RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI

Trecce algebriche di curve di diramazione : costruzioni ed applicazioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 183-214

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__183_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TRECCE ALGEBRICHE DI CURVE DI DIRAMAZIONE: COSTRUZIONI ED APPLICAZIONI

Memoria (*) *di* CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI (*a Milano*)

INTRODUZIONE

1. - La conoscenza delle trecce delle curve di diramazione (trecce di diramazione) risulta importante perchè la treccia di una curva C, sui cui fili siano deposti gli scambi relativi alle determinazioni di un piano multiplo (diramato da C), rappresenta in modo univoco tutta la famiglia di superficie F, birazionalmente identiche, che danno lo stesso piano multiplo e indica chiaramente di queste F molte proprietà algebriche e topologiche. Se poi la C è di diramazione per un solo piano multiplo (ciò che presumibilmente accade per $n > 4$, ed è comunque facilmente verificabile sulla treccia) la sola treccia di C basta a rappresentare la suddetta famiglia di superficie F. E qui importa osservare che, in particolare, se la treccia deriva per continuità (con operazioni P ed S) da una diramante un piano multiplo generale di ordine n (cioè rappresentante una superficie di ordine n) fra le precedenti superficie F ve ne è anche una di ordine n.

Per ciò in questo lavoro diamo le trecce rappresentanti superficie generali, d'ordine n, nella speranza di poter poi giungere a costruire, tramite le trecce, tutte le curve di diramazione (il che porterebbe in sostanza alla costruzione di tutte le superficie).

(*) Pervenuta in Redazione il 24 marzo 1955.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico dell'Università, Milano.

Infatti una qualsiasi superficie F, dotata eventualmente di curva doppia e anche di punti doppi isolati, che individua un certo piano multiplo, può dedursi, per continuità, da una superficie F_0 generale del suo ordine; in corrispondenza, la curva di diramazione di un piano multiplo dato da F, può dedursi per continuità da quella di un piano multiplo « generale », con eventuale staccamento di componenti doppie ed aggiunta di punti doppi.

Tale staccamento di componenti doppie equivale a togliere alcune coppie di fili dalla treccia della curva di diramazione relativa al caso generale: la difficoltà (a priori non tenue) del problema sta nel caratterizzare i gruppi di coppie di fili che si possono togliere.

Inoltre fra le curve di diramazione si trovano curve con elevato numero di punti doppi e cuspidi e la loro conoscenza fornisce esempi significativi al non semplice problema della ricerca di curve (irriducibili) di dato ordine con elevato numero di punti doppi e cuspidi [1]). La conoscenza della treccia di tali curve permette anche, talvolta, di individuare per le stesse curve la possibilità di acquistare ulteriori punti doppi e cuspidi, oltre quelli che la curva già possiede.

Precisamente, in questo lavoro si costruiscono dapprima le trecce delle curve di diramazione dei piani multipli « generali » e « semplici » (secondo la nomenclatura di B. Segre e di O. Chisini). Si dimostra poi l'esistenza di curve (di diramazione) di un tipo simile ma più ampio dei tipi precedenti (curve che, per variazione continua, possono ancora degenerare, in certo modo determinato, in parti doppie).

Inoltre, come applicazione, si trattano i seguenti problemi:

1) Si verifica (l'esistenza e) l'unicità dei piani multipli diramati dalle prime trecce costruite (cioè diramati dalle

---

[1]) Cfr. per es. B. SEGRE, *Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri*, Rend. Acc. Lincei, serie VI, **10** (1929), *Esistenza di sistemi continui distinti di curve piane algebriche con dati numeri plückeriani*, id.; e C. F. MANARA, *Questioni di esistenza di curve algebriche piane con caratteri assegnati*, Rend. Sem. Matem. e Fisico di Milano, **24** (1952-53).

curve da queste rappresentate), che risultano piani multipli « generali » e « semplici », e si verifica che sono pure di diramazione le ulteriori curve ψ (accennate sopra e) di tipo più generale, confermando così, per altra via, un risultato già noto.

2) Si mostra come (mediante le trecce precedenti) si possano costruire superficie di dato ordine, con elevato numero di punti doppi; quale esempio significativo si ritrova l'esistenza della superficie di Togliatti (del 5° ordine con 31 punti doppi).

Il lavoro viene diviso in tre parti in relazione alla costruzione delle trecce suddette e alla soluzione dei problemi 1) e 2) sopra indicati. Ad ognuna di tali parti è premessa una breve introduzione sul problema specifico ivi trattato.

Notiamo infine che, a rendere meno complicato e faticoso il lavoro e la sua esposizione, raggrupperemo in opportuni complessi significativi alcuni tratti consecutivi di treccia e questi complessi indicheremo con simboli particolari. Daremo per essi alcune relazioni generali che semplificano le operazioni successive (tali relazioni potranno servire in casi analoghi e costituiscono così un contributo all'algebra delle trecce).

CAPITOLO I

La treccia delle curve di diramazione dei piani multipli « generali » e « semplici ».

2. - In questo primo capitolo diamo anzitutto la costruzione delle trecce delle curve (algebriche, come tutte quelle che considereremo poi) di diramazione dei piani multipli « generali »[2]; per ciò partiamo dalle note forme limiti date da O. Chisini[3].

---

[2]) Cioè che si possono ottenere proiettando una superficie generale da un punto esterno ad essa, v. B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*, Mem. Acc. d'Italia, Matem., n. 4, vol. I, (1930).

[3]) Cfr. O. CHISINI, *Sulla curva di diramazione dei piani multipli*, Rend. Acc. Lincei, serie 6°, 23 (1936).

Precisamente, sappiamo che la curva di diramazione φ di un piano m-plo generale, variando in un sistema continuo, può degenerare in una curva $\bar{\varphi}$ spezzata in $m-1$ curve C_1, C_2, ..., C_{m-1}, contate due volte (aventi ordine uguale al loro indice), tali che a tre a tre non passino per uno stesso punto e che le singolarità « essenziali »[4]) della φ confluiscano su $\bar{\varphi}$ nei punti comuni alle componenti doppie con le seguenti leggi: i punti comuni a due componenti successive C_i C_{i+1} siano limiti di tre cuspidi (ed un contatto, con tangente parallela all'asse y); i punti comuni a due componenti C_i C_j non successive siano limiti di quattro nodi di φ. Daremo la treccia in relazione a tali forme limiti ricordando che le curve di un sistema continuo aventi le stesse singolarità (come numero e come natura) hanno la stessa treccia.

Qui ci sarà particolarmente utile il conoscere già la forma della parte di treccia relativa ai gruppi di singolarità che confluiscono nei punti comuni alle suddette C_i [5]).

Dalla treccia costruita dedurremo poi facilmente quella delle curve φ diramanti piani multipli « semplici »[6]).

Per quest'ultimo caso ricordiamo che tali φ, variando in un sistema continuo, possono degenerare in curve $\bar{\varphi}$ spezzate ancora in componenti C_1, C_2, ..., C_{m-1} (non passanti a tre a tre per uno stesso punto) rispettivamente degli ordini h, $h+1$, ..., $h+m-2$ (con $h>1$) contate tutte due volte, con lo stesso comportamento del caso « generale » circa il limite delle singolarità essenziali di φ.

Mostreremo infine che esistono (sotto certe condizioni) al-

---

[4]) Un punto singolare di una curva φ diramante un piano multiplo si dice « essenziale » quando, togliendolo a φ, la curva φ' che si ottiene non è più di una diramazione per un piano multiplo dello stesso tipo di quello diramato da φ. Ciò è nell'ordine di idee esposto in F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, Annali di Matem., serie 4°, 1 (1924).

[5]) Cfr. O. CHISINI, *Sulla costruzione a priori delle trecce caratteristiche*, Annali di Matem., serie 4°, 33 (1952); C. TIBILETTI, *Costruzioni a priori della sestica con nove cuspidi*, Rend. Ist. Lombardo, 85 (1952) e C. TIBILETTI, *Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione*, Rend. Acc. Lincei, serie 8°, 12 (1952).

[6]) Cioè che si possono ottenere proiettando superficie, prive di curva multipla, da un loro punto multiplo. Cfr. l. c. in [3]).

tre curve ψ, la cui esistenza era ipotetica, di tipo analogo alle trattate le quali, però, degenerano in parti doppie di ordine qualsiasi (con comportamento simile a quello dei casi precedenti circa il limite delle singolarità).

3. - Premettiamo la dimostrazione di alcune relazioni fra insiemi di tratti di treccia, la cui conoscenza sveltirà le successive costruzioni.

Notiamo che, in generale, per semplicità di scrittura raggrupperemo sotto forma di un'unica potenza gruppi di tratti consecutivi uguali, anche se questi non rappresentano potenze effettive (e conseguentemente punti multipli della curva), avendo cura di avvertire quando possano sorgere equivoci. Per indicare i tratti di treccia useremo la nomenclatura abituale [7]) salvo avviso in contrario.

a) Sia un nodo formato da due coppie di fili 1 1′ e 2 2′ successivi (ove i fili di ogni coppia — indicati con lo stesso nome, a meno dell'apice — sono fra loro paralleli): *indichiamo tale nodo con* $[(11')\ (22)]^2$.

Sappiamo già [8]) che si può scrivere

$$[(11')\ (22')]^2 = 12^2\ 1'2^2\ 12'^2\ 1'2'^2.$$

Di qui, usando le operazioni P ed S dell'algebra delle trecce [9]), si ha successivamente

$$\begin{aligned}
(1)\qquad [(11')(22')]^2 &= 12^2\ \ 1'2\ \ 1'2\ \ 12'^2\ \ 1'2'^2 = \\
&= 1'2\ \ 11'^2\ \ 1'2\ \ 1'2'\ \ 12'(1')^2 = \\
&= 11'^2\ \ 1'2(1)\ \ 22'^2\ \ 1'2\ \ 12'(1')^2 = \\
&= 11'^2\ \ 22'^2\ \ 1'2(12')\ \ 1'2\ \ 12'(1')^2 .
\end{aligned}$$

---

[7]) Cfr. M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche: relazioni fondamentali e loro applicazione*, Rend. Ist. Lombardo, 88 (1950).

[8]) Cfr. C. TIBILETTI, luoghi c. in [5]).

[9]) Cfr. l. c. in [7]). Ricordiamo che le operazioni P ed S indicano uno scambio fra due cappi consecutivi sul piano π_x (della variabile complessa x): la P lascia fermo il *primo* cappio e fa passare il secondo dalla sinistra alla destra di questo, e la S lascia fermo il *secondo* e fa passare il primo dalla destra alla sinistra.

