

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sopra un problema della dinamica del binario

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 24 (1955), p. 230-244

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__230_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UN PROBLEMA DELLA DINAMICA DEL BINARIO

Nota () di GIUSEPPE COLOMBO (a Padova)*

In una notevole ricerca di parecchi anni addietro il prof. Krall dopo aver posto in una prima nota ¹⁾ i fondamenti della dinamica del binario, determinava in un successivo lavoro ²⁾ la velocità critica di un carico concentrato mobile di moto uniforme sulla rotaia supposta infinita, tenendo conto dell'inerzia che accompagna il carico. Egli giungeva così a giustificare un valore critico della velocità che risulta, nei casi concreti, molto inferiore a quello già trovato, trascurando l'inerzia del carico, dal Timoshenko e molto più prossimo al valore critico sperimentale.

Poichè in pratica anzichè di un carico isolato si tratta di un treno di carichi viaggiante rigidamente sul binario mi sono posto il quesito di ricercare i valori critici della velocità in questo caso.

Con valore critico caratteristico v_m^* di un carico m intenderò il valore della velocità critica relativa a quel carico, pensando che esso si muova sul binario da solo, e denoterò con v_k la velocità critica caratteristica del binario, valutata secondo Timoshenko.

(*) Pervenuta in Redazione il 9 aprile 1955.

Indirizzo dell'A: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ G. KRALL, *Problemi della dinamica del binario*, [Rend. Acc. Lincei, serie XI, vol. XII, pp. 223-226, 1930]

²⁾ G. KRALL, *Velocità critiche di masse pesanti su di un binario*, [Rend. Acc. Lincei, serie VI, vol. XII, pp. 510-514, 1930].

Considererò il caso che sieno presenti due carichi concentrati, m_1 , m_2 , ($m_1 > m_2$), distanti $2l$, e troverò l'equazione che definisce i valori critici.

Rilevato un comportamento singolare al tendere di m_2 verso m_1 , che troverà una adeguata spiegazione, dimostrerò che il minimo valore critico, relativo all'insieme dei due carichi, è, per $m_1 \neq m_2$, sempre inferiore a $v_{m_1}^*$. Nel caso che $v_{m_1}^* < \frac{1}{2} v_k$, troverò che tale valore critico minimo certamente non è inferiore a $v_{m_1+m_2}^*$. Supposto inoltre $m_1 > \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)m_2$ dimostrerò l'esistenza di distanze, che dirò ottime, in relazione alle quali è nulla l'influenza della presenza del secondo carico m_2 sulla minima velocità critica che risulta così $v_{m_1}^*$.

E' ovvio che se la distanza dei due carichi supera un certo valore, facilmente valutabile, risulta praticamente $v_{m_1}^*$ la minima velocità critica.

Finirò con il tracciamento di alcuni diagrammi espressivi e con una valutazione numerica relativa ad un caso concreto.

1. Impostazione del problema e determinazione della soluzione stazionaria.

Schematizziamo al solito la rotaia in un'asta elastica infinitamente lunga, appoggiata su suolo elastico π e siano: B , ν il coefficiente di rigidità della rotaia e rispettivamente della fondazione e μ la massa dell'armamento per unità di lunghezza. Assumiamo come asse x l'asse della rotaia. Su di questa viaggi una distribuzione rigida di carico $p(x, t) = p(x - vt)$ che si sposta di moto uniforme con velocità v .

Volendo studiare le vibrazioni della rotaia sul piano normale al piano π passante per il suo asse, qualora si tenga conto dell'inerzia del carico, si istituisce la seguente equazione differenziale lineare nello spostamento $w(x, t)$ normale a π

$$(1) \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nu w = p(x - vt) \left(1 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right).$$

La soluzione stazionaria cioè quella che porge la configurazione fissa della rotaia rispetto ad un osservatore che viaggia col carico, si ottiene ponendo $z = x - vt$ nella (1). Si arriva così alla seguente equazione ordinaria nella $w(z)$

$$(2) \quad B \frac{d^4 w}{dz^4} + \mu v^2 \left(1 + \frac{p(z)}{\mu} \right) \frac{d^2 w}{dz^2} + vw = p(z).$$

Se si suppone che $p(z)$ si riduca a due carichi p_1, p_2 concentrati in due punti C_1, C_2 , distanti $2l$ il problema si riduce a quello elementare di ricercare una soluzione dell'equazione

$$(3) \quad B \frac{d^4 w}{dz^4} + \mu v^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + vw = 0,$$

continua con la derivata prima e seconda su tutto l'asse reale z , che si annulli all'infinito e che presenti nei punti C_1, C_2 , le discontinuità nelle derivate terze concomitanti con la presenza in quei punti dei carichi concentrati p_1, p_2 , dotati di inerzia.

