

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

HANS HORNICH

**Ueber Nirgends Lösbare lineare oder nichtlineare
Partielle Differentialgleichungen**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 24 (1955), p. 160-164

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__160_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

UEBER NIRGENDS LÖSBARE LINEARE ODER NICHTLINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Nota () di HANS HORNICH (a Graz)*

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ wurde für jedes beschränkte Gebiet G der xy -Ebene eine stetige Funktion $\varphi(x, y)$ konstruiert, so dass die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)$$

für jedes Teilgebiet $G' \subset G$, in welchem $f(x, y)$ stetig ist, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert und nicht $\equiv 0$ ist, keine Lösung hat. Ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ vorhanden und $\equiv 0$ in G , also etwa auf jeder Kreisscheibe in G $f = f(x)$ nur von x abhängig, so ist $u = \int f(x) dx$ eine -triviale- Lösung von (1).

Die Funktion $\varphi(x, y)$ wird so konstruiert, dass in jedem Teilgebiet von G — also überall dicht — Punktpaare P, Q existieren, zwischen denen die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ zwei verschiedene Lösungskurven -sog. "Doppelwege"- aufweist.

Wir geben hier dazu einige Erweiterungen und Folgerungen auch für nichtlineare Differentialgleichungen.

(*) Pervenuta in Redazione il 14 febbraio 1955.

Indirizzo dell'A.: Technische Hochschule, Graz (Austria).

1) Monatsh. f. Math., 59 (1955), 34-42.

I. - Wir können eine solche Funktion $\varphi(x, y)$ sogar für die ganze Ebene konstruieren, so dass der obige Satz also für jedes beliebige Gebiet G der Ebene gilt.

Ist nämlich etwa $\varphi(x, y)$ in dem Intervall $I : |x| < 1, |y| < 1$ konstruiert worden, so setzen wir

$$\xi = \operatorname{tg} \frac{x\pi}{2}, \quad \eta = \operatorname{tg} \frac{y\pi}{2}$$

wodurch I auf die volle Ebene der (ξ, η) transformiert wird; es ist dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} (1 + \xi^2) \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} (1 + \eta^2) \frac{\pi}{2}$$

und aus (1) wird:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varphi \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \xi, \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \eta \right) \frac{1 + \eta^2}{1 + \xi^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2} f \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \xi, \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \eta \right) \end{aligned}$$

welche Gleichung also wieder für jedes Teilgebiet der ξ, η -Ebene, in dem f stetig ist, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ existiert und nicht $\equiv 0$ ist, keine Lösung hat.

II. - Die homogene Gleichung

$$(3) \quad Lu = \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

hat in G nur die triviale Lösung $u = \text{konstant}$.

Sei nämlich u eine Lösung von (3); wir bilden mit $u_1 = x \cdot u$

$$Lu_1 = u + xLu = u;$$

u ist nach Voraussetzung stetig differenzierbar; daher ist nach unserem Satz $Lu_1 = u$ in G nur dann lösbar, wenn $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ in G ; dann ist aber wegen (3) auch $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ in G und $u = \text{konstant}$.

III. - Sei $F(x, y, u)$ für alle (x, y) auf G und alle u stetig und sei auch $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $\frac{\partial F}{\partial u}$ vorhanden und stetig. Soll die Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u)$$

eine Lösung u in G haben, so muss diese von y unabhängig sein: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ in G , es muss für diese Lösungswerte $u = u(x)$

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial y} = 0$$

und u eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{du}{dx} = F(x, y, u)$ sein.

Sei u_1 eine Lösung von (4); wieder muss nach dem angeführten Satz, wenn wir $u_1 = u_1(x, y)$ in die rechte Seite von (4) eintragen, diese von y unabhängig sein:

$$\frac{\partial F(x, y, u_1(x, y))}{\partial y} = 0 \quad \text{in } G.$$

Dann aber hat nach unserem Satz die Differentialgleichung

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u_1(x, y))$$

auf jeder Kreisscheibe in G als Lösung sicher das unbestimmte Integral

$$u = \int F(x, y, u_1(x, y)) dx$$

und nach II ist dies auch die allgemeine Lösung von (5), also auch

$$u_1 = \int F(x, y, u_1(x, y)) dx$$

und weiter $\frac{\partial u_1}{\partial y} \equiv 0$. Wegen

$$\frac{\partial F(x, y, u_1(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$$

muss aber auch $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ in G sein.

Diese Bemerkungen lassen sich sofort auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen, wobei wir uns wieder auf zwei Variable beschränken.

Es sei

$$(6) \quad \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} + \varphi(x, y) \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^{i-1} \partial y^{k+1}} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots);$$

es mögen dabei rechts nur Derivate $\frac{\partial^{i+m} u}{\partial x^l \partial y^m}$ mit $l < i$, $m \leq k$ auftreten; die Funktion F sei für alle (x, y) in G und alle Werte der restlichen Argumente definiert, stetig und möge in allen Argumenten mit Ausnahme von x stetige Ableitungen besitzen. Nach dem vorhin Bewiesenen hat dann (6) höchstens dann eine Lösung $u = u_1(x, y)$ wenn für die Werte dieser Lösung eingesetzt gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} F\left(x, x, u_1(x, y), \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x}, \dots\right) \equiv 0 \quad \text{in } G, \text{ also}$$

$$F\left(x, y, u_1(x, y), \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x}, \dots\right) = F_1(x)$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial^{i+k} u_1}{\partial x^{i-1} \partial y^{k+1}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{i+k} u_1}{\partial x^i \partial y^k} = F_1(x) \quad \text{in } G, \text{ also}$$

$$u_1 = A_0(x)y^k + A_1(x)y^{k-1} + \dots + A_k(x),$$

wo $A_j(x)$ j -mal stetig nach x differenzierbar und $\frac{d^j A_0(x)}{dx^j} = \frac{1}{k!} F_1(x)$ ist.

Nur dann, wenn also, mit geeigneten $A_j(x)$ dieser Wert u_1 in $F(x, y, u, \dots)$ eingesetzt, letztere eine von y unabhängige Funktion $F_1(x)$ liefert, ist (6) lösbar, und ist dann auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in x zurückzuführen.

Es gibt also zu jeder linearen oder nichtlinearen Differentialgleichung, in der Derivierte von grösster Ordnung in jeder Variablen x und y auftreten, beliebig „benachbarte“ Differentialgleichungen, die überall unlösbar sind. Denn die Funktionen φ können ja absolut beliebig klein gewählt werden.