Notiamo che nelle operazioni precedenti sono state usate per gran parte le regole note dell'algebra delle trecce, solo l'ultimo passaggio indicato (non essendo già catalogato nei luoghi citati) è stato realizzato direttamente sul modello materiale: per rappresentare il nuovo tratto ottenuto è stato usato il simbolo $1'2(12')$.

Indichiamo ora brevemente

$$\Sigma_{12} = 1'2(12') \cdot 1'2 \quad 12'(1')^2.$$

Tale parte di treccia è rappresentata dalla seguente fig. 1, in cui risulta disegnato anche il nuovo tratto $1'2(12')$.

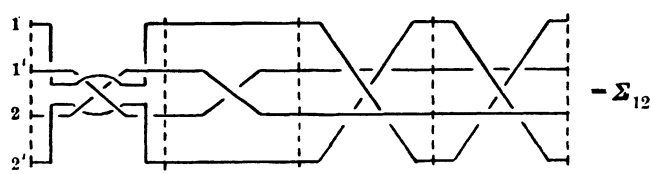

Fig. 1

Ciò posto, da (1) si ha la seguente relazione

$$[(11')(22')]^2 = 11'^2 \quad 22'^2 \quad \Sigma_{12}. \tag{2}$$

Con operazioni P ed S [10]) si ha ancora

$$\Sigma_{12} = \overbrace{1'2(12')} \quad 1'2 \quad 12'(1') \quad 12'(1') = \tag{3}$$
$$= 1'2 \quad 12'(1') \quad 1'2 \quad 12'(1'),$$

ulteriore forma di Σ_{12} che ci servirà in seguito.

b) Notiamo ancora che *l'insieme dei tratti indicato con* Σ_{12} *risulta permutabile con* $11'^2$ *e* $22'^2$.

Dalla precedente relazione (2) si ha (tenendo conto della permutabilità dei tratti $11'$, $22'$ e quindi dei loro inversi [11]))

$$\Sigma_{12} = 22'^{-2} \quad 11'^{-2} \quad [(11')(22')]^2 = 11'^{-2} \quad 22'^{-2} \quad [(11')(22')]^2. \tag{4}$$

---

10) Cfr. 9).

11) Per esempio, l'inverso di $11'$ è la rotazione di mezzo giro in senso negativo (invece che in senso positivo) dei due fili 1 e 1'.

Di qui, poichè gli scambi $11'$ e $22'$ e i loro inversi sono ovviamente permutabili con il nodo $[(11')(22')]^2$ (e fra loro), si ha anche

$$(5) \quad \Sigma_{12} = 22'^{-2} \; [(11')(22')]^2 \; 11'^{-2} = 11'^{-2} \; [(11')(22)]^2 \; 22'^{-2}.$$

Confrontando le (4) e (5) si ha subito [12])

$$\overbrace{11'^2 \; \Sigma_{12}} = \Sigma_{12} \; 11'^2 \; ; \quad \overbrace{22'^2 \; \Sigma_{12}} = \Sigma_{12} \; 22'^2$$

il che dimostra l'enunciato.

Si considerino ora, se vi sono, oltre ai fili 1, 1', 2, 2', altri fili (successivi o precedenti a quelli indicati), per esempio 3 e 3': evidentemente *l'insieme dei tratti* Σ_{12} risulta permutabile anche con $33'$ e quindi con $33'^2$ (ove i tratti $33'$ sono canonici).

4. - Per il seguito è utile premettere ancora la costruzione di un modello di treccia di curva algebrica (di ordine pari) che metta in evidenza una particolare forma limite.

Precisamente, sia f_{2n} *una curva algebrica di ordine* $2n$ *che, variando* (in modo determinato, dipendente per esempio da un parametro reale) *in un sistema continuo* $|f|$, *possa degenerare in una curva di ordine* n, *generica,* $\bar{f}_n$ *contata due volte* (che complessivamente indicheremo con $2\bar{f}_n$).

Si potrebbe dedurre la treccia di f_{2n} da una delle forme canoniche note [13]) applicando le operazioni P ed S dell'algebra delle trecce, ma ci sembra più immediata la via che seguiremo a partire dalla forma limite suddetta.

Osserviamo che su una curva f'_{2n} di $|f|$ prossima a $2\bar{f}_n$ esistono dei contatti (con tangenti parallele all'asse y del suo piano) che hanno come limite gli n^2 punti di collegamento [14])

---

12) Per esempio moltiplicando il terzo membro di (4) per $11'^2$ a sinistra e li secondo membro di (5) per $11'^2$ a destra, ecc.

13) Cfr. O. CHISINI, *Forme canoniche per il fascio caratteristico rappresentativo di una curva algebrica piana*, Rend. Ist. Lombardo, **70** (1937).

14) Cfr. O. CHISINI, *Sulla costruzione a priori delle trecce caratteristiche*, Ann. di Matem. pura e applicata, serie 4°, **33** (1952), nota [2]).

della $\bar{f}_n$ doppia ed altri che hanno come limite (su $2\bar{f}_n$) gli $n(n-1)$ punti di diramazione della $\bar{f}_n$ (ripetuti due volte).

Come è ben noto la treccia di f_{2n} e quelle di f'_{2n} e $2\bar{f}_n$ (pensate come limiti della precedente) sono uguali: costruiamo pertanto la treccia di quest'ultima.

Indichiamo dettagliatamente la costruzione della treccia che ci interessa prima per una sestica f_6 che, variando in un sistema continuo $|f|$ — come è detto sopra —, degeneri in una cubica generale $\bar{f}_3$ doppia; daremo poi la costruzione della suddetta treccia per n qualsiasi.

La treccia della cubica $\bar{f}_3$ sia data da [15])

$$12^2 \quad 13^2 \quad 23^2.$$

Per ottenere la treccia della f_6 raddoppiamo i fili 1, 2, 3 rispettivamente con 1′, 2′, 3′ avendo cura che le coppie 11′, 22′, 33′ risultino fra loro torte di un giro positivo (in relazione ai punti di collegamento della $\bar{f}_3$ doppia).

Scriviamo dapprima la treccia della nostra curva nella forma

$$(1) \qquad 11'^2 \quad 22'^2 \quad 33'^2 \quad [(11')(22')]^2 \quad [(11')(33')]^2 \quad [(22')(33')]^2.$$

Tenendo conto di quanto detto in *a*) n. 3 circa i nodi formati con le coppie di fili 11′, 22′, 33′, dalla (1) si ha

$$(2) \qquad \begin{array}{l} 11'^2 \quad 22'^2 \quad 33'^2 \quad 11'^2 \quad 22'^2 \quad \Sigma_{12} \\ 11'^2 \quad 33'^2 \quad \Sigma_{13} \quad 22'^2 \quad 33'^2 \quad \Sigma_{23}. \end{array}$$

Di qui, per le permutabilità indicate in *b*) n. 3 e per quella ovvia fra i nodi canonici $11'^2$, $22'^2$, $33'^2$, si ha

$$(3) \qquad 11'^6 \quad 22'^6 \quad 33'^6 \quad \Sigma_{12} \quad \Sigma_{13} \quad \Sigma_{23}.$$

Analogamento si procede quando si voglia ottenere la treccia della suddetta f_{2n}; precisamente si parte dalla for-

---

[15]) Cfr. l. c. in [13]).

ma canonica della treccia $\bar{f}_n$ data da

$$
(4) \qquad \begin{array}{ccccc}
12^2 & 13^2 & \dots & 1n^2 \\
 & 23^2 & \dots & 2n^2 \\
 & \dots & \dots & \dots \\
 & & & n-1\ n^2
\end{array}
$$

Raddoppiando i fili 1, 2, ..., n con 1′, 2′, ..., n', si ha, come nel caso particolare precedente, la treccia

$$
(5) \qquad \begin{array}{ccccccccc}
11'^2 & & 22'^2 & & 33'^2 & & \dots & nn'^2 \\
 & 11'^2 & 22'^2\,\Sigma_{12} & & 11'^2 & 33'^2\,\Sigma_{13} & \dots & 11'^2 & nn'^2\,\Sigma_{1n} \\
 & & & & 22'^2 & 33'^2\,\Sigma_{23} & \dots & 22'^2 & nn'^2\,\Sigma_{2n} \\
 & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & [(n-1)(n-1)']^2 & & nn'^2 & \Sigma_{n-1\,n}\,.
\end{array}
$$

Di qui, tenendo conto di permutabilità analoghe a quelle usate nel caso particolare, si perviene alla seguente treccia

$$
(6) \qquad \begin{array}{ccccc}
11'^{2n} & 22'^{2n} & 33'^{2n} & \dots & nn'^{2n} \\
 & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \dots & \Sigma_{1n} \\
 & & \Sigma_{23} & \dots & \Sigma_{2n} \\
 & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & \Sigma_{n-1\,n}\,.
\end{array}
$$

Quest'ultima forma (ove è usata la solita scrittura abbreviata) *costituisce l'accennata forma canonica della treccia di una curva* f_{2n}, di ordine $2n$; tale forma canonica presenta la f_{2n} come variabile in un sistema continuo e *prossima a degenerare in una* (*generica*) *curva* $\bar{f}_n$, di ordine n, *contata due volte.*

5. - Ciò premesso, diamo ora la treccia della curva φ di diramazione per un piano m-plo nel caso generale: curva che abbiamo già visto (cfr. n. 2) essere riducibile, in certo modo, ad $m-1$ curve (doppie) $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$.

Incominciamo, per maggior facilità di comprensione, a costruire la treccia della curva di diramazione φ_{12}, del tipo sopra indicato, riducibile ad una retta C_1, una conica C_2, una cubica C_3 contate due volte (tale φ_{12} è di diramazione per un piano quadruplo ottenuto proiettando da un punto esterno una supeficie del 4° ordine generale).

La costruzione consiste:

a) nel dare la treccia della curva del 6° ordine spezzata nelle C_1, C_2, C_3 (semplici);

b) nel raddoppiare i fili di questa treccia (e qui serve quanto premesso nel n. 4) avendo cura di ricavare dai nodi formati con coppie di fili di C_i (doppie), consecutive, terne di cuspidi (e un contatto) — e per questo sarà necessario usare anche scambi fra fili di una stessa C_i —, e dai nodi formati con coppie di fili di C_i (doppie), non consecutive, quaterne di nodi.

a) Costruiamo la treccia di una curva del 6° ordine spezzata in C_1, C_2, C_3.