Dovrà dunque essere in base all'ultima condizione, con evidente significato dei simboli

$$(4) \quad \left(B \frac{d^3 w}{dz^3} \right)_{C_i} - \left(B \frac{d^3 w}{dz^3} \right)_{C_i} = P_i \left[1 - \frac{v^2}{g} \left(\frac{d^2 w}{dz^2} \right)_{C_i} \right].$$

L'integrale generale di (3) si determina subito. Si ha precisamente che esso, qualora si ponga

$$(5) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{1 - k\lambda} & , & \sigma = \sqrt{1 + k\lambda} \\ \lambda = \sqrt[4]{\frac{v}{4B}} & , & k = \frac{v^2}{v_k^2} & , & v_k = \sqrt[4]{\frac{4Bv}{\mu}} \end{cases}$$

assume la forma

$$(6) \quad w = b_1 e^{-\rho z} \cos \sigma z + b_2 e^{-\rho z} \sin \sigma z + b_3 e^{\rho z} \cos \sigma z + b_4 e^{\rho z} \sin \sigma z.$$

Per determinare l'integrale soddisfacente alle condizioni poste cominceremo con l'assumere l'origine delle z nel punto C_2 ove si presenta la discontinuità nello sforzo di taglio do-

vuta alla presenza del carico inerte p_2 , e denoteremo con w_2 la funzione che fornisce lo spostamento $w(z)$ nel tratto $z \geq 0$.

La condizione che per $z \rightarrow \infty$ sia $w \rightarrow 0$ porge quindi per w_2 la seguente espressione

$$(7) \quad w_2 = a_1 e^{-\rho z} \cos \sigma z + a_2 e^{-\rho z} \sin \sigma z.$$

Le condizioni di continuità nell'origine e la condizione (4) relativa al carico p_2 fornisce per i coefficienti b_1, b_2, b_3, b_4 , che definiscono la w , mediante (6), nel tratto $(-2l, 0)$, le seguenti espressioni

$$(8) \quad b_1 = a_1 - \frac{A_2'}{4\rho(\rho^2 + \sigma^2)}, \quad b_2 = a_2 - \frac{A'}{4\sigma(\rho^2 + \sigma^2)},$$

$$b_3 = \frac{A'}{4\rho(\rho^2 + \sigma^2)}, \quad b_4 = \frac{-A'}{4\sigma(\rho^2 + \sigma^2)},$$

ove si è posto

$$(9) \quad A' = \frac{r_2}{B} \left\{ 1 - \frac{v^2}{g} [\rho^2 - \sigma^2] a_1 - 2\rho\sigma a_2 \right\}.$$

D'altra parte se si assume l'origine delle z nel punto C_1 e si denota con $w_1(z)$ ciò che diviene $w(z)$ nel tratto che rispetto al nuovo riferimento corrisponde al campo di variabilità $(-\infty, 0)$ per la z , e si pone, nel tratto $(0, 2l)$

$$(10) \quad w(z) = \bar{w}(z) = b_1' e^{-\rho z} \cos \sigma z + b_2' e^{-\rho z} \sin \sigma z +$$

$$+ b_3' e^{\rho z} \cos \sigma z + b_4' e^{\rho z} \sin \sigma z,$$

la condizione $w_1(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow -\infty$ comporta che $w_1(z)$ sia del tipo

$$(11) \quad w_1(z) = c_1 e^{\rho z} \cos \sigma z + c_2 e^{\rho z} \sin \sigma z,$$

mentre in base alle condizioni che devono essere verificate in C_1 si ottiene

$$(12) \quad b_1' = \frac{C'}{4\rho(\rho^2 + \sigma^2)}, \quad b_2' = \frac{C'}{4\sigma(\rho^2 + \sigma^2)},$$

$$b_3' = c_1 - \frac{C'}{4\rho(\rho^2 + \sigma^2)}, \quad b_4' = c_2 + \frac{C'}{4\sigma(\rho^2 + \sigma^2)},$$

ove si è posto

$$(13) \quad C' = \frac{p_1}{B} \left\{ 1 - \frac{v^2}{g} [(\rho^2 - \sigma^2)c_1 + 2\rho\sigma c_2] \right\}.$$

