

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Un criterio di non semplicità di un gruppo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 24 (1955), p. 215-219

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__215_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN CRITERIO DI NON SEMPLICITÀ DI UN GRUPPO FINITO

Nota (*) di GIOVANNI ZACHER (a Padova)

Nella presente Nota dimostro che se H è un sottogruppo proprio modulare non identico del gruppo finito G , il gruppo G non può essere semplice.

La nozione di sottogruppo modulare è posta in una mia Memoria pubblicata in questi Rendiconti, e si può formulare dicendo che H è un sottogruppo modulare di G , se il reticolo $\{H, \mathfrak{R}\}$ generato da H , \mathfrak{R} è modulare ogni volta che modulare sia il sottoreticolo \mathfrak{R} del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G . Da quella mia Memoria traggio alcune proposizioni che utilizzerò in questa:

I. - Un automorfismo di un gruppo trasforma sottogruppi modulari in sottogruppi modulari.

II. - L'unione e l'intersezione di due sottogruppi modulari sono ancora sottogruppi modulari.

III. - Se H è un sottogruppo modulare di G , se L è un sottogruppo di G con $H \cap L = 1$, se T è un sottogruppo di H , T è un sottogruppo modulare nel gruppo $T \cup L$.

Premesso questo, dimostro il seguente lemma:

Se G è un gruppo d'ordine finito ed H un sottogruppo modulare, H è permutabile con qualunque sottogruppo di G generato da elementi d'ordine primo con quello di H .

(*) Pervenuta in Redazione il 28 marzo 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Sia H un sottogruppo modulare ed anzi supponiamo che H sia pel momento un p -gruppo ciclico

$$H = \{h\}$$

coll'ordine $o(H) = p^v$.

Sia poi $\{a\}$ un gruppo ciclico d'ordine q^{β} con q numero primo diverso da p , $q \neq p$.

Poichè il nostro lemma è vero se l'ordine di G è pq , usere-
mo per la dimostrazione induzione sull'ordine di G .

Consideriamo il gruppo $\{a\} \cup \{h\}$. Se $\{a\} \cup \{h\}$ è un sottogruppo proprio di G , poichè $\{h\}$ risulta modulare anche in $\{a\} \cup \{h\}$, per ipotesi d'induzione, sarà $\{a\}$ permutabile con $\{h\}$.

Sia dunque $\{a\} \cup \{h\} = G$.

E' ovviamente per l'ipotesi sull'ordine dei due gruppi

$$\{a\} \cap \{h\} = 1.$$

Affinchè allora $\{h\}$ risulti un sottogruppo modulare, dovrà essere sia $\{a\}$ che $\{h\}$ un sottogruppo di Sylow di G , altrimenti uno almeno sarebbe contenuto propriamente in un sottogruppo di Sylow di G , ad es. $\{a\} \subset S_q$, ed il reticolo

$$\{\{a\}, \{h\}, S_q\}$$

non sarebbe modulare.

Siano ora $\mathcal{N}\{a\}$ ed $\mathcal{N}\{h\}$ i normalizzanti di $\{a\}$ ed $\{h\}$ in G .

Se $\mathcal{N}\{a\} = \{a\}$, oppure $\mathcal{N}\{h\} = \{h\}$ per un teorema di BURNSIDE ¹⁾, $\{a\}$ oppure $\{h\}$ ha un complemento normale in G .

Per fissare le idee sia $\mathcal{N}\{a\} = \{a\}$.

Sarà $G = N\{a\}$, $N \cap \{a\} = 1$ ed inoltre $\{h\} \leq N$.

Ora $\{h\} \subset N$ è assurdo, perchè $\{\{h\}, N, \{a\}\}$ non sarebbe un reticolo modulare; pertanto $\{h\}$ è permutabile con $\{a\}$.

Il ragionamento è analogo se $\mathcal{N}\{h\} = \{h\}$.

¹⁾ H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*. p. 133.

Ci resta dunque da discutere il caso in cui si abbia

$$\mathfrak{N} \{a\} \supset \{a\} \text{ ed } \mathfrak{N} \{h\} \supset \{h\}$$

contemporaneamente.

Poichè $\{a\}$ è un sottogruppo modulare, dovrà essere sia

$$\mathfrak{N} \{a\} \cap \{h\} \neq 1 \text{ sia } \mathfrak{N} \{h\} \cap \{a\} \neq 1.$$

Dei due numeri p, q , sia $p > q$.

Poniamo $L = \mathfrak{N} \{a\} \cap \{h\}$.

Il gruppo $L \cup \{a\} = [\mathfrak{N} \{a\} \cap \{h\}] \cup \{a\} = [\{a\} \cup \{h\}] \cap \mathfrak{N} \{a\} = \mathfrak{N} \{a\}$ è supersolubile come prodotto di 2 gruppi ciclici. Ma allora L è normale in $\mathfrak{N} \{a\}$ e così $\{a\}$, per cui

$$\mathfrak{N} \{a\} = L \times \{a\}.$$

Ma allora $\{a\}$ è abeliano, $\{a\}$ sta quindi nel centro del proprio normalizzante. Quindi $\{a\}$ ha un complemento normale che contiene $\{h\}$. Ma allora si conclude come sopra.

Se invece $q > p$, si prende in considerazione il gruppo $\mathfrak{N} \{h\} \cap \{a\}$ e si conclude analogamente.