La treccia della sestica generale è:

$$
(1) \qquad
\begin{array}{ccccc}
1_1 2_1^2 & 1_1 2_2^2 & 1_1 3_1^2 & 1_1 3_2^2 & 1_1 3_3^2 \\
 & 2_1 2_2^2 & 2_1 3_1^2 & 2_1 3_2^2 & 2_1 3_3^2 \\
 & & 2_2 3_1^2 & 2_2 3_2^2 & 2_2 3_3^2 \\
 & & & 3_1 3_2^2 & 3_1 3_3^2 \\
 & & & & 3_2 3_3^2
\end{array}
$$

ove le coppie consecutive di scambi uguali sono solo scritte riunite ma non rappresentano nodi e i nomi dei fili sono dati in modo che 1_1 rappresenti il filo (unico) che poi competerà alla retta C_1, 2_1 e 2_2 rappresentano i due fili di C_2 e 3_1 3_2 3_3 i tre fili di C_3.

La (1) rappresenta la nostra curva spezzata se si considerano quadrati effettivi e non solo simbolici (cioè nodi della curva) quelli formati con fili i_r e j_s per cui $i \neq j$.

Indichiamo con T_2 (*e* T_3) *la treccia formata dai fili* 2_1 2_2 (*e* 3_1 3_2 3_3) *relativa alla* C_2 (*e* C_3); allora la coppia di tratti

$2_1 2_2^2$ dà la treccia T_2 e i tratti $3_1 3_2^2$ $3_1 3_3^2$ $3_2 3_3^2$ danno la treccia T_3.

La coppia di tratti $2_1 2_2^2$ è ovviamente permutabile col gruppo di tratti $2_1 3_1^2$ $2_1 3_2^2$ $2_1 3_3^2$ $2_2 3_1^2$ $2_2 3_2^2$ $2_2 3_3^2$ poichè questi, uniti, togliendo i setti che li separano, danno un nodo della coppia di fili 2_1 2_2 (fra loro paralleli) con la terna di fili 3_1 3_2 3_3 (paralleli) [16]).

Da (1) si ha così la seguente forma (2), più comoda per noi in quanto sono isolati i nodi formati con fili di componenti C_i diverse,

$$
\begin{array}{lll}
(2) & \{1_1 2_1^2 \quad 1_1 2_2^2\} & \{1_1 3_1^2 \quad 1_1 3_2^2 \quad 1_1 3_3^2\} \\
 & & \{2_1 3_1^2 \quad 2_1 3_2^2 \quad 2_1 3_3^2\} \\
 & & \{2_2 3_1^2 \quad 2_2 3_2^2 \quad 2_2 3_3^2\} \\
 & & \qquad\qquad T_2 \quad T_3 .
\end{array}
$$

(Sono posti fra parentesi gruppi di nodi fra fili appartenenti a diverse componenti C_i).

b) Ora, come si è detto, raddoppiamo i fili entro la treccia (2) tenendo conto che nelle coppie di fili raddoppiati bisogna introdurre un'intera torsione positiva. Per raddoppiare i fili nelle trecce T_2 e T_3 si userà la treccia costruita nel precedente n. 4 (e si inseriranno entro queste trecce le suddette torsioni).

Indichiamo ancora il filo raddoppiato di ciascun filo con lo stesso nome di quello di partenza dotato di un apice. Si ha così dalla (2) la seguente treccia

$$
\begin{array}{l}
(3) \qquad [(1_1 1_1')(2_1 2_1')]^2 \quad [(1_1 1_1')(2_2 2_2')]^2 \quad [(1_1 1_1')(3_1 3_1')]^2 \\
[(1_1 1_1')(3_2 3_2')]^2 \quad [(1_1 1_1')(3_3 3_3')]^2 \quad [(2_1 2_1')(3_1 3_1')]^2 \quad [(2_1 2_1')(3_2 3_2')]^2 \\
[(2_1 2_1')(3_3 3_3')]^2 \quad [(2_2 2_2')(3_1 3_1')]^2 \quad [(2_2 2_2')(3_2 3_2')]^2 \quad [(2_2 2_2')(3_3 3_3')]^2 \\
1_1 1_1'^2 \quad 2_1 2_1'^4 \quad 2_2 2_2'^4 \quad \Sigma_{2_1 2_2} \quad 3_1 3_1'^6 \quad 3_2 3_2'^6 \quad 3_3 3_3'^6 \quad \Sigma_{3_1 3_2} \quad \Sigma_{3_1 3_3} \quad \Sigma_{3_2 3_3} .
\end{array}
$$

---

16) Precisamente si opera nel modo seguente

$$
2_1 2_2^2 \quad 2_1 3_1^2 \quad 2_1 3_2^2 \quad 2_1 3_3^2 \quad 2_2 3_1^2 \quad 2_2 3_2^2 \quad 2_2 3_3^2
$$

Ricordiamo ora — come si è accennato — che per formare terne di cuspidi (con ulteriore contatto) sono necessari anche scambi fra fili raddoppiati[17]) (mentre questi non occorrono per realizzare le quaterne di nodi) e teniamo conto in quali dei nodi (a fili doppi) di (3) confluiscono cuspidi e in quali nodi. A tal fine è opportuno scrivere la precedente treccia (e ciò usando le permutabilità circa i gruppi di tratti Σ_{ik} indicate in *b*) del n. 3, e quelle dei tratti $i_k i_k'$ fra loro e con i nodi di (3) formati con fili raddoppiati) nella seguente forma (4), ove sono racchiusi fra graffe i gruppi di tratti che daranno luogo a terne di cuspidi (e un contatto) o a quaterne di nodi,

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & \{[(1_1 1_1')(2_1 2_1')]^2\ 1_1 1_1'\ 2_1 2_1'\}\ \{[(1_1 1_1')(2_2 2_2')]^2\ 1_1 1_1'\ 2_2 2_2'\}; \\
& \{[(1_1 1_1')(3_1 3_1')]^2\}\ \{[(1_1 1_1')(3_2 3_2')]^2\}\ \{[(1_1 1_1')(3_3 3_3')]^2\}; \\
& \{[(2_1 2_1')(3_1 3_1')]^2\ 2_1 2_1'\ 3_1 3_1'\}\ \{[(2_1 2_1')(3_2 3_2')]^2\ 2_1 2_1'\ 3_2 3_2'\} \\
& \{[(2_1 2_1')(3_3 3_3')]^2\ 2_1 2_1'\ 3_3 3_3'\}\ \{[(2_2 2_2')(3_1 3_1')]^2\ 2_2 2_2'\ 3_1 3_1'\} \\
& \{[(2_2 2_2')(3_2 3_2')]^2\ 2_2 2_2'\ 3_2 3_2'\}\ \{[(2_2 2_2')(3_3 3_3')]^2\ 2_2 2_2'\ 3_3 3_3'\}; \\
& 3_1 3_1'^4\ 3_2 3_2'^4\ 3_3 3_3'^4\ \Sigma_{2_1 2_2}\ \Sigma_{3_1 3_2}\ \Sigma_{3_1 3_3}\ \Sigma_{3_2 3_3}.
\end{aligned}
$$

Ora, sono *le porzioni di treccia come* $[(1_1 1'_1)(2_1 2'_1)]^2$ $1_1 1'_1$ $2_1 2'_1$ *che danno luogo ad una terna di cuspidi ed un contatto: indichiamo con* $K_{1_1 2_1}$ *l'insieme dei tratti che danno tali* 3 *cuspidi e relativo contatto* riferendoci, in particolare, per tali tratti, alla ben nota forma data da Chisini.

Le porzioni di treccia come $[(1_1 1_1')(3_1 3'_1)]^2$ *danno luogo ad una quaterna di nodi*[18]) — *in forma canonica* — (v. n. 3, *a*)) —; *indichiamo con* $N_{1_1 3_1}$ *l'insieme di tratti consecutivi che danno tali quattro nodi.*

Analoga nomenclatura useremo per porzioni di treccia dello stesso tipo.

Per semplicità di scrittura daremo ancora le seguenti abbreviazioni per *gruppi di tratti rappresentativi di cuspidi* (*e*

---

17) Cfr. l. c. in 5).

18) Cfr. l. c. in 5).

relativi contatti):

$$K_{12} = K_{1_1 2_1}\ K_{1_1 2_2}; \quad K_{23} = K_{2_1 3_1}\ K_{2_1 3_2}\ K_{2_1 3_3}\ K_{2_2 3_1}\ K_{2_2 3_2}\ K_{2_2 3_3},$$

cioè K_{12} *rappresenta tutte le terne di cuspidi e relativi contatti realizzati con fili* 1_1 *e* $2_1\ 2_2$, *e* K_{23} *le terne di cuspidi e contatto realizzati con fili* $2_1\ 2_2$ *e* $3_1\ 3_2\ 3_3$.

Porremo poi, in relazione a *gruppi di quaterne di nodi,*

$$N_{13} = N_{1_1 3_1}\ N_{1_1 3_2}\ N_{1_1 3_3}$$

cioè N_{13} *rappresenta tutte le quaterne di nodi realizzate coi fili* 1_1 *e* $3_1\ 3_2\ 3_3$.

Infine, circa *le quaterne di scambi* $\Sigma_{i_h i_l}$ *porremo*

$$\Sigma_2 = \Sigma_{2_1 2_2}; \quad \Sigma_3 = \Sigma_{3_1 3_2}\ \Sigma_{3_1 3_3}\ \Sigma_{3_2 3_3}$$

cioè Σ_2 *rappresenta tutte le quaterne di scambi* — ordinate come è indicato — *formate con i fili* $2_1\ 2_2$ *e* Σ_3 *le stesse quaterne di scambi formate con i fili* $3_1\ 3_2\ 3_3$.

Usando tale nomenclatura, dalla treccia (4) si ha la treccia

$$\begin{array}{ccccc} K_{12} & K_{13} & & & \\ & K_{23} & & & \\ 3_1 3_1'^4 & 3_2 3_2'^4 & 3_3 3_3'^4 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \end{array} \tag{5}$$

che è appunto la *treccia della curva di diramazione* φ_{12} richiesta.

Procediamo ora, in modo analogo, per la costruzione della treccia della curva φ di diramazione di un piano « generale » m-plo.

Le considerazioni da farsi sono dello stesso tipo di quelle relative al precedente caso particolare; useremo una *nomenclatura simile a quella sopra indicata* (il cui significato apparirà chiaro).