Per determinare a_1 , a_2 , c_1 , c_2 , basterà ora tener conto che deve essere verificata l'identità

$$(14) \quad w(z) = \bar{w}(z - 2l).$$

In base a questa si perviene quindi, dopo calcoli relativamente laboriosi, al seguente sistema lineare

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1\rho - a_2\sigma + \alpha c_1 e^{-2\rho l} + \beta c_2 e^{-2\rho l} = 0, \\ \alpha a_1 e^{-2\rho l} - \beta a_2 e^{-2\rho l} + c_1\rho + c_2\sigma = 0, \\ c_1 \left[\alpha - p_1 \frac{v^2}{Bg} \operatorname{sen} 2\sigma l \frac{\rho^2 - \sigma^2}{4\rho\sigma} \right] + \\ \quad + c_2 \left[\beta - p_1 \frac{v^2}{Bg} \frac{\operatorname{sen} 2\sigma l}{2} \right] = -\frac{p_1}{B} \frac{\operatorname{sen} 2\sigma l}{4\rho\sigma}, \\ a_1 \left[\alpha - p_2 \frac{v^2}{Bg} \operatorname{sen} 2\sigma l \frac{\rho^2 - \sigma^2}{4\rho\sigma} \right] - \\ \quad - a_2 \left[\beta - p_2 \frac{v^2}{Bg} \frac{\operatorname{sen} 2\sigma l}{2} \right] = -\frac{p_2}{B} \frac{\operatorname{sen} 2\sigma l}{4\rho\sigma}, \end{array} \right.$$

ove abbiamo posto

$$(16) \quad \alpha = \rho \cos 2\sigma l - \sigma \operatorname{sen} 2\sigma l, \quad \beta = \sigma \cos 2\sigma l + \rho \operatorname{sen} 2\sigma l.$$

Dal sistema (15) con calcoli non poco laboriosi si giunge alla determinazione di a_1 , a_2 , c_1 , c_2 .

Si trova precisamente

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{g}{\Delta} \{ 4B\rho\sigma(m_2\sigma + m_1\beta e^{-2\rho l}) - m_1 m_2 v^2 (\sigma - \gamma e^{-2\rho l})(\sigma + \beta e^{-2\rho l}) \}, \\ a_2 = \frac{g}{\Delta} \{ 4B\rho\sigma(m_2\rho + m_1\alpha e^{-2\rho l}) - m_1 m_2 v^2 (\sigma - \gamma e^{-2\rho l})(\rho + \alpha e^{-2\rho l}) \}, \\ c_1 = \frac{g}{\Delta} \{ 4B\rho\sigma m_1\sigma + m_2\beta e^{-2\rho l} - m_1 m_2 v^2 (\sigma - \gamma e^{-2\rho l})(\sigma + \beta e^{-2\rho l}) \}, \\ c_2 = \frac{g}{\Delta} \{ -4B\rho\sigma m_1\rho + m_2\alpha e^{-2\rho l} + m_1 m_2 v^2 (\sigma + \gamma e^{-2\rho l})(\rho + \alpha e^{-2\rho l}) \}, \end{array} \right.$$

ove abbiamo posto $m_i = p_i/g$, ed inoltre

$$(18) \quad \begin{cases} \Delta = (\rho^2 + \sigma^2) \{ (4\rho B - m_1 v^2)(4\rho B - m_2 v^2)\sigma^2 - m_1 m_2 v^4 \gamma^2 e^{-4\rho l} \}, \\ \gamma = \sigma \cos 2\sigma l - \rho \sin 2\sigma l. \end{cases}$$

Per $m_1 = m_2$ le espressioni trovate si semplificano ed assumono la forma

$$(19) \quad \begin{cases} a_1 = c_1 = \frac{mg(\sigma + \beta e^{-2\rho l})}{(\rho^2 + \sigma^2) [4B\rho\sigma - (\sigma + \gamma e^{-2\rho l})mv^2]}, \\ a_2 = -c_2 = \frac{mg(\rho + \alpha e^{-2\rho l})}{(\rho^2 + \sigma^2) [4B\rho\sigma - (\sigma + \gamma e^{-2\rho l})mv^2]}. \end{cases}$$

Le (17) o (19) forniscono lo spostamento $w(z)$ su tutta la retta tramite le (6), (7), (8), (9), (11).

