagini di coniche di F_4: si hanno quindi due sistemi ∞^1 (fasci) di coniche coniugati nel senso che ad ogni conica del primo sistema è associata una conica del secondo sistema giacente nel piano di quella e costituente con essa una sezione piana.

Scambiando l'ufficio dei punti $A_3A_4A_5$ si hanno 6 fasci di coniche coniugati a coppie in tre sistemi ∞^1 di piani.

Per averne la rappresentazione analitica si ponga anzitutto:

$$\varphi_3(x, y) = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y)$$

quindi $2b = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, e si consideri la retta, nel piano di $|C_3|$, $z = \mu(x - \alpha_3 y)$. Ad essa su F_4 corrisponde la conica:

$$\begin{aligned} &x_0 = \mu^2 x(x - \alpha_3 y), \quad x_1 = (x - \alpha_2 y)(x - \alpha_2 y), \quad x_2 = \mu y^2, \\ &x_3 = \mu x(x + by) \end{aligned} \tag{3.6}$$

appartenente al piano:

$$x_0 + \mu(\mu x_1 - \alpha_1\alpha_2 x_2) - 2\mu x_3 = 0.$$

Alla conica del piano rappresentativo:

$$\mu(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) = xz$$

corrisponde in F_4 la conica:

$$(3.7) \qquad \begin{aligned} &x_0 = \mu^2(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y), \quad x_1 = (x - \alpha_3 y)x, \quad x_2 = \mu y^2; \\ &x_3 = \mu x(x + by) \end{aligned}$$

appartenente pure allo stesso piano: sicchè le (3.6) e (3.7) sono le equazioni di 2 coniche coniugate. I loro piani si distribuiscono in tre inviluppi conici di vertici $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\alpha_i\alpha_k (i \neq k)$ proiettanti la conica cuspidale $x_0 x_1 = x_3^2$.

4. Passiamo a considerare il caso in cui pur essendo l'involuzione del caso II non degenere, risulti però $\alpha = 0$, cioè uno dei punti A_3, A_4, A_5 (almeno) cada sulla retta doppia $y = 0$.

Si hanno per la F_4 le equazioni parametriche:

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} &x_0 = z^2 x + hxyz, \quad x_1 = kxyz + y\psi_2(x, y); \quad x_2 = y^2 z, \\ &x_3 = x(x + by)z \end{aligned}$$

ove:

$$(4.2) \qquad \psi_2(x, y) = \alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \gamma_1 y^2$$

Alla retta $y = 0$ corrisponde in questo caso sulla F_4 (4.1) la retta $x_1 = x_2 = 0$; essa contata due volte appartiene all'intersezione del piano $x_2 = 0$ con la F_4.

Appartiene pure alla F_4 la retta che si ottiene per $x = 0$, cioè $x_0 = x_3 = 0$. Un piano generico per questa retta, $x_0 = \mu x_3$ interseca la F_4 ulteriormente nella cubica Γ che ha per proiezione su $x_0 = 0$:

$$(4.3) \qquad \begin{aligned} &x_1 = kxy \{ \mu x + (\mu b - h)y \} + y\psi_2(x, y) \\ &x_2 = y^2 \{ \mu x + (\mu b - h)y \} \\ &x_3 = x(x + by) \{ \mu x + (\mu b - h)y \} \end{aligned}$$

Questa nell'intorno del punto $x = 1$, $y = 0$ (proiezione su $x_0 = 0$ del punto comune alla Γ ed alla retta doppia

$x_1 = x_2 = 0)$; si scrive:

$$
(4.4) \qquad \begin{aligned} x_1 &= (k\mu + \alpha_1)y + [2]_y \\ x_2 &= \mu y^2 + [3]_y \\ x_3 &= \mu + [1]_y \end{aligned}
$$

ove con $[1]_y$, $[2]_y$, $[3]_y$ si sono indicati termini rispettivamente di 1° di 2° e 3° grado in y.

Dalle (4.4), passando a coordinate non omogenee $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ si vede che quel punto è regolare per la sezione, a meno che sia $k\mu + \alpha_1 = 0$; e se ciò accade per ogni μ è:

$$
(4.5) \qquad k = \alpha_1 = 0 .
$$

In questo caso, e solo in questo caso, la retta $x_1 = x_2 = 0$ è *cuspidale*.