Riferiamo brevemente i successivi passaggi. Partiamo da

$$\begin{array}{ccccc} 1_1 2_1^2 & 1_1 2_2^2 & 1_1 3_1^2 & 1_1 3_2^2 \ldots & 1_1 (m-1)_{m-1}^2 \\ & 2_1 2_2^2 & 2_1 3_1^2 & 2_1 3_2^2 \ldots & 2_1 (m-1)_{m-1}^2 \\ & & 2_2 3_1^2 & 2_2 3_2^2 \ldots & 2_2 (m-1)_{m-1}^2 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & \\ & & & & [(m-1)_{m-2} (m-1)_{m-1}]^2 \end{array} \tag{6}$$

Operiamo ora come nel passaggio da (1) a (2) (usando permutabilità del tutto analoghe): da (6) si ha la treccia:

$$
\begin{array}{lllll}
(7) & \{1_1 2_1^2 \;\; 1_1 2_2^2\} & \{1_1 3_1^2 \;\; 1_1 3_2^2 \;\; 1_1 3_3^2\} \;\dots & \{\dots 1_1 (m-1)_{m-1}^2\} \\
 & & \{2_1 3_1^2 \;\; 2_1 3_2^2 \;\; 2_1 3_3^2\} \;\dots & \{\dots 2_1 (m-1)_{m-1}^2\} \\
 & & \{2_2 3_1^2 \dots\} \;\dots & \{\dots 2_2 (m-1)_{m-1}^2\} \\
 & & \dots\dots\dots\dots & \\
 & & & \{\dots (m-2)_{m-2} (m-1)_{m-1}^2\} \\
 & & & T_2 \;\; T_3 \;\dots\; T_{m-1}\,.
\end{array}
$$

Raddoppiamo ora i fili di (7) e operiamo successivamente come nei passaggi dalla treccia (2) alle trecce (3), (4) e (5) del caso particolare. Si ha così dalla (7) la treccia voluta della suddetta curva φ diramante un piano m-plo generale:

$$
\begin{array}{lll}
(8) & K_{12} \;\; N_{13} \;\; N_{14} \dots N_{1\,m-1} \\
 & K_{23} \;\; N_{24} \dots N_{2\,m-1} \\
 & \dots\dots \\
 & K_{m-2\;m-1} \\
 & [(m-1)_1 (m-1)_1']^m \dots [(m-1)_{m-1} (m-1)_{m-1}']^m \, \Sigma_2 \dots \Sigma_{m-1} \;\; (^{19})\,.
\end{array}
$$

(ove per quanto detto sopra è chiaro il significato dei simboli).

Osservazione. Naturalmente, oltre a questo modello di treccia, che si può ritenere « un » modello canonico, se ne possono avere altri, per la stessa curva φ, che in qualche caso possono riuscire più comodi. Ciò si otterrebbe, non solo, eseguendo sulla (8) delle P e delle S, ma, per esempio, an-

---

19) Il calcolo dell'esponente m degli scambi $[(m-1)_i (m-1)_i']$ dell'ultima riga si effettua notando che dei $2(m-1)$ scambi dello stesso tipo della treccia T_{m-1} raddoppiata (nel modo indicato nel n. 4) ben $m-2$ sono stati usati per la costruzione delle cuspidi $K_{m-1\;m-2}$.

Osserviamo ancora che il simbolo K_{ij} rappresenta $i.j$ terne di cuspidi (e contatto relativo) e che il simbolo N_{ij} rappresenta $i.j$ quaterne di nodi.

che partendo invece che dalla (7), da altra treccia ottenuta da essa con delle P ed S ed operando poi su quest'ultima come si è operato nel passaggio dalla (7) alla (8).

6. - La costruzione della treccia delle curve di diramazione dei piani multipli « semplici » è del tutto analoga. La curva limite $\bar{\varphi}$ differisce infatti da quella del caso precedente solo per il fatto che le curve $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ di $\bar{\varphi}$ hanno ordine $h, h+1, \ldots, h+m-2$ (con $h > 1$) e pertanto la costruzione della treccia per le nuove curve di diramazione si potrebbe effettuare in modo simile al precedente (in relazione alle nuove curve $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$); è più comodo però seguire altra via.

Un piano « semplice » di ordine m è la proiezione di una superficie F di ordine n (senza linea doppia) da un suo punto $(h-1)$-plo (ove $m = n - h + 1$) e tale superficie F può considerarsi limite di una superficie generale F_0, di ordine n, che acquisti un punto $(h-1)$-plo; contemporaneamente dalla curva di diramazione si staccano le prime $h-1$ curve doppie C (di ordine più basso, della sua forma limite [20]).

La treccia della curva di diramazione di un piano « semplice » di ordine m si ottiene allora da quella di una curva di diramazione di un piano multiplo generale di ordine $m+(h-1)$ togliendo i fili corrispondenti alle prime $h-1$ curve doppie C suddette.

La forma della treccia risulta allora del tipo seguente (ove si usano simboli analoghi a quelli del n. 5):

$$
\begin{array}{l}
(1) \qquad (h_1h_1')^{h-1} \quad (h_2h_2')^{h-1} \ldots (h_hh_h')^{h-1} \\
\qquad\qquad K_{h\,h+1} \qquad N_{h\,h+2} \ldots N_{h\,h+m-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad K_{h+1\,h+2} \ldots N_{h+1\,h+m-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad K_{h+m-3\,h+m-2} \\
\qquad [(h+m-2)_1(h+m-2)_1']^{h+m-1} \ldots \\
\ldots[(h+m-2)_{h+m-2}(h+m-2)'_{h+m-2}]^{h+m-1}\,\Sigma_h\,\Sigma_{h+1}\ldots\Sigma_{h+m-2}\,.
\end{array}
$$

---

20) Cfr. l. c. in 3).

Notiamo che l'esponente $h-1$ che compare nella prima riga di tale treccia corrisponde al numero di scambi lasciati liberi sui fili $h_i h_i'$ per la soppressione dei fili $(h-1)_j$ $(h-1)_j'$ della treccia generale (scambi che erano impegnati in terne di cuspidi accompagnate dal solito contatto).

Ovviamente anche da questa treccia si possono dedurre altre forme operando con P ed S sulla sua forma finale o in qualche stadio intermedio (cfr. l'osservazione alla fine del n. 5).

7. - Consideriamo ora delle curve ψ di un tipo più generale dei precedenti trattati.

Precisamente prendiamo delle curve C_{ik} (cui attribuiamo un doppio indice i k) con la condizione che gli indici semplici i e k comprendano nel loro insieme tutti i valori 1, 2, ..., n e che gli scambi (ik) generino un gruppo transitivo. Indichiamo con $\bar{\psi}$ la curva composta dalle precedenti C_{ik} doppie nell'ipotesi che le C_{ik} non passino mai a tre a tre per uno stesso punto. Consideriamo ora le eventuali curve ψ che per variazione continua degenerano nelle $\bar{\psi}$ in modo che nei punti comuni a due C_{ik} aventi un indice in comune confluiscano una terna di cuspidi (e un contatto) di ψ e nei punti comuni a due C_{ik} con indici tutti diversi confluisca una quaterna di nodi (essendo limiti delle singolarità essenziali di ψ solo i punti comuni a due C_{ik}).

Si sa già [21]) che tali curve, se esistono, sono di diramazione per piani multipli; però, fissate comunque le curve (doppie) C_{ik}, non si sa se esistono curve ψ che le ammettano come limiti nel modo sopra indicato.

Ora, in vari casi, fissate le curve C_{ik}, è possibile costruire, con procedimento analogo a quello usato sopra, nei n.ri 4 e 5, la treccia di una curva $\bar{\psi}$ spezzata nelle C_{ik} date (contate due volte, col solito comportamento al limite per le singolarità). Precisamente, si costruirà la treccia τ di una curva degenere nelle C_{ik} contate ciascuna una volta sola, si

---

[21]) Cfr. O. CHISINI, *Un più generale teorema d'esistenza dei piani multipli*, Rend. Acc. Lincei, serie 6ª, 27 (1938).

raddoppieranno i suoi fili introducendo le dovute torsioni fra i fili raddoppiati e si costruiranno nei nodi formati da coppie di fili (raddoppiati) terne di cuspidi e quaterne di nodi (secondo i casi).

In relazione alla treccia ottenuta possiamo poi applicare il recente teorema di Chisini [22]) che afferma l'esistenza di una curva, di ordine n con δ nodi e k cuspidi, quando esiste la relativa treccia e questa si può dedurre con operazioni P, S ed F [23]) dalla treccia di una curva esistente (e ciò sotto la condizione $\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$).

Ora la treccia di una curva $\bar{\psi}$, costruita come è detto sopra, si deduce ovviamente [24]) con operazioni P, S ed F da quella della curva generale dello stesso ordine.

La curva ψ ha la stessa treccia di $\bar{\psi}$ e così tutte le volte che si può costruire (nel modo detto) la treccia di $\bar{\psi}$ e che i nodi e le cuspidi sono tali che $\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$ allora si ha effettivamente (fuori del limite) la curva ψ. Si ottiene così un criterio d'esistenza per piani multipli diramati da tali curve ψ (oltre che per le curve ψ stesse).

Si può vedere che non sono molte le curve ψ del tipo in esame, oltre i tipi diramanti piani multipli « generali » e « semplici ». Probabilmente si avrebbero più ampie possibi-

---

22) Cfr. O. CHISINI, *Il teorema d'esistenza delle trecce algebriche*, Rend. Acc. Lincei, serie 8ª, **27** (1954) nota I e II, e **28** (1955) Nota III.

23) Per le P ed S vedi 9). Quanto all'operazione F vedi l. c. in 22). Precisamente la F (fusione) consiste nella riunione di due punti di diramazione (sul piano π_x della variabile complessa x) cui corrispondono sulla treccia dei tratti uguali, che vengono fusi, togliendo il setto che li separa.

24) Infatti la treccia di $\bar{\psi}$, in sostanza, si deduce con operazioni P, S ed F dalla treccia τ_2 ottenuta dalla τ raddoppiandone i fili (con le dovute torsioni — sopra indicate — fra i fili raddoppiati). Ora quest'ultima treccia τ_2, quando in essa si sciolgano in contatti gli eventuali nodi — operazione opposta alla F —, è già la treccia di una curva f generale di ordine n (prossima alla forma limite data dalle C_{ik}, contate due volte, cui f può sempre ridursi variando in un sistema continuo).

lità se si usassero curve doppie C_{ik} passanti anche a 3 a 3 per uno stesso punto P (ove abbiano limite 6 cuspidi)[25]. La considerazione di tali casi, che potrà essere oggetto di lavori futuri, forse si presenterà utile per risolvere il problema della costruzione di tutte le trecce di diramazione (problema cui si è accennato nell'introduzione).