2. Equazione caratteristica dei valori critici.

Al fine della determinazione dei valori critici di v , (minori di v_A), nel caso $m_1 \neq m_2$, basterà esaminare la (17) e ricercare per quali valori della velocità almeno una della a o della c risulta infinita. Basterà perciò ricercare quei valori di v per cui risulta

$$(20) \quad \Delta(v) = 0,$$

senza che, simultaneamente si annullino tutti i numeratori delle frazioni a secondo membro di (17).

E' abbastanza agevole riconoscere che non esiste nessun valore di v per cui risultino tutti nulli tali numeratori.

Infatti dal confronto di a_1 con c_1 si riconosce che, essendo per ipotesi $m_1 \neq m_2$, dovrebbe risultare

$$(21) \quad \sigma - \beta e^{-2\rho l} = 0,$$

mentre analogamente dal confronto di a_2 con c_2 risulterebbe

$$(22) \quad \rho - \alpha e^{-2\rho l} = 0.$$

Ora basta tener conto di (16), per dedurre da (21), (22), la seguente relazione

$$(23) \quad \sigma(1 - \cos 2\sigma l e^{-2\rho l}) = 0,$$

che è assurda per $l \neq 0$.

Con ciò resta assodato che per $m_1 \neq m_2$ un valore che annulli il denominatore Δ non annulla simultaneamente tutti i numeratori dei secondi membri di (17) e finalmente si deduce il carattere di velocità critiche spettanti a quei valori di v che soddisfano a (20).

In modo analogo poichè non possono essere simultaneamente, verificate, per nessun valore di v , le due relazioni

$$(24) \quad \sigma + \beta e^{-2\rho l} = 0 \quad , \quad \rho + \alpha e^{-2\rho l} = 0,$$

si deduce da (19) il carattere di velocità critiche spettanti a quei valori di v che soddisfano alla

$$(25) \quad 4B\rho - \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma} e^{-2\rho l}\right) mv^2 = 0.$$

Vogliamo però subito osservare che per m_1 molto prossimo ad m_2 le soluzioni di (20) sono prossime alle soluzioni di (25) non solo, ma anche alle soluzioni di

$$(25') \quad 4B\rho - \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} e^{-2\rho l}\right) mv^2 = 0.$$

Così le soluzioni di (25') che non costituiscono valori critici per m_1 proprio uguale ad m_2 sono però valori limiti di valori critici, relativi a carichi disuguali, per $m_1 \rightarrow m_2$. La pratica impossibilità che sia verificata rigorosamente l'uguaglianza $m_1 = m_2$ fornisce più interesse alla (20) e quindi, al limite, non solo a (25) ma anche a (25').

3. Osservazioni sulla dipendenza dei valori critici del rapporto tra le masse.

Per chiarire il comportamento singolare dei valori critici in corrispondenza ad una distribuzione di carichi per cui risulti $m_1 = m_2$ rispetto ad una distribuzione per cui m_1 è poco diverso da m_2 , si possono fare le seguenti considerazioni.

Si cominci con l'osservare che le equazioni (25) e (25') hanno soluzioni comuni solo se $\gamma = 0$, cioè per distanze $2l$ soddi-

sfacenti alla seguente uguaglianza

$$(26) \quad 2\lambda l = \frac{v_k}{\sqrt{v_k^2 - v_{m_1}^{*2}}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v_k^2 + v_{m_1}^{*2}}{v_k^2 - v_{m_1}^{*2}}} + n\pi \right),$$

ove $v_{m_1}^*$, valore critico relativo al carico solitario m_1 , è la radice della seguente equazione

$$(27) \quad 4Bv \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_k^2}} = mv^2.$$

Conveniamo poi di indicare con v_{m_1, m_2}^* una generica soluzione di (20), con v_{m_1, m_1}^* e con v'_{m_1} una soluzione di (25) e rispettivamente di (25'). Se $2l$ non soddisfa a (26) è certamente $v_{m_1, m_1}^* \neq v'_{m_1} \neq v_{m_1}^*$.