Le equazioni di F_4 diventano allora:

$$
x_0 = z^2x + hxyz, \quad x_1 = y^2(x - \lambda y), \quad x_2 = y^2z, \quad x_3 = x(x + by)z.
$$

Per avere l'equazione cartesiana della superficie poniamo:

$$
(4.6) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = 1, \quad \frac{x_0}{x_3} = X, \quad \frac{x_1}{x_3} = Y, \quad \frac{x_2}{x_3} = Z.
$$

Eliminando u, v tra X, Y, Z, si trova facilmente:

$$
(4.7). \quad Z \{ (\lambda + b)Z - hY \} (bXY + \lambda Z - hY) = (XY - Z)^2
$$

cioè di nuovo in coordinate omogenee.

$$
(4.8) \quad x_2 \{ (\lambda + b)x_2 - hx_1 \} (bx_0x_1 + \lambda x_2x_3 - hx_1x_3) = (x_0x_1 - x_2x_3)^2.
$$

Se tagliamo la (4.7) con un piano $X = lY + mZ + q$, e proiettiamo la sezione parallelamente all'asse X su $X = 0$, otteniamo una cubica con cuspide in $Y = Z = 0$: il che conferma appunto che la retta $Y = Z = 0$ $(x_1 = x_2 = 0)$ è *cuspidale*.

Invece la retta $X = Z = 0$ è per la (4.7), ossia la retta $x_0 = x_2 = 0$ è per la (4.8), come si verifica facilmente, *parabolica* ed ha come piano tangente fisso il piano $x_2 = 0$ (che seca inoltre F_4 nella retta cuspidale). Allora come è noto [2]) sulla retta $x_0 = x_2 = 0$ debbano essere tre punti doppi per F_4. Si verifica facilmente che essi sono i punti $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ (che ne assorbe 2) e $x_0 = x_2 = x_3 = 0$.

Le due rette $x_0 = x_3 = 0$ e $x_1 = x_3 = 0$ appartengono pure alla F_4, però sono regolari, cioè a piano tangente variabile da punto a punto.

La quadrica $x_0x_1 - x_2x_4 = 0$ tocca la F_4 in tutti i punti della retta cuspidale (che quindi conta per 3 nella intersezione della quadrica con F_4), passa per la retta parabolica e per le 2 rette regolari trovate e inoltre tocca F_4 in tutti i punti della retta

$$hx_1 = (\lambda + b)x_2, \quad hx_3 = (\lambda + b)x_0.$$

Le quadriche del fascio $x_0x_1 = \nu x_2x_3$ secano F_4 secondo la retta cuspidale contata due volte, la retta parabolica, le due rette regolari trovate ed inoltre in cubiche sghembe appartenenti ai coni

$$\{ (\lambda + b)x_2 - hx_1 \} \{ (\lambda + b\nu)x_2 - hx_1 \} = (\nu - 1)^2 x_2 x_3$$

aventi tutti per vertice (1, 0, 0, 0). Quelle cubiche passano tutte per questo punto e per il punto (0, 0, 1, 0).

Osserviamo che le condizioni (4.5) perchè la retta $x_1 = = x_2 = 0$ sia cuspidale portano di conseguenza che sulla retta $s \equiv z = 0$ due dei punti A_3, A_4, A_5 vengono a coincidere, p. es. A_3 ed A_4.

Ad una retta nel piano di $| C_3 |$ passante per A_5

$$z = \mu (x - \lambda y)$$

corrisponde su F_4 la conica:

$$x_0 = \mu^2 x(x - \lambda y) + hxyz, \quad x_1 = y^2, \quad x_2 = \mu y^2, \quad x_3 = \mu x(x + by)$$

appartenente al piano:

$$\mu x_1 - x_2 = 0$$

il quale seca la F_4 ulteriormente nella retta cuspidale.

---

2) Cfr. E. BOMPIANI. *Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie Algebrica*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. I, (1946).

È da osservare infine che data la configurazione dei punti base $A_1 \equiv A_2$, A_3, A_4, A_5 allineati con $A_3 \equiv A_4$ esistono $\infty^2 F_4$ del tipo in esame (h e b variabili).

5. Rimane da studiare l'ipotesi che l'involuzione di cui al n. 2 sia degenere: essa dà luogo a due casi a seconda che la retta fissa (coniugata ad ogni retta per A_1) è diversa da $x = 0$ oppure coincide con $x = 0$.

Nel primo caso per definire un sistema $|C_3|$ possono assumersi le curve:

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} &xz^2 + hx^2z = 0 \\ &kx^2z + \varphi_3(x, y) = 0 \\ &y^2z = 0 \\ &xyz = 0 \end{aligned}$$

ove, al solito $\varphi_3(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = 0$ definisce sulla retta $z = 0$ i punti A_3, A_4, A_5.

Le rette $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ hanno ciascuna significato geometrico.