CAPITOLO II

Esistenza ed unicità di piani multipli.

8. - Le precedenti trecce delle curve φ sono state costruite usando alcune proprietà che derivavano dal fatto che le φ sono diramanti. Viceversa vedremo ora che le trecce costruite sono proprio di diramazione (e per un unico piano multiplo): ne risulterà che le suddette proprietà sono *sufficienti* (oltre che *necessarie*), cioè caratteristiche per le nostre φ come curve diramanti.

La verifica che daremo dell'esistenza e unicità del piano multiplo diramato dalle nostre trecce confermerà, per altra via, risultati noti[26].

Vediamo anzitutto che la treccia (8) del n. 5 è di diramazione per il piano m-plo che si realizza legando nel solito modo[27] rispettivamente le sostituzioni $z_1 z_2, z_2 z_3, \dots, z_{m-1} z_m$ ai fili relativi alle componenti $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$.

Usiamo, a tal fine, un tipo di verifica, fatta già altre volte, sulla base delle condizioni d'invarianza di Enriques[28].

---

25) Cfr. G. ZAPPA, *Caratterizzazione delle curve di diramazione delle rigate e spezzamento di queste in sistemi di piani*, Rend. Sem. Matem. di Padova, **13** (1942).

26) Cfr. l. c. in 3), l. c. in 2) § 3 ed E. MARCHIONNA, *Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli*, Rend. Acc. Lincei, serie 8ª, **11** (1951) e *Sull'identità birazionale delle ipersuperficie multiple diramate da una medesima varietà*, Ann. di Matem., serie 4ª, **37** (1954).

27) Cfr. per es. O. CHISINI, *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, Rend. Acc. Lincei, serie 6ª, **19** (1934) e l. c. in 5) e 7).

28) Cfr. l. c. in 4).

La treccia in esame è costituita da gruppi di tratti dei seguenti tipi: $K_{i\,i+1}$, N_{ij}, $[(m-1)_i(m-1)_i']$ e Σ_k. Tutti questi gruppi di tratti soddisfano alle suddette condizioni d'invarianza, quando gli scambi sui fili siano quelli sopra indicati.

Dunque la nostra φ — rappresentata dalla treccia (8) del n. 5 — è di diramazione per un piano multiplo.

Vedremo nel n. 10 come, più esattamente, il piano multiplo individuato dal sistema di sostituzione indicato sia l'*unico* (dal punto di vista birazionale) diramato dalla curva in esame.

9. - Per dimostrare l'unicità cui si allude alla fine del paragrafo precedente premettiamo alcune proposizioni utili poi.

a) Consideriamo l'insieme dei quattro tratti indicati con Σ_{12} — vedi fig. 1 — (e poniamoci nell'ipotesi che tali tratti siano distinti o almeno che due di essi — uguali e consecutivi — diano luogo solo a nodi inessenziali per la treccia di diramazione cui appartiene Σ_{12}).

Allora secondo le condizioni di invarianza di Enriques gli unici scambi (relativi a determinazioni di un piano multiplo) che si possono legare ai fili 1, 1', 2, 2' di Σ_{12} sono quelli dati da (a meno di cambiamenti inessenziali di nomi):

$$\begin{array}{llll} z_1 z_2 & z_1 z_2 & z_1 z_2 & z_1 z_2 \\ \text{oppure} \quad z_1 z_2 & z_3 z_4 & z_3 z_4 & z_1 z_2. \end{array}$$

Ciò risulta dall'esame della figura 1; precisamente, per la natura dei primi due tratti di Σ_{12}, debbono essere uguali gli scambi legati ai fili 1' e 2 ed uguali, o sconcatenati con quelli legati ai fili 1' e 2, gli scambi legati ai fili 1 e 2'; dalla forma poi degli ultimi due tratti si decide completamente circa la natura degli scambi legati ai fili 1 e 2'.

b) Ricordiamo [29]) che a 4 fili h, h', k, k' (successivi) che diano luogo alla treccia di una terna di cuspidi (essenziali) ed un contatto (nella forma di Chisini — già citata —) sono le-

---

[29]) Cfr. C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Sostituzioni legate ad una curva di diramazione che possa degenerare in parti doppie*, Annali di Matem., serie 4ª, **37** (1954), n. 4.

gati scambi sulle determinazioni di un piano multiplo solo dei due tipi

$$z_1 z_2 \quad z_1 z_2 \quad z_1 z_3 \quad z_1 z_3$$

e

$$z_1 z_2 \quad z_3 z_4 \quad z_1 z_4 \quad z_2 z_3.$$

c) Ricordiamo ancora [30]) che, quando quattro fili h, h' k, k' (successivi) danno luogo alla treccia di quattro nodi (essenziali) provenienti da un nodo (canonico) formato dalla coppia di fili h, h' con la coppia di fili k, k' (h e h' fra loro paralleli e k, k' pure fra loro paralleli), a questi quattro fili risultano legati scambi tali che quelli relativi ai fili h e h' agiscono su determinazioni tutte diverse da quelle su cui agiscono gli scambi relativi ai fili k e k'.

10. - Siamo ora in grado di dare il teorema di unicità annunciato alla fine del n. 8. Per maggior chiarezza diamo la verifica prima per la curva di diramazione φ_{12} rappresentata dalla treccia (5) del n. 5 e poi per il caso generale.

Osserviamo la treccia della suddetta φ_{12}: per l'esistenza degli scambi $3_1 3_1'$, $3_2 3_2'$, $3_3 3_3'$, ai fili 3_i e $3_i'$ — con lo stesso i — devono essere legati scambi uguali: per l'osservazione *a*) del n. 9, applicata ai gruppi di tratti di Σ_3, saranno allora fra loro uguali gli scambi legati ai fili 3_i e $3_i'$, qualunque sia il valore di i.

Chiamiamo $z_3 z_4$ lo scambio legato a tali fili 3_i e $3_i'$ ($i = 1, 2, 3$).

Per l'osservazione *a*) — del n. 9 — applicata a Σ_2 e per la *b*) — del n. 9 — applicata alla porzione K_{23} di treccia — dato che i fili 3_i e $3_i'$ contengono scambi uguali — devono essere uguali anche gli scambi sui fili 2_1 $2_1'$ 2_2 $2_2'$. Ancora per la stessa *b*) — dati i vincoli imposti dai tratti di K_{23} — gli scambi su 2_1 $2_1'$ 2_2 $2_2'$ saranno del tipo $z_2 z_3$.

Ora dalle proprietà *b*) e *c*) — n. 9 — applicate a K_{12} ed N_{13} risulta che sui fili 1_1 e $1_1'$ vi deve essere uno scambio del tipo $z_1 z_2$.

---

[30]) Cfr. l. c. in [29]), n. 5.

E' così dimostrata l'unicità del piano multiplo diramato dalla nostra curva di diramazione φ_{12}.

La dimostrazione si estende, con lo stesso procedimento di tipo ricorrente — risalendo la treccia dagli ultimi ai primi tratti —, al caso generale.

Per le trecce delle curve di diramazione dei piani multipli « semplici », con procedimenti del tutto analoghi a quelli seguiti or ora si verifica pure l'esistenza e l'unicità del piano multiplo da esse diramato (gli scambi legati ai fili sono dello stesso tipo di quelli che compaiono nel caso generale).

11. - Le eventuali curve ψ di cui al n. 7) che hanno per limite una curva $\bar{\psi}$ costituita dalle componenti (doppie) C_{ik}, sono state dedotte dalla possibilità di costruire per esse una treccia formata con gruppi di tratti [31]) uguali a quelli delle trecce di diramazione dei piani multipli « generali » e « semplici ».

Per tale treccia vale quindi una verifica simile a quella del n. 8, e cioè la ψ è certo di diramazione per un piano multiplo per cui le sostituzioni deposte sui fili (della treccia) relative rispettivamente alle componenti C_{ik} sono delle $z_i z_k$ — come era pure noto per altra via [32]) —.

La ψ a priori potrebbe essere diramante anche per più piani multipli [33]), però per $n > 4$ lo è per un solo piano multiplo [34]) — comunque, in ogni caso, si può sempre decidere di tale unicità o meno, esaminando la treccia —.

---

31) Cioè $K_{i\,i+1}$, N_{ij}, Σ_k, e scambi canonici fra fili raddoppiati.

32) Cfr. l. c. in [21]).

33) Vedi ad esempio il caso della sestica con nove cuspidi, che ha per limite una terna di rette doppie, la quale è di diramazione per più piani multipli — uno triplo e tre quadrupli — (cfr. l. c. in [5]): C. TIBILETTI, *Piani tripli ecc.*).

34) Cfr. O. CHISINI, *Sull'identità birazionale di due funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione*, Rend. Ist. Lombardo, **77** (1944) e l. c. in [29]).

CAPITOLO III

Superficie con elevato numero di punti doppi isolati.

12. - Le trecce di diramazione costruite possono essere utili per affrontare problemi che riguardano le superficie rappresentative dei piani multipli « generali » e « semplici » (in quanto tali trecce sono, come si è già detto, rappresentative delle stesse superficie).

Per esempio, tali trecce si presentano utili per la ricerca di superficie (prive di curva doppia) con numero elevato di punti doppi [35]).

Come è ovvio e noto, i punti doppi isolati di una superficie F' [36]) danno luogo a punti doppi della curva di diramazione φ' di un piano multiplo da essa rappresentato (punti doppi inessenziali che si aggiungono a quelli essenziali che già possiede in quanto curva di diramazione); e, viceversa, il sorgere di un

---

[35]) È stato assai studiato il problema della ricerca del massimo numero dei punti doppi isolati di una superficie ed è ben lungi dall'essere risolto. Cfr. per es.: S. LEFSCHETZ, *On the existence of loci with given singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913); B. SEGRE, l. c. in [1]) e l. c. in [2]); E. G. TOGLIATTI, *Alcune osservazioni intorno ad una particolare superficie del 5° ordine*, Studi in onore del prof. S. Ortu Carboni, Roma 1935 e *Una notevole superficie del 5° ordine con soli punti doppi isolati*, Festschrift R. Fueter Zürich, 1940, F. SEVERI, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario o di una forma di un iperspazio*, Ann. di Matem., serie IV, 25 (1946); B. SEGRE, *Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine*, Boll. U.M.I., **2** (1947); E. G. TOGLIATTI, *Sulle superficie algebriche col massimo numero di punti doppi*, Rend. Sem. Matem. di Torino, 9 (1949-50) (ove si trova un'ampia bibliografia) e ancora, per es. D. GALLARATI, *Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di punti singolari isolati*, Rend. Acc. Lincei, serie VIII, **11** (1951), B. SEGRE, *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche*, Atti Acc. Ligure di Sc. e lett., **9** (1952), D. GALLARATI, *Intorno ad una superficie del sesto ordine avente 63 nodi*, Boll. U.M.I., serie III, **7** (1952) e *Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli*, Rend. Acc. Lincei, serie VIII, **12** (1952).