Premesso ciò chiamiamo *intorno critico* $J_{(v^*, w)}$ di un valore critico v^* di v relativo al valore W , quell'intorno di v^* in corrispondenza al quale l'ampiezza massima di $w(z)$ supera il valore W . Si prenda in considerazione ora in relazione ad una distanza fissa $2l$ non soddisfacente a (26), una successione S_{m_2} di valori di m_2 tendenti ad m_1 ed in relazione ad essa la successione S_{v^*} dei valori critici v_{m_1, m_2}^* che tende a v'_{m_1} al tendere di m_2 verso m_1 . Sussiste la seguente proprietà: *Per W sufficientemente elevato l'ampiezza di $J_{(v^*, w)}$, con v^* appartenente ad S_{v^*} tende a zero al tendere di m_2 verso m_1 .*

Infatti per $m_1 = m_2$ e $v = v'_{m_1}$ il massimo di $w(z)$ è finito e sia \bar{w} . Si assuma $W = 2\bar{w}$ e si supponga, per assurdo, che il massimo limite dell'ampiezza di $J_{(v^*, 2\bar{w})}$ (con $v^* \in S_{v^*}$) sia maggiore di un ϵ positivo. Esisterebbe allora almeno una successione S'_{m_2} estratta da S_{m_2} ed in relazione ad esse una successione S'_{v^*} estratta da S_{v^*} , in corrispondenza alle quali la successione S_J degli intorni $J_{(v^*, 2\bar{w})}$ corrispondenti, godrebbe delle proprietà che i suoi elementi conterrebbero v'_{m_1} come punto interno.

Scegliamo ora una successione di valori di v , S'_v , in corrispondenza biunivoca con gli intorni di S_J , appartenenti a questi intorni, ma diversi dai relativi valori critici, e tendenti a v'_{m_1} . Si prenda ora in considerazione il generico valore di v appartenente ad S'_v ed il relativo valore di m_2 appar-

tenente ad S'_{m_2} e si calcoli in corrispondenza il massimo della $w(z)$. Al tendere di m_2 verso m_1 questo massimo tende a \bar{w} e ciò è assurdo perchè per ogni valore di v interno ad un intorno di S_J il massimo di $w(z)$, calcolata in relazione a quel valore di v ed al valore di m_2 corrispondente all'intorno, è maggiore di $2\bar{w}$.

4. Dipendenza dei valori critici dalle distanze tra i due carichi.

Le equazioni (20), (25), (25'), sono equazioni trascendenti in v ed una loro discussione generale non è agevole. Si possono però riconoscere senz'altro alcune notevoli proprietà caratteristiche delle soluzioni di (20) (25). Lo studio certamente più interessante è quello riguardante il modo di variare dei valori critici (e precisamente del minimo) al variare della distanza tra i due carichi pensati di grandezza prefissata. Considereremo quindi le soluzioni di (20) in funzione di l .

Per ogni fissato l , ed $m_1 \neq m_2$ (per fissare le idee $m_1 > m_2$), l'equazione (20) ha, almeno, due soluzioni, una contenuta nell'intervallo $(0, v_{m_1}^*)$ e l'altra interna all'intervallo $(v_{m_2}^*, v_k)$. Per nessun valore di l l'equazione (20) ha soluzioni interne all'intervallo $(v_{m_1}^*, v_{m_2}^*)$. Infatti consideriamo la funzione continua delle variabili l, v^2 , per $l \geq 0, v^2 \geq 0$,

$$(28) \quad \Delta'(l, v^2) = (4\rho B - m_1 v^2)(4\rho B - m_2 v^2) - m_1 m_2 v^4 \frac{\gamma^2}{\sigma^2} e^{-4\sigma l},$$

che differisce da Δ solo per un fattore mai nullo.

Si riconosce senz'altro che è $\Delta'(l, 0) > 0$, $\Delta'(l, v_{m_1}^{*2}) \leq 0$, $\Delta'(l, v_{m_2}^{*2}) \leq 0$, mentre infine

$$\Delta'(l, v_k^2) = m_1 m_2 v^4 (1 - \cos^2 2\sigma l) \geq 0.$$

Infine se $v_{m_1}^* < v < v_{m_2}^*$ i due termini del secondo membro di (28) sono ambedue negativi. Risulta quindi provato l'asserto e si può concludere con la seguente osservazione:

OSSERVAZIONE I. *Il minimo valore critico relativo a due carichi disuguali non è mai superiore al più piccolo dei valori critici caratteristici dei due carichi.*