Il lemma è così dimostrato nel caso che H sia un p -gruppo ciclico.

Sia ora H un gruppo qualunque ma non p -gruppo ciclico. Esso risulta allora unione di p -gruppi ciclici.

Sia $\{a\}$ uno qualunque p -gruppo ciclico di H . Il gruppo $\{h\}$ è allora permutabile con $\{a\}$ per la propos. III e per quanto si è dimostrato sopra. c. v. d.

Dalla III e dal lemma si trae il corollario: Se H ed L sono due sottogruppi di G con H sottogruppo modulare ed $H \cap L = 1$, allora se $\{a\}$ è un sottogruppo di H d'ordine p^σ e $\{b\}$ un sottogruppo di L d'ordine q^τ con $p \neq q$, il gruppo $\{a\}$ è permutabile col gruppo $\{b\}$.

Siamo ora in grado di dimostrare il nostro teorema.

Sia dunque G un gruppo finito ed H un suo sottogruppo proprio modulare e diverso dal sottogruppo identico 1. Distinguiamo due casi.

I. *caso*: L'ordine di H è divisibile per tutti i fattori primi che dividono l'ordine $o(G)$ di G .

Possiamo inoltre supporre che H sia un sottogruppo modulare minimo nel senso che H non contenga alcun sottogruppo proprio diverso da 1 che sia pure modulare in G .

Se allora N è un altro sottogruppo modulare che non contiene H , sarà $H \cap N = 1$, essendo l'intersezione di due sottogruppi modulari ancora modulare (props. II).

Siano $H = H_1, H_2, \dots, H_t$ i coniugati di H in G .

Supposto G semplice, sarà $t > 1$ ed

$$(1) \quad H_i \cap H_j = 1 \quad \text{per } i \neq j$$

dato che H è un sottogruppo modulare minimo come H_1 per la propos. I.

Indichiamo con $\mathcal{N}(H_i)$ il normalizzante di H_i in G e con R un sottogruppo non identico di H_i . Si ha

$$\mathcal{N}(H_i) \supseteq \mathcal{N}(R)$$

dove $\mathcal{N}(R)$ è il normalizzante di R in G .

Infatti se g è un elemento di $\mathcal{N}(R)$ risulta $gRg^{-1} = R$, e quindi se $gH_i g^{-1}$ fosse uguale ad H_j con $j \neq i$, sarebbe

$$H_i \cap H_j \supseteq R \supset 1.$$

contro la (1).

Detto p il massimo divisore primo di $o(G)$, per l'ipotesi fatta su $o(H)$, il gruppo H contiene un sottogruppo ciclico $\{a\}$ d'ordine p .

Sarà $\mathcal{N}(H) \supseteq \mathcal{N}\{a\}$. Sia poi b un elemento d'ordine q di H , con q numero primo diverso da p . Consideriamo i coniugati di b non contenuti in $H_1 = H$. Tale insieme \mathcal{J} per la (1) non è vuoto. Sia \bar{b} un elemento di \mathcal{J} . Sarà $\bar{b} \in H_k$ con k conveniente intero diverso da 1. Ora abbiamo

$$H_1 \cap H_k = 1, \quad H_1 \text{ sottogruppo modulare, } a \in H_1, \bar{b} \in H_k$$

e gli ordini a e b rispett. p e q . Pel corollario sarà dunque

$$\{a\} \cup \{\bar{b}\} = \{a\}\bar{b}\}$$

$\{a\}\{\bar{b}\}$ è dunque supersolubile, quindi $\{a\}$ in esso sottogruppo normale essendo $p > q$.

Ne segue che $\mathcal{N}(H_1)$ contiene tutti i coniugati di b non contenuti in H_2 . Ma $\mathcal{N}(H_1) \supseteq H_1$, quindi $\mathcal{N}(H_1)$ contiene

tutti i coniugati di b in G . Se allora K_b indica la classe di tutti gli elementi coniugati di b in G , essendo G semplice, risulta.

$$G = \{K_b\}.$$

Ma allora $\mathfrak{N}(H) \supseteq \{K_b\} = G$ ossia il sottogruppo proprio non identico H è un sottogruppo normale in G , che è contro l'ipotesi che G sia semplice.

II. caso: L'ordine di H non è divisibile per tutti i fattori primi di $o(G)$.

Detto ancora p il massimo fattore di $o(G)$, potremo sempre trovare due sottogruppi $\{a\}$, $\{b\}$ di G , d'ordini rispettivamente p , q dove solo uno dei 2 numeri primi p , q divide $o(H)$.

Se allora p divide $o(H)$, $\{a\}$ possiamo supporre contenuto in H e allora se K_b è la classe completa degli elementi coniugati di b in G , pel corollario, $\{b\}$ risulta normale in $\{a\} \cup \{K_b\}$ ossia in G , ciò che è assurdo. Se invece $\{b\}$ è contenuto in H , poichè allora i coniugati di $\{b\}$ stanno nei coniugati di H , sono ancora soddisfatte le ipotesi del corollario, per cui $\{a\}$ è ancora normale in $\{a\} \cup \{K_b\} = G$, cosa che è pure assurda.

E la dimostrazione del fatto che: *se il gruppo finito G possiede sottogruppi propri modulari non identici, esso non è semplice*, è completa; si noti che per concludere basta che G possieda almeno un sottogruppo proprio modulare non identico.