[36] Escluso quello, proiettando dal quale la F' si ha il piano multiplo in esame, nel caso che così sia ottenuto lo stesso piano multiplo.

punto doppio inessenziale sulla curva di diramazione corrisponde al sorgere di un punto doppio isolato su ogni superficie rappresentativa di un piano multiplo diramato da φ'.

Inoltre, cosa per noi di primaria importanza, sussiste una proposizione di B. Segre [37]) secondo la quale se una curva (e la sua treccia) diramante un piano m-plo generale (o semplice) dato da una *superficie F di ordine n* varia con continuità (in un sistema Σ) — mantenendo il tipo e il numero delle singolarità essenziali — allora la φ variabile rimane di diramazione per un piano m-plo fra i cui modelli proiettivi vi è sempre una *superficie F di ordine n.*

Ora, in virtù di un recente teorema d'esistenza di Chisini [38]) (in un'ampia classe di casi) si può — operando sulla treccia di una curva f — far si che questa f acquisti nuovi punti doppi.

Quando la f sia la curva φ di diramazione relativa ad una superficie F di ordine n, la suddetta variazione continua della treccia conduce ad una superficie F' sempre di ordine n, che ha acquistato un corrispondente numero di punti doppi isolati (e possono ottenersi in tal modo superficie F' anche con un numero elevato di punti doppi isolati).

In particolare mostreremo, a titolo di esempio significativo (e già abbastanza complesso), come in tal modo si costruisce, confermandone così l'esistenza, la superficie del 5° ordine di Togliatti dotata di 31 punti doppi [39]).

13. - Premettiamo l'esposizione di alcune relazioni fra tratti di treccia al fine di sveltire l'esposizione successiva.

a) Siano i 4 fili successivi 1 1′ 2 2′. Si vede direttamente sul modello materiale o con le relazioni note dell'algebra delle trecce, con operazioni P ed S (esattamente quelle indicate nel

---

37) Cfr. l. c. in 2) § III.

38) Vd. l. c. in 22) e n. 7.

39) Cfr. E. G. TOGLIATTI, *Una notevole superficie del 5° ordine, ecc.*, l. c. in 35).

n. 3 *a*) eseguite a ritroso) che si ha

$$\Sigma_{12}\ 11'^2\ 22'^2 = 11'^2\ 22'^2\ \Sigma_{12} =$$
$$= 12^2\ 1'2^2\ 12'^2\ 1'2'^2 .$$

Dunque la parte di treccia ora trattata, con operazioni P ed S, può dar luogo a 4 nodi.

b) Siano i fili successivi $2_1\ 2_2\ 3_1\ 3_2$. Sul modello materiale si eseguono i seguenti passaggi che, in parte, sono verificabili anche solo in base alle note relazioni dell'algebra delle trecse. Sia

$$(1) \qquad 2_1 2_2\ \ 2_1 3_1^2\ \ 2_2 3_1^2\ \ 2_1 3_2^2\ \ 2_2 3_2^2\ \ 3_1 3_2^2 .$$

Di qui, con successivi passaggi, si hanno i risultati riportati nelle seguenti righe.

$$(2) \qquad 2_1 2_2\ \ 2_1 3_1^2\ \ 2_2 3_1^2\ \ 2_1 3_2^2\ \ 2_2 3_2^2\ \ 3_1 3_2^2 =$$
$$= 2_2 3_1^2\ \ 2_1 2_2\ \ 2_2 3_1^2\ \ 2_1 3_2^2\ \ 2_2 3_2^2\ \ 3_1 3_2^2 .$$

D'ora in poi *indichiamo ogni tratto con i fili che in esso si scambiano: se il tratto non è canonico aggiungeremo al simbolo, in basso a destra, una lettera, come indice, in modo che i tratti dallo stesso nome, con ugual indice, siano uguali.*

Da (2) si ha successivamente

$$(3) \qquad 2_2 3_1^2\ \ 2_1 2_2\ \ 2_2 3_1^2\ \ 2_1 3_2^2\ \ 2_2 3_2^2\ \ 3_1 3_2^2 =$$
$$= 2_2 3_1^2\ \ 2_2 3_1^2\ \ (2_1 2_2)_a\ \ 2_1 3_2^2\ \ 2_2 3_2^2\ \ 3_1 3_2^2 =$$
$$= 2_2 3_1^2\ \ 2_2 3_1^2\ \ (2_2 3_2)_a^2\ \ (2_1 2_2)_a\ \ 2_2 3_2^2\ \ 3_1 3_2^2 =$$
$$= (2_2 3_2)_b^2\ \ 2_2 3_1^2\ \ 2_2 3_1^2\ \ (2_1 2_2)_a\ \ 3_1 3_2^2\ \ (2_2 3_2)_b^2 =$$
$$= (2_2 3_1)_a^2\ \ (2_2 3_1)_a^2\ \ (2_2 3_2)_b^2\ \ (2_2 3_2)_b^2\ \ (2_1 2_2)_b\ \ (3_1 3_2)_a^2 .$$

c) Ricordiamo — v. *a*) del n. 3 — che è

$$\Sigma_{2_1 2_2} = \{ 2_1'2_2 \quad 2_1 2_2'(2_1') \} \{ 2_1'2_2 \quad 2_1 2_2'(2_1') \};$$

indicheremo ora

$$\Sigma'_{2_1 2_2} = 2_1'2_2 \quad 2_1 2_2'(2_1').$$

Poichè (come si verifica subito sul modello materiale)

$$[(2_1 2_1')(2_2 2_2')]^2 = 2_1 2_1'^2 \quad 2_2 2_2'^2 \, \Sigma'_{2_1 2_2} \Sigma'_{2_1 2_2} = 2_1 2_1' \quad 2_2 2_2' \, \Sigma'_{2_1 2_2} \, 2_1 2_1'$$
$$2_2 2_2' \, \Sigma'_{2_1 2_2} = [(2_1 2_1')(2_2 2_2')] \, [(2_1 2_1')(2_2 2_2')]$$

(essendo $[(2_1 2_1')(2_2 2_2')]$ lo scambio — in senso positivo — dei fili 2_1 e $2_1'$, fra loro paralleli, coi fili 2_2 e $2_2'$, pure fra loro paralleli), sarà

$$[(2_1 2_1')(2_2 2_2')] = 2_1 2_1' \quad 2_2 2_2' \, \Sigma'_{2_1 2_2}.$$

L'insieme dei due tratti di $\Sigma'_{2_1 2_2}$ quando si elimina il setto intermedio, ha la forma indicata dalla seguente fig. 2:

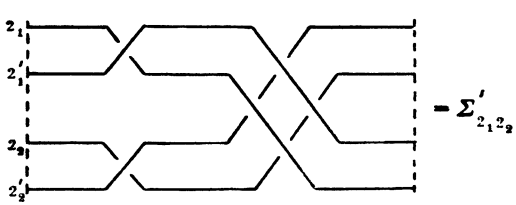

Fig. 2

Da questa figura appare che

$$\overbrace{2_1 2_1'} \; \Sigma'_{2_1 2_2} = \Sigma'_{2_1 2_2} \; 2_2 2_2'.$$

Di conseguenza *è permutabile con* $\Sigma'_{2_1 2_2}$ *la coppia di scambi* $2_1 2_1' \; 2_2 2_2'$. Sono poi naturalmente permutabili con $\Sigma'_{2_1 2_2}$ scambi che non contengono i fili $2_1 2_1' \; 2_2 2_2'$.

d) *Chiameremo con* $[(h_i h_i')(k_j k_j')]_a^2$ *e* $[(h_i h_i')(k_j k_j')]$ *gruppi di tratti che si ottengono da* $(h_i k_j)_a^2$ *e* $(h_i k_j)_a$ *raddoppiandone i fili* (con $h_i h_i'$ fra loro paralleli e $k_i k_i'$ pure fra loro paralleli).

Chiameremo $(K_{2_1 3_1})_a$ *una terna di cuspidi* (*e contatto*) *ricavata dal nodo* $(2_1 3_1)_a^2$ *raddoppiandone i fili e inserendovi i mez-*

zi avvolgimenti (positivi) $2_1 2_1'$ *e* $3_1 3_1'$, come $K_{2_1 3_1}$ è ricavata dal nodo $2_1 3_1^2$ (a fili raddoppiati e dovuti avvolgimenti fra questi).

Analogamente *chiameremo* $(\Sigma_{2_1 2_2})_a$ *l'insieme dei* 4 *scambi* (simili a $\Sigma_{2_1 2_2}$) *ricavati dal nodo* $(2_1 2_2)^2$ *a fili raddoppiati con inseriti i due* — interi — *avvolgimenti (negativi) fra* $2_1 2_1'$ *e* $2_2 2_2'$.

Chiameremo $(\Sigma'_{2_1 2_2})_a$ *la coppia di scambi ricavata dal raddoppiare i fili di un* $(2_1 2_2)_a$ (con l'inserimento dei soliti mezzi avvolgimenti negativi di $2_1 2_1'$ e $2_2 2_2'$).

Notiamo che i nostri tratti $(2_1 3_1)_a$ e $(2_1 2_2)_a$ (e simili) risultano dai tratti canonici dello stesso nome per l'aggiunta di altri fili che in essi sono implicati: come è noto, con circolazioni K [40]) (che riportano sempre i fili al loro posto iniziale) ciascuno dei tratti in esame si può ridurre alla forma canonica. Quando si raddoppiano i fili, nel modo detto, le K suddette diventano circolazioni (che indichiamo con) $\overline{K}$ di coppie di fili $i_h i_h'$ intorno a coppie di fili $j_k j_k'$.

Ciò premesso, per avere la terna di cuspidi (e contatto) $(K_{2_1 3_1})_a$ si può operare prima sul nodo $(2_1 3_1)_a^2$, a fili raddoppiati — in cui siano inseriti i suddetti avvolgimenti — con le precedenti $\overline{K}$ che lo rendono canonico, costruire le cuspidi e il contatto di $K_{2_1 3_1}$ su tale forma canonica, e ripetere le precedenti $\overline{K}$ in senso inverso.