Supponiamo ora $v_{m_1}^* \leq \frac{1}{2} v_k$. Nella striscia $0 < v^2 < v_{m_1}^{*2}$ risulta $1 > \frac{\rho}{\sigma} > \frac{\sqrt{5}}{2}$ ed anche $\left| \frac{\gamma}{\sigma} e^{-2\lambda l} \right| < 1$ qualunque sia l . Infatti se $2\sigma l \leq \frac{\pi}{2}$ si ha, essendo a maggiore ragione $2\rho l < \frac{\pi}{2}$,

$$\left| \frac{\gamma}{\sigma} e^{-2\rho l} \right| < \left| \cos 2\sigma l - 2\rho l \frac{\text{sen } 2\sigma l}{2\sigma l} \right| e^{-2\rho l},$$

e quindi il primo membro è minore del maggiore dei due numeri $|\cos 2\sigma l e^{-2\rho l}|, 2\rho l e^{-2\rho l}$, cioè minore di 1. Se poi $2\sigma l > \frac{\pi}{2}$ allora di conseguenza, nella striscia considerata, risulta $2\rho l > \frac{\pi}{3}$ e quindi $\left| \frac{\gamma}{\sigma} \right| e^{-2\rho l} < 2e^{-\frac{\pi}{3}} < 1$.

Allora scritta l'equazione (20) nella forma

$$(29) \quad 4\rho B(4\rho B - (m_1 + m_2)v^2) + m_1 m_2 v^4 \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} e^{-4\rho l} \right) = 0,$$

si riconosce che questa non può ammettere soluzioni minori di $v_{m_1 + m_2}^*$, perchè in corrispondenza ad un tale valore il primo termine di (29), come il secondo, risulta positivo. Possiamo quindi concludere con la seguente

OSSERVAZIONE II. Se $v_{m_1}^* < \frac{1}{2} v_k$, il minimo valore critico non è mai inferiore al valore critico caratteristico di un carico pari alla somma dei due, qualunque sia la distanza tra i due carichi.

Continuando a ragionare nella striscia $0 \leq v^2 \leq v_{m_1}^*$, consideriamo la seguente derivata

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^2} \Delta(l, v^2) = & - (4\rho B - m_1 v^2) \left(2 \frac{\lambda^2 B}{\rho v_k^2} + m_2 \right) - \\ & - \left(2 \frac{\lambda \cdot B}{\rho v_k^2} + m_1 \right) (4\rho B - m_2 v^2) - 2m_1 m_2 v^2 \frac{\gamma^2}{\sigma^2} e^{-4\rho l} - \\ & - 2m_1 m_2 \frac{v^4}{v_k^2} \frac{\gamma}{\sigma} e^{-4\rho l} \left\{ \frac{\lambda^2 l}{\rho \sigma^2} [2\rho \sigma \text{sen } 2\sigma l + (\rho^2 - \sigma^2) \cos 2\sigma l] + \frac{\lambda^4}{\rho \sigma^3} \text{sen } 2\sigma l \right\} \end{aligned}$$

Da questa, notando che il primo e il terzo termine sono negativi o nulli si ha, sempre per $v_{m_1}^* \leq \frac{1}{2} v_k$,

$$\frac{\partial}{\partial v^2} \Delta'(l, v^2) < - \left(2 \frac{\lambda^2 B}{v_k^2} + m_1 \right) \left(4\lambda B \sqrt{1 - \frac{v_{m_1}^{*2}}{v_k^2}} - m_2 v_{m_1}^{*2} \right) + \\ + m_1 m_2 (2\lambda l + 1) v_{m_1}^{*2} e^{-2\lambda l \sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3}},$$

e quindi anche, ricordando la (27),

$$\frac{\partial}{\partial v^2} \Delta'(l, v^2) > - m_1 v_{m_1}^{*2} \left\{ m_1 - m_2 - m_2 \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-2\lambda l \sqrt{3}} (2\lambda l + 1) \right\} < \\ < - m_1 v_{m_1}^{*2} \left[m_1 - m_2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right].$$

Quindi, se $m_1 > m_2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ la derivata in discorso non è mai nulla nella striscia considerata ed allora l'equazione ha, in base all'osservazione I, una sola soluzione per ogni valore di $l \geq 0$.

I massimi e minimi della funzione $v^2(l)$, implicitamente definita sulla striscia in discorso dalla (20), si ottengono associando alla (20) l'equazione

$$(30) \quad \left(\cos 2\sigma l - \frac{\rho}{\sigma} \sin 2\sigma l \right) [(\rho^2 - \sigma) \sin 2\sigma l - 2\rho\sigma \cos 2\sigma l] = 0.$$

Si ottiene così che i massimi di $v^2(l)$ si hanno in corrispondenza a distanza $2l$ fornite dalla (26), cui poi corrisponde un valore critico pari a $v_{m_1}^*$. A questa conclusione si perviene mediante l'esame della derivata seconda e per brevità non riportiamo i calcoli.

