RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

HANS HORNICH

Ueber Nirgends Lösbare lineare oder nichtilineare Partielle Differentialgleichungen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 160-164

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__160_0>

UEBER NIRGENDS LÖSBARE LINEARE ODER NICHTILINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Nota (*) *di* HANS HORNICH (*a Graz*)

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [1]) wurde für jedes beschränkte Gebiet G der xy-Ebene eine stetige Funktion $\varphi(x, y)$ konstruiert, so dass die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \tag{1}$$

für jedes Teilgebiet $G' \subset G$, in welchem $f(x, y)$ stetig *ist*, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert und nicht $\equiv 0$ ist, keine Lösung hat. Ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ vorhanden und $\equiv 0$ in G, also etwa auf jeder Kreisscheibe in G $f = f(x)$ nur von x abhängig, so ist $u = \int f(x)dx$ eine -triviale- Lösung von (1).

Die Funktion $\varphi(x, y)$ wird so konstruiert, dass in jedem Teilgebiet von G — also überall dicht — Punktepaare P, Q existieren, zwischen denen die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ zwei verschiedene Lösungskurven -sog. " Doppelwege "- aufweist.

Wir geben hier dazu einige Erweiterungen und Folgerungen anch für nichtlineare Differentialgleichungen.

(*) Pervenuta in Redazione il 14 febbraio 1955.

Indirizzo dell'A.: Technische Hochschule, Graz (Austria).

[1]) Monatsh. f. Math., 59 (1955), 34-42.

I. -*Wir können eine solche Funktion* $\varphi(x, y)$ *sogar für die ganze Ebene konstruieren,* so dass der obige Satz also für jedes beliebige Gebiet G der Ebene gilt.

Ist nämlich etwa $\varphi(x, y)$ in dem Intervall $I: |x| < 1$, $|y| < 1$ konstruiert worden, so setzen wir

$$\xi = \operatorname{tg}\frac{x\pi}{2}, \qquad \eta = \operatorname{tg}\frac{y\pi}{2}$$

wodurch I auf die volle Ebene der (ξ, η) transformiert wird; es ist dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(1 + \xi^2)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}(1 + \eta^2)\frac{\pi}{2}$$

und aus (1) wird:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \varphi\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\xi, \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\eta\right)\frac{1+\eta^2}{1+\xi^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}f\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\xi, \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\eta\right)\end{aligned} \tag{2}$$

welche Gleichung also wieder für jedes Teilgebiet der ξ, η -Ebene, in dem f stetig ist, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ existiert und nicht $\equiv 0$ ist, keine Lösung hat.

II. -*Die homogene Gleichung*

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

hat in G *nur die triviale Lösung* $u =$ *konstant.*

Sei nämlich u eine Lösung von (3); wir bilden mit $u_1 = x \cdot u$

$$Lu_1 = u + xLu = u;$$

u ist nach Voraussetzung stetig differenzierbar; daher ist nach unserem Satz $Lu_1 = u$ in G nur dann lösbar, wenn $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ in G ; dann ist aber wegen (3) auch $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ in G und $u =$ konstant.

III. - *Sei $F(x, y, u)$ für alle (x, y) auf G und alle u stetig und sei auch $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $\frac{\partial F}{\partial u}$ vorhanden und stetig. Soll die Differentialgleichurg*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u) \tag{4}$$

eine Lösung u in G haben, so muss diese von y unabhängig sein: $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ in G, es muss für diese Lösungswerte $u = u(x)$

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial y} \equiv 0$$

und u eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{du}{dx} = F(x, y, u)$ sein.

Sei u_1 eine Lösung von (4); wieder muss nach dem angeführten Satz, wenn wir $u_1 = u_1(x, y)$ in die rechte Seite von (4) eintragen, diese von y unabhängig sein:

$$\frac{\partial F(x, y, u_1(x, y))}{\partial y} \equiv 0 \qquad \text{in } G.$$

Dann aber hat nach unserem Satz die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u_1(x, y)) \tag{5}$$

auf jeder Kreisscheibe in G als Lösung sicher das unbestimmte Integral

$$u = \int F(x, y, u_1(x, y))dx$$

und nach II ist dies auch die allgemeine Lösung von (5), also auch

$$u_1 = \int F(x, y, u_1(x, y))dx$$

und weiter $\frac{\partial u_1}{\partial y} \equiv 0$. Wegen

$$\frac{\partial F(x,\ y,\ u_1(x,\ y))}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$$

muss aber auch $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ in G sein.

Diese Bemerkungen lassen sich sofort auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen, wobei wir uns wieder auf zwei Variable beschränken.

Es sei

$$\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} + \varphi(x,\ y) \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^{i-1} \partial y^{k+1}} = F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots\right); \tag{6}$$

es mögen dabei rechts nur Derivierte $\frac{\partial^{l+m} u}{\partial x^l \partial y^m}$ mit $l < i$, $m \leq k$ auftreten; die Funktion F sei für alle $(x,\ y)$ in G und alle Werte der restlichen Argumente definiert, stetig und möge in allen Argumenten mit Ausnahme von x stetige Ableitungen besitzen. Nach dem vorhin Bewiesenen hat dann (6) höchstens dann eine Lösung $u = u_1(x,\ y)$ wenn für die Werte dieser Lösung eingesetzt gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} F\left(x,\ x,\ u_1(x,\ y), \frac{\partial u_1(x,\ y)}{\partial x},\ \ldots\right) \equiv 0 \quad \text{in } G, \text{ also}$$

$$F\left(x,\ y,\ u_1(x,\ y),\ \frac{\partial u_1(x,\ y)}{\partial x},\ \ldots\right) = F_1(x)$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial^{i+k} u_1}{\partial x^{i-1} \partial y^{k+1}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{i+k} u_1}{\partial x^i \partial y^k} = F_1(x) \quad \text{in } G, \text{ also}$$

$$u_1 = A_0(x) y^k + A_1(x) y^{k-1} + \ldots + A_k(x),$$

wo $A_j(x)$ i-mal stetig nach x differenzierbar und $\frac{d^i A_0(x)}{dx^i} = \frac{1}{k!} F_1(x)$ ist.

Nur dann, wenn also, mit geeigneten $A_j(x)$ dieser Wert u_1 in $F(x, y\ u, \ldots)$ eingesetzt, letztere eine von y unabhängige Funktion $F_1(x)$ liefert, ist (6) *lösbar, und ist dann auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in x zurückzuführen.*

Es gibt also zu jeder linearen oder nichtlinearen Differentialgleichung, in der Derivierte von grösster Ordnung in jeder Variablen x und y auftreten, beliebig „benachbarte" Differentialgleichungen, die überall unlösbar sind. Denn die Funktionen φ können ja absolut beliebig klein gewählt werden.