Analogamente si può agire a proposito di $(\Sigma_{2_1 2_2})_a$.

Inoltre, per quanto detto or ora, valgono ancora le permutabilità degli scambi $i_l i_l'$ con gruppi di tratti dei tipi $(\Sigma_{2_1 2_2})_a$, $(K_{2_1 3_1})_a$ e $[(h_r h_r')(k_s k_s')]_a^2$; per $(\Sigma'_{2_1 2_2})_a$ valgono permutabilità (o meno) del tutto analoghe a quelle indicate alla fine del precedente comma *c*).

e) Notiamo infine che l'insieme di tratti

$$11'^2\ 22'^2 (\Sigma_{12})_a = (\Sigma_{12})_a\, 11'^2\ 22'^2$$

---

[40]) Cfr. l. c. in [7]) § 3. Tale operazione K equivale ad una trasformazione topologica sul piano π_y del poligono, ivi considerato, avente per vertici le determinazioni della y.

con operazioni P ed S si riduce ad una quaterna di nodi come accade nel comma a). Si dimostra il fatto usando le $\overline{K}$ (citate in d)), applicando le P ed S cui si allude in a) e ripetendo le precedenti $\overline{K}$ in senso inverso [41]).

14. - Diamo ora, come è detto nel n. 12, la ricerca della superficie del 5° ordine con 31 punti doppi isolati.

Questo caso si presenta già abbastanza complicato e ci riferiamo ad esso per mostrare come la nostra dimostrazione, fatta tramite la treccia, possa servire anche in casi piuttosto difficili.

Con procedimenti simili a quelli che useremo, si vede pure che una superficie del 3° ordine può acquistare 4 punti doppi ed una del 4° ordine 16 punti doppi. In tali casi però la verifica risulta assai semplice (e non solo con l'uso delle trecce) perchè ci si può sempre riferire ad un piano doppio (dato rispettivamente da una superficie del 3° ordine proiettata da un suo punto semplice e da una superficie del 4° ordine proiettata da un suo punto doppio).

Riferiamoci dunque alla suddetta superficie del 5° ordine, e per semplificare i passaggi successivi usiamo una delle trecce della curva φ_{14} diramante il piano multiplo semplice fornito da una superficie del 5° ordine con un punto doppio (e del resto generale) proiettata dal punto doppio stesso. Si può partire da una qualsiasi (forma di) treccia della nostra φ_{14} (vedi l'osservazione alla fine del n. 5) e con operazioni P ed S creare ed accostare tratti uguali. Per maggior semplicità di esposizione ci converrà partire non proprio dal risultato finale indicato nel n. 6 a proposito della treccia T di φ_{14}, ma da una delle precedenti fasi della costruzione data.

---

[41]) Notiamo che le operazioni P ed S e le K sono permutabili. Siano infatti due tratti consecutivi A e B (di una treccia); applichiamo ad essi prima la P e poi una K: si ha successivamente $AB = \overline{B}A = \overline{B}'A'$. Agli stessi applichiamo prima la precedente K e poi la P: si ha $AB = A'B' = \overline{\overline{B}}'A'$. Poichè l'insieme dei due tratti $\overline{B}'A'$ e $\overline{\overline{B}}'A'$ (tolto il setto intermedio) è lo stesso (non influendo la P ma solo la K su di essi) si ha $\overline{B}' = \overline{\overline{B}}'$. Donde l'asserto (comportandosi le S nello stesso modo rispetto alle K).

Ricordiamo che la treccia T di φ_{14} del tipo canonico indicato nei n.ri 5 e 6, risultava ottenuta costruendo prima una treccia τ che dà la curva limite $\overline{\varphi}$ costituita da una cubica ed una quartica generiche e poi raddoppiando i fili entro φ, e creando (quaterne di nodi e) terne di cuspidi (e relativo contatto) in certo modo.

Qui diamo appunto prima una treccia τ' trasformata della τ per P ed S, come è detto sopra, e costruiamo poi su questa una treccia T' della nostra φ_{14} (come sono state costruite su delle τ le trecce dei n.ri 5 e 6).

Precisamente la τ è data dalla seguente scrittura (ove sono nodi effettivi solo le coppie di tratti consecutivi $3_i4_j^2$, coppie che, naturalmente, non saranno scisse, nelle operazioni successive):

$$3_1 4_1^2\ 3_1 4_2^2\ 3_1 4_3^2\ 3_1 4_4^2\ 3_2 4_1^2\ 3_2 4_2^2\ 3_2 4_3^2\ 3_2 4_4^2\ 3_3 4_1^2\ 3_3 4_2^2\ 3_3 4_3^2\ 3_3 4_4^2$$

$$3_1 3_2^2\ 3_1 3_3^2\ 3_2 3_3^2\ 4_1 4_2^2\ 4_1 4_3^2\ 4_1 4_4^2\ 4_2 4_3^2\ 4_2 4_4^2\ 4_3 4_4^2\ .$$

Su questa treccia operiamo come è indicato qui sopra:

$$3_1 4_1^2\ 3_2 4_1^2\ 3_1 4_2^2\ 3_1 4_3^2\ 3_1 4_4^2\ 3_2 4_2^2\ 3_2 4_3^2\ 3_2 4_4^2\ 3_3 4_1^2\ 3_3 4_2^2\ 3_3 4_3^2\ 3_3 4_4^2$$

$$4_1 4_2^2\ 4_1 4_3^2\ 4_1 4_4^2\ 4_2 4_3^2\ 4_2 4_4^2\ 4_3 4_4^2\ 3_1 3_2^2\ 3_1 3_3^2\ 3_2 3_3^2 .$$

Operando come è indicato e portando in testa alla treccia i tratti sui fili $3_1\ 3_2\ 3_3$ si ha:

$$3_1 3_3^2\ 3_2 3_3^2\ 3_1 3_2^2\ 3_1 3_2\ 3_1 4_1^2\ 3_2 4_1^2\ 3_1 4_2^2\ 3_2 4_2^2\ 3_1 4_3^2\ 3_1 4_4^2\ 3_2 4_3^2\ 3_2 4_4^2$$

$$3_3 4_1^2\ 3_3 4_2^2\ 3_3 4_3^2\ 3_3 4_4^2\ 4_1 4_2^2\ 4_3 4_4^2\ 4_1 4_3^2\ 4_1 4_4^2\ 4_2 4_3\ 4_2 4_3\ 4_2 4_4^2 .$$

Di qui si ha

$$3_1 3_3^2\ 3_2 3_3^2\ 3_1 3_2\ 3_1 4_1^2\ 3_2 4_1^2\ 3_1 4_2^2\ 3_2 4_2^2\ 3_1 3_2\ 3_1 4_3^2\ 3_2 4_3^2\ 3_1 4_4^2\ 3_2 4_4^2\ 4_1 4_2^2$$

$$4_3 4_4^2\ 4_1 4_3^2\ 3_3 4_1^2\ 3_3 4_2^2\ 3_3 4_3^2\ 3_3 4_4^2\ 4_2 4_3\ 4_1 4_4\ 4_1 4_4\ 4_2 4_3\ 4_2 4_4^2 .$$

e poi

$$3_1 3_3^2\ 3_2 3_3^2\ [3_1 3_2\ 3_1 4_1^2\ 3_2 4_1^2\ 3_1 4_2^2\ 3_2 4_2^2\ 4_1 4_2^2][3_1 3_2\ 3_1 4_3^2\ 3_2 4_3^2\ 3_1 4_4^2\ 3_2 4_4^2\ 4_3 4_4^2]$$

$$4_1 4_3^2\ 3_3 4_1^2\ 3_3 4_2^2\ 4_2 4_3\ 3_3 4_2^2\ 3_3 4_4^2\ 4_1 4_4\ 4_1 4_4\ 4_2 4_3\ 4_2 4_4^2 .$$

Applichiamo ora ai due gruppi di tratti racchiusi fra parentesi quadre le operazioni P ed S di b) del n. 13; dalla ultima treccia (tenendo inoltre conto delle operazioni ivi indicate) si ha

$$3_1 3_3^2\ 3_2 3_3^2\ (3_2 4_1)_a^2\ (3_2 4_1)_a^2\ (3_2 4_2)_b^2\ (3_2 4_2)_b^2\ (3_1 3_2)_b\ (4_1 4_2)_a^2$$

$$(3_2 4_3)_a^2\ (3_2 4_3)_a^2\ (3_2 4_4)_b^2\ (3_2 4_4)_b^2\ (3_1 3_2)_c\ (4_3 4_4)_a^2\ 4_1 4_3^2\ 3^3 4_1^2$$

$$3_3 4_2^2\ 3_3 4_2^2\ (4_2 4_3)_a\ 4_1 4_4\ 3_3 4_1^2\ 4_1 4_4\ 4_2 4_3\ 4_2 4_4^2\ (^{42}).$$

Di qui si ha la seguente treccia che è appunto la τ' voluta

$$3_1 3_3^2\ 3_2 3_3^2\ (3_2 4_1)_a^2\ (3_2 4_1)_a^2\ (3_2 4_2)_b^2\ (3_2 4_2)_b^2\ (3_1 3_2)_b\ (4_1 4_2)_a^2$$

$$(3_2 4_3)_a^2\ (3_2 4_3)_a^2\ (3_2 4_4)_b^2\ (3_2 4_4)_b^2\ (3_1 3_2)_c\ (4_3 4_4)_a^2\ 4_1 4_3^2\ 3_3 4_1^2$$

$$3_3 4_1^2\ (3_3 4_2)_a^2\ (3_3 4_2)_a^2\ (4_2 4_3)_b\ (4_1 4_4)_a\ 4_1 4_4\ 4_2 4_3\ 4_2 4_4^2 .$$

Ora raddoppiamo i fili in τ' introducendo i dovuti scambi come si è fatto nel n. 5; si ha (usando la nomenclatura precisata in d) del n. 13):

$$3_1 3_1'^2\quad 3_2 3_2'^2\quad 3_3 3_3'^2\quad [(3_1 3_1')(3_3 3_3')]^2\quad [(3_2 3_2')(3_3 3_3')]^2$$

$$[(3_2 3_2')(4_1 4_1')]_a^2\quad [(3_2 3_2')(4_1 4_1')]_a^2\quad [(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2\quad [(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2$$

$$[(3_1 3_1')(3_2 3_2')]_b\quad [(4_1 4_1')(4_2 4_2')]_a^2\quad [(3_2 3_2')(4_3 4_3')]_a^2\quad [(3_2 3_2')(4_3 4_3')]_a^2$$

$$[(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2\quad [(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2\quad [(3_1 3_1')(3_2 3_2')]_c\quad [(4_3 4_3')(4_4 4_4')]_a^2$$

$$[(4_1 4_1')(4_3 4_3')]^2\quad [(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2\quad [(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2\quad [(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2$$

$$[(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2\quad [(4_2 4_2')(4_3 4_3')]_b\quad [(4_1 4_1')(4_4 4_4')]_a\quad [(4_1 4_1')(4_4 4_4')]$$

$$[(4_2 4_2')(4_3 4_3')]\quad [(4_2 4_2')(4_4 4_4')]^2\quad 4_1 4_1'^2\quad 4_2 4_2'^2\quad 4_3 4_3'^2\quad 4_4 4_4'^2 .$$

---

42) Si è posto $(3_1 3_2)_b$ una prima volta e $(3_1 3_2)_c$ una seconda volta perchè nei due tratti si inseriscono fili diversi (e così si è voluto distinguerli).