Possiamo quindi affermare che

OSSERVAZIONE III. Se $v_{m_1}^* \leq \frac{1}{2} v_k$ ed $m_1 \geq m_2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ esistono delle distanze ottime, fornite da (26), in corrispondenza alle quali la presenza del carico m_2 non influisce sul minimo valore critico, che coincide con quello caratteristico di un solo carico.

Finiremo con l'osservazione, quasi banale, che per $l \rightarrow +\infty$ le soluzioni di (20) tendono a coincidere con $v_{m_1}^*$, $v_{m_2}^*$.

Una discussione dello stesso tipo di quella svolta qui sopra si può fare anche sulla soluzione della (25), ma non ci dilungheremo oltre. Ci accontenteremo invece di tracciare, al fine di avere qualche indicazione utile e concreta, con un criterio di approssimazione, i grafici delle funzioni $v^2(l)$ definite implicitamente da (20) o (25) e concluderemo con una valutazione numerica relativa ad un caso concreto.

5. Valutazioni approssimate dei valori critici.

Supporremo d'ora innanzi di considerare soltanto quei valori in corrispondenza ai quali risulti

$$(31) \quad \frac{v^2}{v_k^2} \ll 1.$$

La (31) non è stata ovviamente posta a caso; infatti nell'esempio di binario considerato dal prof. Krall³⁾, risulta $v_k \approx 1550 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ e quindi per velocità ordinarie il rapporto non supera $\frac{1}{50}$.

Per valori di v soddisfacenti a (31) possiamo ritenere

$$(32) \quad \sigma = \rho = \lambda, \quad \gamma = \lambda \sqrt{2} \cos\left(2\lambda l + \frac{\pi}{4}\right).$$

In corrispondenza la (20) diventa, a meno di un fattore mai nullo,

$$(33) \quad m_1 m_2 (1 - \varepsilon) v^4 - (m_1 + m_2) 4B \lambda v^2 + 16B^2 \lambda^2 = 0,$$

ove si è posto

$$(34) \quad \varepsilon = e^{-4\lambda l} (1 - \text{sen } 4\lambda l).$$

³⁾ Vedi lavoro citato in ²⁾. In questa nota nella valutazione di v indicata ivi con c , è stato commesso un errore di calcolo.

Risolvendo (33) si ha

$$(35) \quad \frac{v^{*2}}{2B\lambda} = \frac{m_1 + m_2 \pm \{(m_1 - m_2)^2 + 4\epsilon m_1 m_2\}^{\frac{1}{2}}}{m_1 m_2 (1 - \epsilon)}$$

I valori di v^* forniti da (35) danno beninteso, delle approssimazioni di qualche soluzione di (20), solo se per esse è verificata la (31) ed i termini trascurati non sono dello stesso ordine di quelli computati in (33).

Continuando a supporre che risulti $m_1 > m_2$ rileviamo senz'altro che delle due soluzioni date da (35), che denoteremo rispettivamente con v_+^* , v_-^* a seconda della scelta del segno davanti al radicale, la v_+^* esce per $l \rightarrow 0$, cioè per $\epsilon \rightarrow 1$, dal campo di validità della (31) anche se, per l sufficientemente elevato, si trova in questo campo.

Consideriamo le v^{*2} date da (35) come funzioni di $4\lambda l$, tramite ϵ . Riconosceremo quindi che i valori che rendono massima e minima v_+^* (v_-^*) coincidono con i valori che rendono massima (minima) e rispettivamente minima (massima) la funzione $\epsilon(4\lambda l)$ fornita da (34).

Ne risultano per le due funzioni $\frac{v_+^{*2}}{2B\lambda}$, $\frac{v_-^{*2}}{2B\lambda}$ i grafici rappresentati in fig. 1.

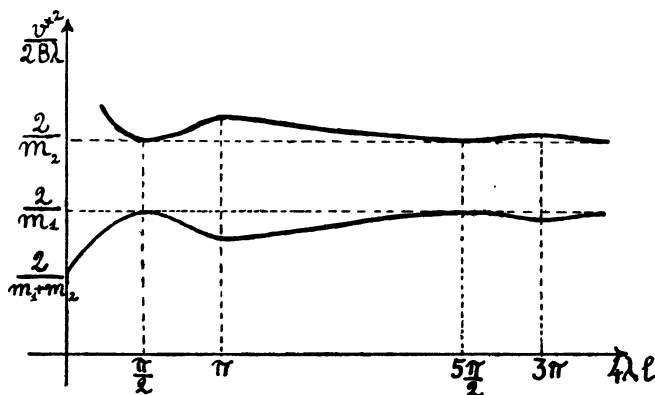


fig. 1

Esse esprimono chiaramente l'andamento dei valori critici al variare della distanza $2l$ dei due carichi. Risulta evidente

l'esistenza di una distanza ottima corrispondente al valore $2l = \frac{\pi}{4\lambda}$.