Posto:

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} x_0 &= xz^2 + hx^2z \\ x_1 &= kx^2z + \varphi_3(x, y) \\ x_2 &= y^2z \\ x_3 &= xyz \end{aligned}$$

si ottiene una superficie F_4 del quarto ordine, la cui equazione in coordinate omogenee è:

$$(5.3)\qquad x_1x_2(x_0x_2 - hx_3^2) = kx_3^2(x_0x_2 - hx_3^2) + x_3\varphi_3(x_3, x_2).$$

Il piano $x_2 = 0$ taglia tale F_4 nella retta $x_2 = x_3 = 0$ contata quattro volte. Tale retta è luogo di punti doppi tecnodali per F_4 con piano tangente doppio fisso ($x^2 = 0$). Un piano generico per tale retta $x_2 = \mu x_3$ taglia ulteriormente la F_4 nella conica:

$$(5.4)\qquad \mu^2x_0x_1 - \mu hx_1x_3 = kx_3(\mu x_0x_3 - hx_3^2) + x_3^2\varphi(1, \mu).$$

Tale conica passa, qualunque sia μ, per i punti $x_1 = 1$, $x_0 = x_2 = x_3 = 0$ e $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ che pertanto risultano tripli per F_4.

Posta $x_0 = 1$, $x_1 = X$, $x_2 = Y$, $x_3 = Z$, la (5.3) si scrive:

$$XY(Y - hZ^2) = kZ^2(Y - hZ^2) + Z\varphi_3(Z, Y).$$

Secando tale superficie con un piano:

$$X = lY + mZ + p$$

e proiettando la sezione ottenuta su $X = 0$ si ha:

$$Y(lY + mZ + p)(Y - hZ^2) = kZ^2(Y - hZ^2) + Z\varphi_3(Z, Y)$$

il punto $Y = Z = 0$ risulta un tacnodo per tale curva e si ritrova così che la retta $x_2 = x_3 = 0$ è luogo di punti doppi tacnodali per la F_4 (5.3).

Le rette $x_1 = x_3 = 0$, e $x_0 = x_3 = 0$ appartengono anch'esse alla F_4.

Queste F_4, dati i punti A_i e $y = 0$, sono ∞^2 (se $\alpha \neq 0$).

Nel secondo caso, cioè se la retta coniugata ad ogni retta per A_1 coincide con $x = 0$, per definire il sistema $|C_3|$ possono assumersi le curve:

$$\text{(5.5)} \qquad \begin{aligned} &xz^2 + hzy^2 = 0 \\ &ky^2z + \varphi_3(x, y) = 0 \\ &x^2z = 0 \\ &xyz = 0 \end{aligned}$$

ove $x = 0$ e $z = 0$ hanno significato geometrico, ma non così $y = 0$ che è una retta qualsiasi per A_1.

Dare h equivale a dare un E_2 per A_1A_2, tale che le coniche per esso e tangenti a $z = 0$ formino insieme con $z = 0$ C_3 del sistema.

Dare la cubica $ky^2z + \varphi_3(x, y) = 0$ o una qualsiasi delle ∞^1 che si possono sostituire ad essa $(k(y - \rho x)^2z + \varphi_3(x, y) = 0)$ equivale a dare il punto H su $x = 0$ per il quale si vuole che queste cubiche passino $\left(x = 0,\ y = -\frac{k}{\delta}\right)$ sempre che queste cubiche non siano spezzate, quindi $k \neq 0$, $\alpha \neq 0$).

Quindi in questo caso *il sistema* $|C_3|$ *è individuato dai punti* $A_1 \equiv A_2$, A_3, A_4, A_5 *allineati, da un* E_2 *tangente in* A_1A_2, *da un ulteriore punto* H *della retta* A_1A_2.

Dati i punti A_i vi sono dunque ∞^2 $|C_3|$ di questo tipo.

Si osservi che tutte le C_3 di $|C_3|$ per H formano una rete di curve nodate in A_1.

Posto al solito:

$$(5.6) \qquad \begin{aligned} x_0 &= xz^2 + hy^2z \\ x_1 &= ky^2z + \varphi_3(x, y) \\ x_2 &= x^2z \\ x_3 &= xyz \end{aligned}$$

si ottiene una F_4 la cui equazione in coordinate omogenee si ottiene facilmente:

$$(5.7) \qquad x_1x_2(x_0x_2 - hx_3^2) = kx_3^2(x_0x_2 - hx_3^2) + x_2\varphi_3(x_3, x_2).$$

Anche per questa superficie la retta $x_2 = x_3 = 0$ è luogo di punti tacnodali con piano tangente doppio $x_2 = 0$. Un piano generico per questa retta $x_2 = \mu x_3$ taglia ulteriormente la F_4 nella conica:

$$\mu^2 x_0x_1 - \mu h x_1x_3 = k(\mu x_0x_3 - hx_3^2) + \mu x_3\varphi_3(1, \mu)$$

che passa, qualunque sia μ, per i punti $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 1$, $x_0 = x_2 = x_3 = 0$ che risultano pertanto tripli per F_4.

Il piano $x_3 = 0$ taglia la F_4 oltre che nella retta doppia, nella conica:

$$x_0x_1 = \delta x_2^2.$$

É facile ricavare le ulteriori proprietà della (5.7).