Tenendo conto del comma *d*) del n. 13 si ha

$$3_2 3_2'^2 \quad 3_3 3_3'^2 \quad 3_1 3_1'^2 \quad 3_3 3_3'^2 \, \Sigma_{3_1 3_3} \, [(3_2 3_2')(3_3 3_3')]^2 \quad [(3_2 3_2')(4_1 4_1')]_a^2$$

$$[(3_2 3_2')(4_1 4_1')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2 \quad [(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2 \quad 3_1 3_1'^3 \quad 3_2 3_2' \, (\Sigma'_{3_1 3_2})_b$$

$$[(4_1 4_1')(4_2 4_2')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_3 4_3')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_3 4_3')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2$$

$$[(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2 \quad 3_1 3_1' \quad 3_2 3_2' \, (\Sigma'_{3_1 3_2})_c \quad [(4_3 4_3')(4_4 4_4')]_a^2 \quad [(4_1 4_1')(4_3 4_3')]^2$$

$$[(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2 \quad [(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2 \quad [(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2 \quad [(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2$$

$$4_2 4_2' \quad 4_3 4_3' \quad (\Sigma'_{4_2 4_3})_b \, 4_1 4_1' \quad 4_4 4_4' \quad (\Sigma'_{4_1 4_4})_a \, 4_1 4_1' \quad 4_4 4_4'$$

$$\Sigma'_{4_1 4_4} \, 4_2 4_2' \quad 4_3 4_3' \quad \Sigma'_{4_2 4_3} \, [(4_2 4_2')(4_4 4_4')]^2 \quad 4_1 4_1'^2 \quad 4_2 4_2'^2 \quad 4_3 4_3'^2 \quad 4_4 4_4'^2 \text{ (43)}.$$

Applicando le operazioni qui segnate si ottiene:

$$\underline{3_2 3_2'^2} \quad \underline{3_3 3_3'^2} \quad 3_1 3_1'^2 \quad \underline{3_3 3_3'^2} \quad \Sigma_{3_1 3_3} \, [(3_2 3_2')(3_3 3_3')]^2 \quad [(3_2 3_2')(4_1 4_1')]_a^2$$

$$[(3_2 3_2')(4_1 4_1')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2 \quad [(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2 \quad \underline{3_2 3_2'} \, (\Sigma'_{3_1 3_2})_b \, \underline{3_2 3_2'^3}$$

$$[(4_1 4_1')(4_2 4_2')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_3 4_3')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_3 4_3')]_a^2 \quad [(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2$$

$$[(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2 \quad \underline{3_2 3_2'} \, (\Sigma'_{3_1 3_2})_c \, \underline{3_2 3_2'} \quad [(4_3 4_3')(4_4 4_4')]_a^2 \quad [(4_1 4_1') \, 4_3 4_3']^2$$

$$[(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2 \quad [(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2 \quad [(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2 \quad [(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2$$

$$\underline{4_2 4_2'} \quad \underline{4_3 4_3'} \quad \underline{4_1 4_1'} \quad \underline{4_4 4_4'} \, (\Sigma'_{4_2 4_3})_b \, \underline{4_1 4_1'} \quad \underline{4_4 4_4'} \, (\Sigma'_{4_1 4_4})_a \, \underline{4_2 4_2'} \quad \underline{4_3 4_3'}$$

$$\Sigma'_{4_1 4_4} \quad 4_1 4_1'^2 \quad 4_2 4_2'^2 \quad (\Sigma'_{4_2 4_3})_a \quad [(4_2 4_2')(4_4 4_4')]^2 \quad 4_3 4_3'^2 \quad 4_4 4_4'^2 .$$

Ora, dopo aver fatto le operazioni indicate, vengono accostati a ciascuno dei nodi formati con fili $3_i 3_i'$ e $4_j 4_j'$ uno scambio di $3_i 3_i'$ e $4_j 4_j'$ prendendoli da quelli sottolineati, con pas-

---

43) Si è trasportata la coppia di tratti $3_1 3_1'^2$, che stava al primo posto oltre i due gruppi di tratti $[(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2$ essendo permutabile con l'insieme dei tratti intermedi.

saggi, che, per quanto detto n. 3 e nel n. 13 *d*) alterano i tratti attraversati nel modo indicato nelle righe seguenti. Si ha

$$3_1 3_1'^2 \quad \Sigma_{3_1 3_3}; \quad [(3_2 3_2')(3_3 3_3')]^2; \quad [(3_2 3_2')(4_1 4_1')]_a^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_1 4_1';$$

$$[(3_2 3_2' (4_1 4_1')]_a^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_1 4_1'; \quad [(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_2 4_2';$$

$$[(3_2 3_2')(4_2 4_2')]_b^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_2 4_2' \quad (\Sigma'_{3_1 3_3})_e; \quad [(4_1 4_1')(4_2 4_2')]_a^2;$$

$$[(3_2 3_2' (4_3 4_3')]_a^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_3 4_3'; \quad [(3_2 3_2')(4_3 4_3')]_a^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_3 4_3';$$

$$[(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_4 4_4'; \quad [(3_2 3_2')(4_4 4_4')]_b^2 \quad 3_2 3_2' \quad 4_4 4_4';$$

$$(\Sigma'_{3_1 3_2})_f; \quad [(4_3 4_3')(4_4 4_4')]_a^2; \quad [(4_1 4_1')(4_3 4_3')]^2; \quad [(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2$$

$$3_3 3_3' \quad 4_1 4_1'; \quad [(3_3 3_3')(4_1 4_1')]^2 \quad 3_3 3_3' \quad 4_1 4_1'; \quad [(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2$$

$$3_3 3_3' \quad 4_2 4_2'; \quad [(3_3 3_3')(4_2 4_2')]_a^2 \quad 3_3 3_3' \quad 4_2 4_2'; \quad (\Sigma'_{4_2 4_3})_d; \quad (\Sigma'_{4_1 4_4})_b;$$

$$(\Sigma'_{4_1 4_4})_c; \quad (\Sigma'_{4_2 4_3})_a; \quad [(4_2 4_2')(4_4 4_4')]^2; \quad 4_3 4_3'^2 \quad 4_4 4_4'^2.$$

Di qui costruendo terne di cuspidi (come è indicato nei n.ri 5 e 13) e tenendo conto del n. 3 e del n. 13 *d*), si ha la treccia della nostra curva di diramazione φ_{14} nella seguente forma:

$$(1) \qquad \underline{[3_1 3_1'^2]} \quad 3_1' 3_3 (3_1 3_3') \quad 3_1 3_3' \quad \underline{[3_1 3_3' (3_1')^2]} \quad \{\Sigma_{3_2 3_3} \quad 3_2 3_2'^2 \quad 3_3 3_3'^2\}$$

$$[(K_{3_2 4_1})_a (K_{3_2 4_1})_a] \quad [(K_{3_2 4_2})_b (K_{3_2 4_2})_b] \quad (\Sigma'_{3_1 3_2})_e \quad \{(\Sigma_{4_1 4_2})_a \quad 4_1 4_1'^2 \quad 4_2 4_2'^2\}$$

$$[(K_{3_2 4_3})_a (K_{3_2 4_3})_a] \quad [K_{3_2 4_4})_b (K_{3_2 4_4})_b] \quad (\Sigma'_{3_1 3_2})_f \quad \{(\Sigma_{4_2 4_4})_a \quad 4_3 4_3'^2 \quad 4_4 4_4'^2\}$$

$$\{\Sigma_{4_1 4_3} \quad 4_1 4_1'^2 \quad 4_3 4_3'^2\} \quad [K_{3_3 4_1} \quad K_{3_3 4_1}] \quad [K_{3_3 4_2})_a (K_{3_3 4_2})_a] \quad (\Sigma'_{4_2 4_3})_d$$

$$(\Sigma'_{4_1 4_4})_b \quad (\Sigma'_{4_1 4_4})_c \quad (\Sigma'_{4_2 4_3})_a \quad \{\Sigma_{4_2 4_4} \quad 4_2 4_2'^2 \quad 4_4 4_4'^2\} \quad \underline{[4_3 4_3'^2]} \quad \underline{[4_4 4_4'^2]}.$$

Ora fondiamo le coppie di tratti consecutivi uguali che si riescono a trovare sulla treccia, ottenendo dei nodi della curva relativa, secondo il citato teorema di Chisini (di cui sono qui soddisfatte le ipotesi di applicabilità) [44]).

---

[44]) Vd. n. 7. Qui è $n = 14$, $\delta = 0$, $k = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ e la relazione $\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$ è senz'altro verificata.

I tratti in parentesi quadre sottolineate, della treccia (1), fusi fra loro, danno un punto doppio nuovo della nostra φ_{14}.

Fra i tratti racchiusi in parentesi quadra come $[(K_{3_1 4_1})_a (K_{3_1 4_1})_a]$ vi sono due contatti uguali che resi consecutivi e fusi danno pure un punto doppio.

Infine i tratti racchiusi nelle graffe, per quanto detto nel n. 13 *a*) ed *e*) danno luogo a 4 punti doppi.

Dunque i tratti di (1) racchiusi in parentesi quadre danno luogo a un punto doppio e quelli in graffe a 4 punti doppi.

Così, esaminando la (1) in base a ciò, si ha che la nostra treccia di diramazione può acquistare 30 punti doppi nuovi. Altrettanti punti doppi acquista la superficie del 5° ordine che dà il piano multiplo in esame (v. n. 12).

Pertanto tale superficie del 5° ordine, che ha già un punto doppio, acquistandone altri 30 viene ad averne 31, in accordo col già citato risultato di Togliatti.