Nel caso $m_1 = m_2$, sempre restando entro i limiti dell'approssimazione in cui ci siamo posti all'inizio di questo numero, si può sostituire alla (25) la seguente equazione

$$(36) \quad 4\lambda B - mv^2(1 + \delta) = 0,$$

ove si è posto

$$(37) \quad \delta = \sqrt{2} e^{-2\lambda l} \cos\left(2\lambda l + \frac{\pi}{4}\right).$$

Da (36) risulta immediatamente il grafico segnato con tratto continuo in fig. 2.

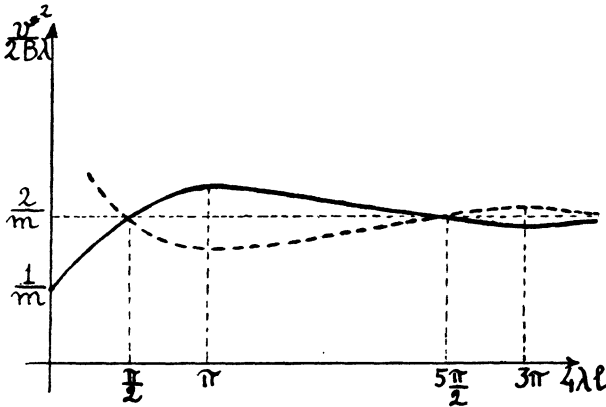


fig. 2

È interessante rilevare che per $\frac{\pi}{4} < 2\lambda l < 5\frac{\pi}{4}$ il minimo valore critico relativo ai due carichi uguali risulta maggiore di quello relativo ad un solo carico. Il massimo del minimo valore critico si ha poi per $2\lambda l = \frac{\pi}{2}$ la distanza calcolata in base a questa eguaglianza fornisce quindi l'ottimo della distanza per due carichi uguali. Osserviamo infine che per $m_1 = m_2 = m$, dalla (35) si ha

$$(38) \quad \frac{v^{*2}}{2B\lambda} = \frac{2}{m} \frac{1}{1 \pm \delta}$$

che porge oltre al valore critico dato da (36) anche l'approssimazione del valore di v^{*2} fornito da (25'). In fig. 2 è rappresentato (in tratteggio) anche il grafico relativo al valore di $\frac{v^{*2}}{2B\lambda}$ corrispondente alla scelta del segno — nell'espressione a secondo membro di (38). Ciò abbiamo ritenuto utile fare per dare un'idea geometrica del comportamento dei valori critici mentre m_2 tende ad m_1 .

Infine per una valutazione numerica ci riferiamo all'esempio già considerato dal prof. Krall, prendendo in esame un binario per il quale risulti $B = 322.10^7$ Kg cm², $v = 240$ Kg cm⁻², $\mu g = 1.00$ Kg cm⁻¹, $g = 980$ cm sec⁻².

Si ha in corrispondenza

$$\lambda \cong \frac{1}{86} \text{ cm}^{-1} \quad , \quad v_k \cong 1550 \text{ Km } k^{-1}.$$

Per un tale binario la minima distanza ottima risulta all'incirca $2l \cong 68$ cm.

Considereremo per semplicità 2 carichi $m_1 = 10.000$ Kg, $m_2 = 9.000$ Kg concentrati a distanza $2l = \frac{\pi}{2\lambda} \cong 130$ cm. In corrispondenza si ha $\epsilon = e^{-\pi} \cong \frac{1}{23}$ e si ottiene per il minimo valore critico di v , il valore critico caratteristico di un carico di 13.300 Kg $\cong \frac{4}{3} v_{m_1}^*$. Per giustificare l'approssimazione osserviamo che in questo caso è $v_{m_1}^* \cong 130$ Km k^{-1} e quindi il rapporto $\frac{v^2}{v_k^2}$ è dell'ordine di $\frac{1}{150}$.

Per due carichi uguali l'ottima distanza si ha invece a 130 cm.